Actions de groupes et produit semi-direct

Actions de groupes

Exercice 1. Soit $G \curvearrowright X$ une action de groupe. Une partie $A \subset X$ est dite *stable* sous l'action de G si pour tout $g \in G$ on a $g \cdot A \subset A$. Montrer que A est stable sous l'action de G si, et seulement si, A est réunion d'orbites.

Exercice 2 (Fresnel p. 3)**.** Soit G un groupe commutatif qui agit fidèlement et transitivement sur un ensemble X. Montrer que l'action $G \curvearrowright X$ est simplement transitive.

Exercice 3 (Groupe symétrique)**.**

1. Démontrer que l'action tautologique $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [\![1, n]\!]$ est n-transitive.
2. Démontrer que l'action tautologique $\mathfrak{A}_n \curvearrowright [\![1, n]\!]$ est $(n-2)$-transitive, mais pas $(n-1)$-transitive.
3. Que dire d'une action $(n-1)$-transitive sur $[\![1, n]\!]$?

Exercice 4 (Un exemple de fidélisation)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps, on considère l'action naturelle de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^{n+1}$.

1. Déterminer le noyau de cette action.
2. En déduire que $PGL_n(\mathbb{K}) := GL_{n+1}(\mathbb{K})/\{\lambda \operatorname{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
3. Dans le cas $n = 1$, montrer que l'action est 2-transitive et déterminer le stabilisateur de $(\mathbb{K} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{K})$.
4. Toujours pour $n = 1$, montrer que l'action est 3-transitive. Est-elle k-transitive pour $k > 3$?
5. Qu'en est-il pour $n \geqslant 2$?

Exercice 5 (Action diagonale)**.** Soient $G \curvearrowright X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *action diagonale* de G sur X^n l'action définie par :

$$\forall g \in G,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n, \quad g \cdot (x_1, \dots, x_n) := (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n).$$

1. À quelle condition l'action diagonale $G \curvearrowright X^n$ est-elle transitive ?
2. On note $X^{(n)} := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$. Montrer que l'action diagonale stabilise $X^{(n)}$.
3. À quelle condition l'action restreinte $G \curvearrowright X^{(n)}$ est-elle transitive (resp. simplement transitive) ?

Exercice 6 (Formule de Burnside)**.** Soit $G \curvearrowright X$ une action d'un groupe fini. Pour $g \in G$, on note $\operatorname{Fix}(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ l'ensemble des points fixés par g. Montrer la formule de Burnside :

$$\operatorname{Card} X/G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Card} \operatorname{Fix}(g).$$

On pourra commencer par exprimer le nombre d'orbite $\operatorname{Card} X/G$ comme une somme sur X.

En déduire que $\operatorname{Card} X/G \geqslant (\operatorname{Card} X)/(\operatorname{Card} G)$, avec égalité si, et seulement si, l'action $G \curvearrowright X$ est libre.

Exercice 7 (Coefficients du mutlinôme)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Étant donnés des entiers positifs $k_1, \ldots, k_p \geqslant 0$ de somme $\sum_i k_i = n$, on définit l'ensemble $E^n_{k_1,\ldots,k_p}$ des partitions ordonnées de $[\![1, n]\!]$ de taille $(k_1, \ldots, k_p)$ par

$$\{(P_1, \ldots, P_p) \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])^p \text{ formant une partition de } [\![1, n]\!] \text{ avec } \operatorname{Card} P_i = k_j, \forall j\}\,.$$

On définit le coefficient de multinôme associé par

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_p} := \operatorname{Card} E^n_{k_1,\ldots,k_p}.$$

1. Vérifier que $\binom{n}{k} = \binom{n}{k,n-k}$ pour deux entiers naturels $k \leqslant n$.
2. Soit $X = \{(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\} \subset [\![1, n]\!]^n$, en considérant une action libre du groupe produit $\mathfrak{S}_{k_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{k_p}$ sur X, montrer que
$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_p} = \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_p!}.$$
3. Donner une preuve combinatoire de la formule du multinôme : pour tout anneau commutatif A,
$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{k_i \geqslant 0,\\ k_1+\cdots+k_p=n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_p} a_1^{k_1} \cdots a_p^{k_p}, \quad \forall a_1, \ldots, a_p \in A.$$

Remarque. Par le même argument combinatoire que pour la formule du multinôme, en utilisant que $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}$ est invariant par permutation des symboles ∂x_i lorsque f est n fois différentiable en x (lemme de Schwarz), on montre que

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{k_i \geqslant 0,\\ k_1+\cdots+k_p=n}} \frac{1}{k_1! \cdots k_p!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_p^{k_p}} h_1^{k_1} \cdots h_p^{k_p} + o(\|h\|^N), \quad \forall h \in \mathbb{R}^p,$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, N fois différentiable en x.

Applications des formules des classes et de Burnside

Exercice 8 (Théorème de Cauchy)**.** Soit G un groupe fini d'élément neutre e. En considérant l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par permutations cycliques sur l'ensemble de p-uplets $\{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 g_2 \cdots g_p = e\}$, montrer le théorème de Cauchy : si p divise l'ordre de G, alors il existe un élément $g \in G$ d'ordre p.

Exercice 9 (Centre d'un p-groupe, Perrin p. 16)**.** Soient p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, soit G un groupe de cardinal p^n, montrer que le centre de G est non trivial.

Exercice 10 (Nombre d'assiettes multicolores)**.** On souhaite peindre les bordures d'assiettes de la façon suivante : les assiettes, identiques, ont une bordure découpée en n secteurs égaux, nous avons c couleurs distinctes que nous pouvons appliquer sur les secteurs de notre choix (une couleur par secteur).

1. Supposons que le nombre de secteur est premier, combien d'assiettes distinctes peut-on obtenir ?
2. En se ramenant à l'étude d'une certaine action $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright [\![1, c]\!]^n$, donner une formule calculant le nombre d'assiettes distinctes dans le cas général.

Produit semi-direct

Exercice 11 (Produit semi-direct, cf. Perrin p. 22)**.** Soient N et H deux groupes et soit $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme. Montrer que la structure algébrique $N \rtimes_\phi H$ définie en cours est bien un groupe. Ne pas oublier l'associativité. Quel est le neutre pour cette loi ? Quel est l'inverse de (n, h) ?

Exercice 12 (Caractérisations du produit semi-direct)**.** Soient G, H et K des groupes. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une suite exacte courte scindée $1 \to H \to G \to K \to 1$,
2. G est isomorphe à un produit semi-direct $H \rtimes_\rho K$,
3. il existe des sous-groupes H' et K' de G, isomorphes à H et K respectivement, tels que $H' \lhd G$, $H' \cap K' = \{1\}$ et $G = H'K'$.

On précisera les morphismes $\rho : K \to \mathrm{Aut}(H)$ donnés par les implications (1)⇒(2) et (3)⇒(2) respectivement

Exercice 13 (Produit ~~semi-~~direct, cf. Perrin p. 23)**.** Soient N et H deux groupes et soit $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ telle que $\forall h \in H\ \phi(h) = \mathrm{Id}$, montrer que $N \rtimes_\phi H \simeq N \times H$.

Exercice 14 (Produit ~~semi-~~direct 2)**.** Soient N et H deux groupes et soit $G = N \rtimes H$. Montrer que si G est abélien alors $G = N \times H$.

Exercice 15 (Groupes de cardinal 6)**.** Montrer que $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathfrak{S}_3$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont les seuls groupes de cardinal 6.

Exercice 16 (Groupes diédraux, cf. Perrin p. 23)**.** Soit D_n le groupe diédral d'ordre n, c'est-à-dire le groupe des isométries d'un n-gone régulier du plan. Montrer que $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit est-il direct ?

Exercice 17. Montrer qu'il existe au moins trois produits semi-directs $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non isomorphes.

Exercice 18 (Wait a minute)**.** Dans les exercices 15 et 16 on n'a pas précisé par quel morphisme était définie la structure de produit semi-direct. Pourquoi ? Dans ces exercices, les isomorphismes sont-ils canoniques ?

Exercice 19 (Un contre-exemple)**.** Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne s'écrit pas comme un produit semi-direct non trivial.

Remarque. L'exercice 20 ci-dessous est plus difficile et constitue un développement classique. La solution est détaillée dans Perrin pp. 27-28. La preuve utilise les théorèmes de Sylow (Perrin sect. I.5) et une partie de la description des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (Perrin sect. I.7). Ces deux points sont aussi souvent proposés en développement.

Exercice 20 (Groupes de cardinal pq, cf. Perrin pp. 27-28)**.** Déterminer les groupes de cardinal pq avec p, q premiers et $p < q$. En particulier, pour $p = 2$ et $q \geqslant 3$ montrer qu'il n'y a que $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ et D_q.