Applications linéaires remarquables d'un espace vectoriel euclidien

Exercice 1 (Caractérisations des isométries vectorielles, Berger T. 2 sect. 8.1)**.**

Soit $\varphi : E \to F$ une application ensembliste entre espaces vectoriels euclidiens de même dimension, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- $\forall x, y \in E$, $\langle \varphi(x)\,, \varphi(y)\rangle_F = \langle x\,, y\rangle_E$.
- φ est linéaire et $\forall x \in E$, $\|\varphi(x)\|_F = \|x\|_E$.

Exercice 2 (Symétries et projections)**.**

Montrer qu'une symétrie orthogonale est une symétrie qui appartient au groupe orthogonal. Que dire d'une projection orthogonale ?

Exercice 3 (Centre du groupe orthogonal, Berger T. 2 sect. 8.2)**.**

Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, déterminer le centre de $O(E)$ et le centre de $SO(E)$.

Exercice 4 (Générateurs du groupe orthogonal, Berger T. 2 sect. 8.4)**.**

Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, soient $\varphi \in O(E)$ et $r := \mathrm{rg}(\varphi - \mathrm{Id})$.

1. Montrer que φ est produit de r réflexions et que ce nombre est minimal.
2. Si $\dim(E) \geqslant 3$ et $\varphi \in SO(E)$, montrer que φ est produit d'au plus r retournements. Ce nombre est-il minimal ? Qu'en est-il en dimension 2 ?

Exercice 5 (Décomposition en réflexions)**.**

Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un plan euclidien, montrer que tout élément de $SO(E)$ est produit de deux réflexions, dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Exercice 6. Déterminer un invariant total pour l'action naturelle $O(E) \curvearrowright E$. Quelles sont les orbites de cette action ? Mêmes questions pour l'action naturelle de $O(E)$ sur $E \times E$. Que se passe-t-il si on remplace $O(E)$ par $SO(E)$?

Exercice 7.

Montrer que $O(E)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormée de $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $SO(E)$ sur ces bases ?

Exercice 8 (Conjugaison)**.**

1. Dans $O_2(\mathbb{R})$, soit r la rotation d'angle α, s et s' deux réflexions par rapport aux droites D et D'. Déterminer le type et les éléments caractéristiques de srs^{-1}, $ss's^{-1}$, rsr^{-1}.
2. Soient r et r' deux rotations de $SO_3(\mathbb{R})$, déterminer les éléments caractéristiques de $rr'r^{-1}$ en fonction de ceux de r et r'.
3. À quelle condition deux rotations de $SO_3(\mathbb{R})$ commutent-elles ?

Exercice 9 (Encore des produits semi-directs)**.**

Montrer que $O_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Plus généralement, montrer que $O(E) \simeq SO(E) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 10 (Connexité de $SO(E)$)**.**

Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Montrer que $SO(E)$ est connexe. Montre que $O(E)$ a exactement deux composantes connexes.

Exercice 11 (Similitude directe ou indirecte)**.**

Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in O(E)$, à quelles conditions sur λ et O la similitude $\psi := \lambda\varphi$ est-elle directe ?

Exercice 12 (Commutation des similitudes vectorielles)**.**

Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un plan euclidien, montrer que les similitudes directes commutent. Qu'en est-il des similitudes indirectes ? Que se passe-t-il en dimension supérieure ?

Exercice 13 (Endomorphismes normaux)**.**

Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est *normal* si

$$u \circ u^* = u^* \circ u,$$

où $u^* \in \mathrm{End}(E)$ désigne l'adjoint euclidien de u.

1. Interpréter matriciellement le fait d'être normal. Vérifier que les similitudes vectorielles et les endomorphismes adjoints et autoadjoints sont normaux (donner aussi les analogues matriciels).
2. Soient $u \in \mathrm{End}(E)$ normal et F un sous-espace vectoriel de E, montrer que si $u(F) \subset F$, alors $u(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.
   Indication : on exprimera u dans une base orthonormée adaptée.
3. Montrer que toute application normale $u \in \mathrm{End}(E)$ se décompose en similitudes planes et homothéties le long de sous-espaces orthogonaux. Autrement dit, il existe une somme orthogonale $E = \bigoplus_j F_j$ où $\dim F_j \in \{1; 2\}$ telle que, pour tout j, $u|_{F_j}$ est une similitude.
   Indication : on utilisera le fait que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini admet une droite ou un plan stable.
4. Interpréter matriciellement ce résultat. Retrouver en particulier le théorème spectral des endomorphismes autoadjoints et la forme normale des isométries vectorielles.
5. Montrer que la norme d'opérateur associée à un endomorphisme normal est égale à son rayon spectral (*i.e.* le module de sa plus grande valeur propre).

Remarque. La notion d'endomorphisme normal s'étend de la façon évidente aux endomorphismes d'un espace hermitien (espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'une forme sesquilinéaire définie positive) et l'étude de ces endomorphismes est même un peu plus simple. Dans ce cas, ils sont diagonalisables et on retrouve la décomposition de la question 3 en corollaire. Il est possible d'étendre ces résultats aux espaces de Hilbert (espaces vectoriels de dimension infini avec produit scalaire réel ou complexe et complets pour la topologie induite par la norme associée) mais cela demande de l'analyse fonctionnelle.