Extensions algébriques, corps de décomposition, corps finis.

Exercice 1. Donner les degrés des extensions suivantes et en donner des bases : $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i, j]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3}+i]/\mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soient K un corps, P un polynôme de $K[X]$ de degré n.

1. Montrer qu'un corps de décomposition L de P vérifie $[L : K] \leqslant n!$.
2. Montrer qu'en fait $[L : K]$ divise $n!$.

Exercice 3 (Calculs explicites dans $\mathbb{F}_{16}$)**.**

1. Montrer que le polynôme $X^4 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.
2. Montrer que c'est un facteur de $X^{15} - 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.
3. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{F}_{16}$ tel que $\alpha^4 = \alpha + 1$ et que pour un tel α, on a
$$\mathbb{F}_{16} = \{0\} \cup \{\alpha^k \mid \ k = 0, \ldots, 14\}.$$
4. Exprimer les α^k, $k = 0, \ldots, 14$ sous la forme $a \cdot \alpha^3 + b \cdot \alpha^2 + c \cdot \alpha + d \cdot 1$ avec a, b, c, d dans $\{0, 1\}$.
5. Expliquer comment remplir la table d'addition de $\mathbb{F}_{16}$ et en calculer quelques valeurs. Par exemple, vérifier que $\alpha^5 + \alpha^8 = \alpha^4$. Vérifier que $\{0, 1, \alpha^5, \alpha^{10}\}$ est le sous-corps de $\mathbb{F}_{16}$ isomorphe à $\mathbb{F}_4$.

Exercice 4.

1. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.
2. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élement $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
3. Soit L/K une extension et $x \in L$ algébrique sur K, de degré impair. Montrer que x^2 est également algébrique sur K et que $K[x^2] = K[x]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ possède des extensions de tout degré.
5. Charles Hermite a démontré en 1873 que e est un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$; en 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que $e + \pi$ et $e\pi$ ne peuvent pas être simultanément algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 5. Dessiner un diagramme montrant les inclusions possibles entre $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$, $\mathbb{F}_{16}$, $\mathbb{F}_{32}$, $\mathbb{F}_{64}$, $\mathbb{F}_{128}$ et $\mathbb{F}_{256}$.