Espaces et applications affines

Espaces affines

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et F un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathcal{E}/F$ l'ensemble des orbites de $\mathcal{E}$ sous l'action de F par translation. Montrer que $\mathcal{E}/F$ peut être muni d'une structure d'espace affine de direction E/F telle que, pour tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F, on ait la suite exacte suivante :

$$0 \to F \xrightarrow{\vec{i}} E \xrightarrow{\vec{p}} E/F \to 0,$$

où $i : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$ est l'inclusion et $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/F$ est la projection canonique. À quelle condition cette suite est-elle scindée ?

Exercice 2 (Carte affine sur la grassmannienne, Berger T. 1 p. 60)**.** Soient F un sous-espace de l'espace vectoriel de dimension finie E et $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{G \mid G \oplus F = E\}$ des supplémentaires de F. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace affine dirigé par $\mathcal{L}(E/F, F)$.

Exercice 3 (Dénombrement)**.**

1. Quel est le cardinal d'un espace affine sur $\mathbb{F}_q$ de dimension k ?
2. Combien y a-t-il de familles vectoriellement libres de cardinal k dans $\mathbb{F}_q^n := (\mathbb{F}_q)^n$ ($k \leqslant n$) ? En déduire les cardinaux de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $GA(\mathbb{F}_q^n)$.
3. Combien y a-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension k dans $\mathbb{F}_q^n$? De sous-espaces affines de dimension k ?

Exercice 4 (Retour aux axiomes, Fresnel p. 16)**.** Montrer que dans un plan affine deux droites sont concourantes ou parallèles.

Exercice 5 (Retour aux axiomes 2, Fresnel p. 16)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, montrer que $\mathcal{E}$ satisfait les axiomes suivants.

1. Par deux points distincts passe une unique droite (axiome d'incidence).
2. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $A \in \mathcal{E}$, il existe une unique droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A (axiome des parallèles).

Exercice 6 (Lien affine-vectoriel, Fresnel p. 13)**.** Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{E}$ un hyperplan affine de V ne contenant pas 0. On note E la direction de $\mathcal{E}$, qui est un hyperplan vectoriel de V. Soient $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$.

1. Décrire E en fonction de $\mathcal{E}$ et de la structure d'espace vectoriel de V.
2. Montrer que l'application $F \mapsto F \cap \mathcal{E}$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V non inclus dans E vers l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Expliciter la réciproque.
3. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, montrer que sa direction est $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \cap E$.
4. Montrer que la famille $(A_0, \dots, A_n)$ est affinement libre (resp. génératrice) dans $\mathcal{E}$ si et seulement si elle est vectoriellement libre (resp. génératrice) dans V.
5. Conclure que $(A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si c'est une base de V.
6. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, montrer que $\langle \mathcal{A} \rangle = \mathrm{Vect}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}$.

Applications affines

Propriétés théoriques

Exercice 7. Soient $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une application affine entre espaces affines réels et $A, B \in \mathcal{E}$. Montrer que $f([A, B]) = [f(A)f(B)]$.

Exercice 8. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $m := \sum \lambda_i \neq 0$. Montrer que $\frac{1}{m} \sum \lambda_i f_i$ définit une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Exercice 9. Déterminer le groupe affine du corps $\mathbb{K}$ muni de sa structure canonique de droite affine.

Exercice 10 (Fresnel, p. 31)**.** Soient $(\mathcal{E}, E)$ et $(\mathcal{F}, F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces affines. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace affine de direction $F \times \mathcal{L}(E, F)$. Donner sa dimension en fonction de celles de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine. Montrer que si f est injective l'image d'une famille libre est libre et que si f est surjective l'image d'une famille génératrice est génératrice.

Exercice 12 (Fresnel, p. 30)**.** Soient $f_i : \mathcal{E} \to K$ des formes affines non nulles où $i \in [\![1, k]\!]$ et $k \leqslant \dim(\mathcal{E})$. Montrer que $\bigcap f_i^{-1}(c_i)$ est un sous-espace affine non vide de codimension k si et seulement si $\left(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_k}\right)$ est une famille libre de E^*.

Exercice 13 (Boyer, Théorème 1.3.4)**.**

1. Soit $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$, montrer que l'application $\alpha_f : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\alpha_f(m) := \overrightarrow{mf(m)}$ est affine et donner sa partie linéaire.
2. Soit $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}\right) \oplus \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}\right)$. Montrer que f s'écrit de manière unique sous la forme $t \circ g$ où $g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ admet un point fixe et commute avec la translation t.

Applications (Faire les dessins !)

Exercice 14 (Théorème de Désargues)**.** On se place dans un plan affine. Démontrer la forme suivante du théorème de Désargues : soient abc et $a'b'c'$ deux triangles du plan affine tels que (ab) soit parallèle à $(a'b')$, (bc) à $(b'c')$ et (ac) à $(a'c')$, alors les droites (aa'), (bb') et (cc') sont ou bien concourantes ou bien parallèles.

Exercice 15. Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles du plan $\mathbb{R}^2$ de centres respectifs o_1, o_2, o_3 de rayons distincts tels que les disques qu'ils bordent soient disjoints. Soient a l'intersection des deux tangentes communes à $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ n'appartenant pas à $[o_2o_3]$, b celle des tangentes communes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ n'appartenant pas à $[o_1o_3]$ etc. Montrer que a, b et c sont alignés. Que se passe-t-il si on relaxe l'hypothèse des rayons distincts ? Si l'on choisit les autres intersections de tangentes communes ?

Exercice 16. Soit un vrai triangle abc du plan $\mathbb{R}^2$ aigu en a et c. Construire un carré $ijkl$ tel que $[ij] \subset [ac]$, $k \in [ab]$ et $l \in [bc]$. Un tel carré est-il unique ?

Exercice 17. Soit un vrai triangle abc, montrer qu'il existe une ellipse intérieure au triangle et tangente au milieu de ses côtés.
Indication : on utilisera le fait que l'image d'une ellipse par une application du groupe affine est une ellipse.

Exercice 18 (Audin, p. 44)**.** Soit ABC un vrai triangle du plan affine réel et $M_0 \in (AB)$. On construit M_1 l'intersection de (BC) avec la parallèle à (AC) passant par M_0, puis M_2 l'intersection de (AC) avec la parallèle à (AB) passant par M_1, etc. Montrer que $M_6 = M_0$.