Groupes de Galois

Exercice 1. *Du tac au tac*

Que vaut le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ de X^3-X-1 ? de X^3+X^2-2X-1 ? de X^3-3X+1 ?

Exercice 2.

Soient $x=\sqrt[3]{2}$, $j=e^{2\pi i/3}$ et $K=\mathbb{Q}[x,j]$.

1. Montrer que $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne, de dimension 6, et que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
2. Expliciter la correspondance de Galois pour l'extension $K/\mathbb{Q}$.

Exercice 3. *Équation bicarrées*

Soient $a,b\in\mathbb{Q}$. On suppose que le polynôme $P=X^4+aX^2+b$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note $\pm\alpha,\pm\beta$ ses racines dans $\mathbb{C}$. Soit K le corps de décomposition de P dans $\mathbb{C}$ et soit $G=\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Soit $D_4\leqslant\mathfrak{S}_4$ le groupe diédral d'ordre 8, engendré par les permutations $r=(1234)$ et $s=(13)$.

1. Montrer que $[K:\mathbb{Q}]$ est égal à 4 ou 8.
2. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de D_4.
3. Montrer que G est isomorphe à un des trois groupes suivants :
$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ ou } D_4.$$
4. Montrer que $\alpha^2-\beta^2\notin\mathbb{Q}$.
5. Montrer que G possède un élément d'ordre 4 si et seulement si il existe $\sigma\in G$ tel que $\sigma(\alpha)=\beta$ et $\sigma(\beta)=-\alpha$.
6. On suppose dans cette question que $G\simeq\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Montrer que $\alpha/\beta-\beta/\alpha\in\mathbb{Q}$ et $\alpha\beta\notin\mathbb{Q}$.
7. On suppose dans cette question que $G\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que $\alpha/\beta-\beta/\alpha\notin\mathbb{Q}$ et $\alpha\beta\in\mathbb{Q}$.
8. On suppose dans cette question que $G\simeq D_4$. Montrer que $\alpha/\beta-\beta/\alpha\notin\mathbb{Q}$ et $\alpha\beta\notin\mathbb{Q}$.

Dans les questions 9 et 10, on considère le polynôme $P=X^4-2X^2+2$.

9. Montrer que P est irréductible sur Q et déterminer son groupe de Galois.
10. Dresser la liste des sous-corps de K. Lesquels sont galoisiens sur $\mathbb{Q}$?
11. Trouver des polynômes irréductibles de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ correspondant à chacun des cas de la question 3.