Extensions normales, extensions séparables

Exercice 1.

Soient $P = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, et K un corps de rupture de P.

1. Montrer que P est irréductible.
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\alpha^2 - 2$ aussi.
3. Montrer que $K/\mathbb{Q}$ est une extension normale.
4. Déterminer tous les automorphismes de K.

Exercice 2.

1. Soit L/K une extension de degré 2. Montrer qu'elle est normale.
2. Soit p un nombre premier et K un corps de caractéristique p. Soit $k = \{x^p \mid x \in K\}$. Montrer que K/k est une extension normale. Est-elle séparable ?

Exercice 3.

Soient K un corps, $P \in K[X]$ et L un corps de décomposition de P sur K. Soit K'/K une sous-extension de L/K.

1. Montrer que L est également un corps de décomposition de P sur K'.
2. En déduire que tout corps de décomposition sur K est une extension normale de K.
3. Réciproquement, montrer que toute extension normale finie de K est un corps de décomposition sur K.

Exercice 4.

Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p et $n > 0$ un entier. Soient $L = \mathbb{F}_q(T)$ et $K = \mathbb{F}_q(T^n)$.

1. Montrer que L/K est séparable si et seulement si n et p sont premiers entre eux.
2. Déterminer le polynôme minimal de $T \in L$ sur K. En déduire que L/K est normale si et seulement si $q \equiv 1 \mod n$.

Exercice 5.

Soit L/K une extension finie. On suppose que L est un corps parfait. Montrer que K est également parfait.