Géométrie euclidienne

Exercice 1 (Bissectrices, Berger T. 2 sect. 8.7)**.**

Montrer que l'équation $2x = a$ d'inconnue x a exactement deux solutions dans le groupes des angles orientés de droites (resp. demi-droites). Utiliser ce fait pour définir les bissectrices d'un angle orienté de droites (resp. demi-droites).

Exercice 2 (Audin, pp. 83–84)**.**

Soient A, B et C trois points distincts sur un cercle de centre O dans un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'on a l'égalité d'angles orientés de demi-droites $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$.
2. En déduire que l'angle orienté de droites $(\widehat{(CA), (CB)})$ ne dépend pas de C.
3. On note $\mathcal{D}$ la tangente au cercle en B, montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = 2(\widehat{(AB), \mathcal{D}})$. En quoi ce résultat est-il le cas limite de la question précédente ?

Exercice 3 (Audin, p. 85)**.**

Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C et expliquer comment construire son centre O.
2. Montrer que $D \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(\widehat{(CA), (CB)}) = (\widehat{(DA), (DB)})$.
3. On identifie le plan à $\mathbb{C}$ par le choix d'une base orthonormée. Traduire le critère de cocyclicité précédent en termes des affixes a, b, c et d des points A, B, C et D.

Exercice 4 (Angles et similitudes affines)**.**

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension au moins 2 et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. On dit que f préserve les angles orientés (resp. non-orientés) de demi-droites, si pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$ avec $B \neq A \neq C$ on a

$$\left(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right).$$

1. Montrer que $f \in \mathrm{Sim}(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles non-orientés de demi-droites.
2. Si $\dim(\mathcal{E}) = 2$, montrer que $f \in \mathrm{Sim}^+(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles orientés de demi-droites.

Exercice 5.

Montrer que les hauteurs (resp. bissectrices, resp. médiatrices, resp. médianes) d'un triangle sont concourantes.

Exercice 6 (Constructions à la règle et au compas)**.**

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien.

1. Soient $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$, construire à la règle et au compas la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.
2. Même question avec la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A.
3. Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites parallèles de $\mathcal{E}$. Construire à la règle et au compas trois points A, B, C tels que $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_2$, $C \in \mathcal{D}_3$ et ABC est équilatéral.

Exercice 7 (Cercle et droite d'Euler, Eiden pp. 30 et 224).

Soit ABC un vrai triangle du plan euclidien, on note :

- G le centre de gravité de ABC,
- H l'orthocentre de ABC,
- O le centre du cercle circonscrit à ABC,
- A', B' et C' les symétriques respectifs par rapport à O des points A, B et C,
- M_A, M_B et M_C les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$,
- H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement,
- H'_A, H'_B et H'_C les symétriques H par rapport à $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
- P_A, P_B et P_C les milieux respectifs de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.

1. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, montrer que l'image de ABC par h est $M_AM_BM_C$. On note Γ le cercle circonscrit à $M_AM_BM_C$
2. Montrer que $h(H) = O$. On note $\Omega := h(O)$. Montrer que Ω est le centre de Γ.
3. Montrer que $\overrightarrow{\Omega H} = -\overrightarrow{\Omega O}$. En déduire que O, G, Ω et H sont alignés dans cet ordre.
4. Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport 2, montrer que $h'(\Omega) = O$ et $h'(\Gamma)$ est le cercle circonscrit à ABC.
   Indication : quelle est la nature de $h' \circ h$?
5. Montrer que G est le centre de gravité des triangles AHA', BHB' et CHC'. En déduire que M_A, M_B et M_C sont les milieux respectifs des segments $[A'H]$, $[B'H]$ et $[C'H]$.
6. Montrer que H'_A, H'_B et H'_C appartiennent au cercle circonscrit à ABC.
   Indication : considérer le triangle $HA'H_A$.
7. En déduire que H_A, H_B et $H_C \in \Gamma$.
8. Montrer que P_A, P_B et $P_C \in \Gamma$.

Exercice 8.

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan affine euclidien, A et B deux points hors de $\mathcal{D}$ et dans le même demi-plan. Construire $M \in \mathcal{D}$ tel que $d(M, A) + d(M, B)$ soit minimal.

Exercice 9 (Point de Fermat, Fresnel pp. 212–214).

Soient ABC un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien et $f : M \mapsto d(M, A) + d(M, B) + d(M, C)$.

1. Montrer que f admet un unique minimum, en un point M situé dans l'enveloppe convexe des sommets.
2. Si $M \notin \{A, B, C\}$, montrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}})$ sont égaux. En déduire que leur mesure est congrue à $\pm\frac{2\pi}{3}$ après un choix d'orientation du plan.

Exercice 10 (Trajectoires de lumières, Berger 9.4).

Soit P un polygone convexe de sommets $a_1, \ldots, a_n$. Un polygone de lumière de P est un polygone de sommets $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tel que, pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

(i) $\alpha_i \in]a_i, a_{i+1}[$,

(ii) (a_ia_{i+1}) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+1}}$.

Soient les droites $D_i := (\alpha_i\alpha_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Supposons que P admette un tel polygone de lumière. En considérant les réflexions s_{D_i}, montrer que

1. si n est impair, P admet un unique polygone de lumière,
2. si n est pair, nous avons dans le groupe des angles orientés de droites

$$\sum_{i=1}^{n/2} (\widehat{D_{2i-1}, D_{2i}}) = 0.$$

Il existe des réciproques à ces propriétés (*cf.* Berger 9.4.2.1).

Nombres complexes

On identifie le plan euclidien à $\mathbb{C}$ au moyen d'un repère euclidien.

Exercice 11 (Trigonométrie)**.**

Vérifier que vous savez redémontrer les formules de trigonométrie usuelles :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),\\ &\dots\end{aligned}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$.

Exercice 12 (Équations en complexes)**.**

Déterminer la nature géométrique des ensembles suivants :

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 4\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 1\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-2| = |z+i|\}$,
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \ \arg(z-i) = \frac{\pi}{4}\}$,
5. $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \,\middle|\, \Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0\right\}$,
6. $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \Re\left(z(\overline{b-a})\right) = \frac{|b|^2-|a|^2}{2}\right\}$.

Exercice 13 (Angle moitié et angle au centre)**.**

Soient α et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'argument de $\frac{e^{i\theta}-e^{i\alpha}}{e^{i\theta}-1}$. En déduire le théorème de l'angle au centre.

Exercice 14 (Caractérisations des triangles équilatéraux)**.**

Soient A, B et C des points d'affixes a, b et c.

1. Montrer que ABC est un triangle équilatéral centré en l'origine si, et seulement si, il existe un complexe $u \in \mathbb{C}$ tel que a, b et c soient les racines de $X^3 - u$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est remplie :
   (a) $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$, où $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$,
   (b) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$,
   (c) $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$.

Exercice 15.

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole définie par $y = \frac{1}{x}$. Soient $A \in \mathcal{H}$ d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathcal{H}$ son symétrique par l'origine, d'affixe $-\omega \in \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A contenant B. Montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \{B, M_1, M_2, M_3\}$ possède quatre points tels que $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral.
Indication : On appliquera la question 1 de l'exercice 14 aux affixes des M_i translatés de $-\omega$.

Exercice 16 (Théorème de Gauss–Lucas).

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P.