Corps de décomposition.

Exercice 1 (Vrai ou faux)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et justifier la réponse par un contre-example ou une démonstration.

1. Deux corps de rupture d'un polynôme irréductible sont isomorphes à un unique isomorphisme de corps près.
2. Deux corps de décomposition d'un polynôme sont isomorphes à un unique isomorphisme près.
3. Le corps de rupture d'un polynôme irréductible est isomorphe à son corps de décomposition.
4. Il existe une fonction f telle que le degré de l'extension du corps de décomposition de tout polynôme P soit majoré par $f(deg(P))$.

Exercice 2. Calculer les corps de décomposition des polynômes suivants sur $\mathbb{Q}$, et donner leurs degrés :

1. $X^2 + 7$
2. $X^3 - 2$
3. $X^4 + 1$
4. $X^4 + 2$
5. $X^p - 1$, où p est un nombre premier.

Exercice 3.

1. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.
2. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élement $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
3. Soit L/K une extension et $x \in L$ algébrique sur K, de degré impair. Montrer que x^2 est également algébrique sur K et que $K[x^2] = K[x]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ possède des extensions de tout degré.
5. Charles Hermite a démontré en 1873 que e est un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$; en 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que $e + \pi$ et $e\pi$ ne peuvent pas être simultanément algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Dessiner un diagramme montrant les inclusions possibles entre $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$, $\mathbb{F}_{16}$, $\mathbb{F}_{32}$, $\mathbb{F}_{64}$, $\mathbb{F}_{128}$ et $\mathbb{F}_{256}$.

Exercice 5. Soit $k \subset \mathbb{R}$ un corps et P un polynôme irréductible sur k de degré supérieur ou égal à 2 admettant une racine de norme 1 dans $\mathbb{C}$. Montrer que P est réciproque (i.e. si α est une racine alors $1/\alpha$ l'est aussi) et de degré pair.