Calcul différentiel, rappels sur les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 (Définitions)**.**

Rappeler la définition des objets suivants :

1. La différentielle en $x \in U \subset \mathbb{R}^p$ d'une application $f\colon U \to \mathbb{R}^q$.
2. Une application $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^k$, lisse.
3. Un difféomorphisme, un difféomorphisme local.
4. Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 (Théorèmes importants)**.**

Rappeler les énoncés des théorèmes suivants :

1. Le théorème des fonctions implicites.
2. Le théorème du rang constant.
3. Le théorème d'inversion locale.

Exercice 3 (Inversion par rapport à une sphère)**.**

Soit f l'inversion par rapport à la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur lui-même.
2. Montrer que la différentielle de f en tout point préserve les angles.

Remarque : on a montré que l'inversion par rapport à la sphère unité était une application *conforme.* En toute généralité, l'inversion par rapport à la sphère de centre $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $R > 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} I_{\Omega,R}(x)\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\Omega\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\Omega\} \\ x &\longmapsto \Omega + R^2 \frac{x-\Omega}{\|x-\Omega\|^2} \end{aligned}$$

On montre de la même manière que c'est une application conforme.

Exercice 4.

Soit f l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto \left(e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y\right). \end{aligned}$$

Montrer que l'image de f est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.

Soit $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application injective de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $p \leqslant q$ et qu'il existe un ouvert dense $V \subset U$ tel que $\forall x \in V$, $\mathrm{d}f(x)\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est injective.

Exercice 6.

Soit $M_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée ayant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset M_n(\mathbb{R})$ de M_0 tel que toute matrice $M \in U$ possède n valeurs propres réelles distinctes.
Montrer que l'on peut choisir U de sorte que la fonction $M \in U \mapsto (\lambda_1(M), \ldots, \lambda_n(M)) \in \mathbb{R}^n$ est lisse, où $\lambda_1(M) < \ldots < \lambda_n(M)$ sont les valeurs propres de M.

Exercice 7 (La sphère unité)**.**

1. Montrer que la sphère unité $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} {x_i}^2 = 1\right\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$. Quel est l'espace tangent à $x \in \mathbb{S}^n$?
2. Montrer, en munissant $\mathbb{S}^n$ d'un atlas différentiable, que c'est une variété différentielle.

Exercice 8 (Sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$)**.**

Dans cet exercice, on identifie $M_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que les sous-ensembles suivants sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$ et identifier leur espace tangent en I_n.

1. $O_n(\mathbb{R})$.
2. $SO(n)$.
3. $GL_n(\mathbb{R})$.
4. $SL_n(\mathbb{R})$.