

# MP01 - Quantité de mouvement, moment cinétique et énergie en mécanique classique

---

Etienne Thibierge - Jean-Baptiste Caussin

2 mars 2012

## Rapports de jury :

- 2011 : "Il faut bien différencier mécanique du point et mécanique du solide pour valider un modèle théorique. Les trois aspects de l'intitulé sont d'égale importance. Les systèmes isolés ou pseudo-isolés ne sont pas les seuls pouvant illustrer ce montage."
- 2010 : "L'étude quantitative du moment cinétique est souvent négligée."
- 2004 : "Les tables à coussin d'air ne sont pas les seuls outils à la disposition des candidats pour ce montage. L'utilisation de tables à digitaliser couplées à des logiciels d'acquisition et de dépouillement des données permet une présentation plus riche, ainsi qu'un gain de temps permettant de présenter plus d'expériences abordant des phénomènes plus variés."<sup>1</sup>

## Bibliographie :

- Quaranta I Mécanique,
- Duffait CAPES,
- Pérez Mécanique

## Plan :

<b>1</b>	<b>Chute libre</b>	<b>2</b>
1.1	Mesure de l'accélération de la pesanteur . . . . .	2
1.2	Conservation de l'énergie mécanique (optionnel) . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Choc élastique</b>	<b>3</b>
2.1	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	3
2.2	Etude énergétique . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Mouvement à force centrale conservative</b>	<b>4</b>
3.1	Dispositif expérimental . . . . .	4
3.2	Conservation du moment cinétique : loi des aires . . . . .	5
3.3	Conservation de l'énergie . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Pendule pesant</b>	<b>6</b>
4.1	Moment d'inertie . . . . .	6
4.2	Energie . . . . .	7

---

1. En dépit de ces multiples et indéniables avantages des tables à digitaliser, il faut savoir se contenter de ce que l'on a...

# Introduction

En mécanique, on a recours pour décrire les mouvements aux éléments cinétiques que sont la quantité de mouvement et le moment cinétique, afin de faire le lien avec les causes du mouvement (efforts mécaniques) via la seconde loi de Newton et le théorème du moment cinétique.

Il est également utile d'introduire l'énergie, sous forme cinétique ou potentielle, dont la variation est donnée par le théorème de l'énergie mécanique.

Dans ce montage, on va donc illustrer les notions de quantité de mouvement, de moment cinétique et d'énergie, en lien avec les causes du mouvement. L'utilisation des principes de la mécanique permettra aussi de déduire de mesures cinétiques des grandeurs intrinsèques au système étudié.

## 1 Chute libre

### 1.1 Mesure de l'accélération de la pesanteur

On étudie la chute d'un objet sur 1 m de hauteur. L'objet en question est une règle munie de bandes sombres équidistantes, dont on repère le passage lorsqu'elles coupent le faisceau de capteurs infrarouge.

La règle est initialement maintenue par un électroaimant alimenté en 1 A. L'ouverture de l'interrupteur du le circuit d'alimentation de l'électroaimant déclenche la chute de la règle (sans vitesse initiale). Un premier capteur permet de déclencher l'acquisition sur Synchronie au passage du premier trait de la règle.

La règle passe ensuite devant un 4 capteurs situés à une distance connues du premier : on relève les temps de passage, ainsi que les vitesses correspondantes (que l'on déduit de l'écart temporel entre le passage de 5 traits, connaissant la distance entre traits). En déplaçant les capteur, on peut tracer la position  $d(t) = z_0 - z(t)$  en fonction du temps  $t$  (avec  $z_0$  position du premier capteur) : il s'agit d'une parabole que l'on ajuste à une loi

$$d(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

On en déduit

$$g = \quad \pm \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

#### Incertitudes :

- sur  $z$  : de l'ordre de  $\pm 2$  mm ;
- sur  $t$  : il faut bien sûr que le temps d'échantillonnage soit court devant le temps de passage d'un trait devant le capteur, c'est alors lui qui fixe l'incertitude ;
- non-verticalité du dispositif : si la règle (de largeur  $l = 2$  cm) passe bien dans le capteur situé  $D = 1$  m plus bas, la distance réellement parcourue par la règle est au plus  $d = \sqrt{D^2 + l^2}$ , soit une incertitude  $\frac{d-D}{D} \sim 0,02\%$ .

### 1.2 Conservation de l'énergie mécanique (optionnel)

On calcule sur Synchronie

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$$

$$E_p(t) = m g (z_0 - z(t))$$

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t)$$

On vérifie alors la conservation de l'énergie mécanique au cours de la chute libre.

*N.B.* : cette étude énergétique, qui ne donne pas des résultats transcendants, est sans doute la partie à omettre (le montage étant relativement long par ailleurs). Dans ce cas, inutile de mesurer la vitesse : lâcher une bille à la place de la règle suffit.

## 2 Choc élastique

**Utilisation des mobiles autoporteurs :** rien de bien compliqué à signaler, seulement quelques précisions pouvant être utiles.

- Il faut bien régler l'horizontalité : d'abord au niveau à bulles, puis en minimisant la déviation des mobiles. Commencer par jouer sur les 2 vis qui sont du même côté de la table, ensuite ajuster la troisième vis.
- Utiliser une feuille de papier par-dessus la feuille de carbone. Attention à mettre la feuille de carbone dans le bon sens.
- L'idéal est de scotcher la feuille de carbone sur la table, veiller à ce qu'elle soit bien à plat sur toute la surface.
- Le dispositif de marquage ne fonctionne que si les 2 mobiles sont présents sur la feuille. Par contre, rien n'interdit d'en éteindre un des deux.

### 2.1 Conservation de la quantité de mouvement

**Incertitudes sur la table à coussin d'air :** avant de débiter les expériences proprement dites, on va commencer par caractériser l'incertitude liée à toutes les "imperfections" du montage (non-horizontalité de la table, influence des fils alimentant les mobiles, frottements...).

Pour cela, on réalise une première acquisition en lançant simplement l'un des mobiles depuis un côté de la table : si l'on peut bien considérer le système comme isolé, un résultat hautement non-trivial de la physique moderne prévoit un mouvement rectiligne et uniforme. Bien sûr en pratique tout est moins simple : on vérifie que la trajectoire n'est pas trop déviée, et surtout on calcule la distance séparant 3 ou 4 points à différentes positions le long de la trajectoire. La dispersion des résultats donne une estimation de l'incertitude due au dispositif expérimental, que l'on retrouvera dans toutes les mesures suivantes : de l'ordre de 15%.

*N.B. : on obtient de meilleurs résultats lorsqu'on évite de lancer les mobiles trop doucement.*

**Réalisation du choc :** munir les 2 mobiles autoporteurs des bagues spéciales "choc élastiques" et rajouter une masse (une grosse bague en métal) sur l'un des deux. Lancer le mobile léger pas trop vite, et envoyer le plus lourd à plus grande vitesse pour avoir un choc dans le milieu de la feuille.

Ceci nécessite donc 2 mains (jusque là tout va bien)... mais il en faut une de plus pour appuyer sur le bouton aussitôt les mobiles lancés : pour le commun des mortels, l'assistance d'un technicien est par conséquent indispensable pour obtenir un enregistrement en préparation. Devant le jury, on se contentera de réaliser une collision, puis on travaillera sur le chronogramme obtenu en préparation.

**Exploitation des données :** première constatation, la quantité de mouvement de chacun des mobiles (pris séparément) n'est pas conservée lors du choc car ils exercent des forces l'un sur l'autre. En revanche, en ayant mesuré les masses  $m_1$  et  $m_2$  des mobiles, on peut repérer sur la feuille la position du centre d'inertie du système {mobile 1 + mobile 2} (à faire tous les 5 points par exemple, selon la patience de l'expérimentateur, et garder un point à tracer devant le jury). On vérifie à la règle que le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme (dans la limite des 15% d'erreur) : la quantité de mouvement du système {mobile 1 + mobile 2} est conservée car ce système est isolé, il y a uniquement des échanges de quantité de mouvement entre les deux sous-systèmes (par l'intermédiaire de forces internes au système, dont la somme est nulle en vertu du principe des actions réciproques).

$$m_1 =$$

$$m_2 =$$

### 2.2 Etude énergétique

On va maintenant étudier ce qui s'est produit lors du choc d'un point de vue énergétique. En exploitant toujours l'enregistrement précédent, on a accès aux vitesses des mobiles à différents instants (moyenner sur 4 ou 5 points), donc aux énergies cinétiques de translation  $E_{CT1}$  et  $E_{CT2}$ . Le tracé de ces énergies, ainsi que de la somme  $E_{CT} = E_{CT1} + E_{CT2}$  est donné figure 2. Dans la barre d'erreur de 15%, on observe qu'il y a

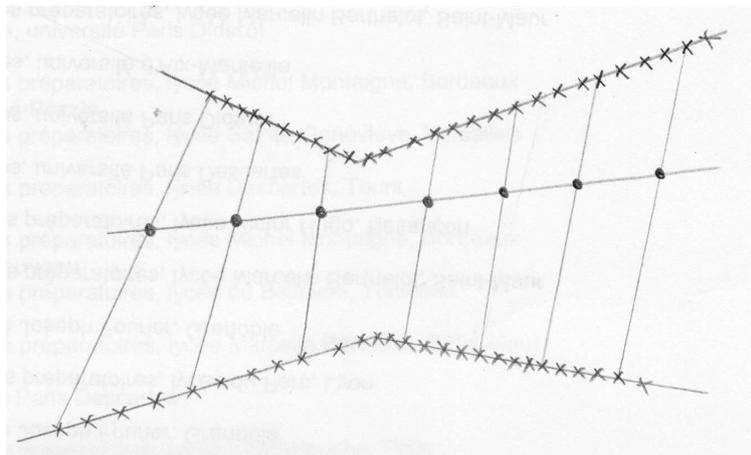


FIGURE 1

eu échanges d'énergie entre les deux mobiles, avec conservation de l'énergie mécanique totale : il s'agit d'un choc de nature élastique. Bien sûr nous n'avons pas pris en compte l'énergie cinétique de rotation, mais on peut ici raisonnablement la supposer faible devant la contribution de la translation, ce qui est en tous cas conforme aux résultats expérimentaux.

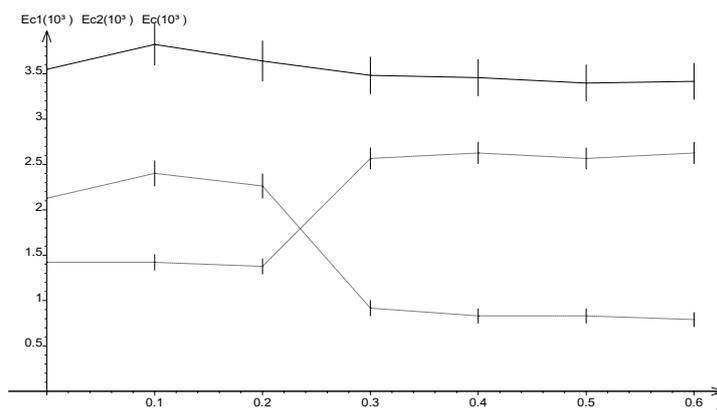


FIGURE 2

### 3 Mouvement à force centrale conservative

#### 3.1 Dispositif expérimental

On utilise toujours les mobiles auto-porteurs, mais cette fois en les reliant par un ressort (dont chaque extrémité se fixe dans le trou d'une bague à placer autour des mobiles). Un des "mobiles" est éteint et placé (fixe) à un coin de la table (on peut lui rajouter des masses supplémentaires pour s'assurer qu'il ne bouge pas), tandis qu'on lance l'autre en veillant à ce que le ressort reste tendu lors de l'acquisition.

Masse du mobile :  $m = 978 \text{ g}$ .

En préparation, on a caractérisé le ressort en mesurant sa longueur lorsqu'on y suspend différentes masses : raideur  $K = 10,8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , longueur à vide  $l_0 = 14,5 \text{ cm}$ .

Enfin, on a mesuré la masse surfacique du papier utilisé :  $\mu = 201 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ .

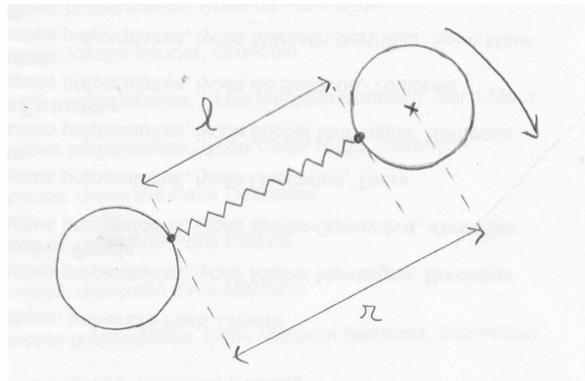


FIGURE 3

### 3.2 Conservation du moment cinétique : loi des aires

Le mouvement est à force centrale, donc il y a conservation du moment cinétique. La quantité  $C = r^2\dot{\theta}$  est donc une constante du mouvement. Une conséquence immédiate de cette loi de conservation est la loi des aires, que l'on va vérifier expérimentalement : l'aire parcourue par le vecteur position pendant  $\Delta t$  est  $A = \frac{1}{2}C \Delta t$ .

On choisit une durée  $\Delta t$  correspondant par exemple à 5 points sur l'enregistrement, et on découpe avec un cutter l'aire parcourue par le mobile pendant  $\Delta t$  au début de son mouvement. Puis on réalise la même opération un peu plus loin sur la trajectoire. On pèse les 2 morceaux de papier et on en déduit les aires parcourues pendant  $\Delta t$  :

$$A_1 =$$

$$A_2 =$$

Si tout va bien, elles sont égales (toujours à 15% près)!

Attention, il faut bien repérer la position du centre du mobile à partir de l'extrémité fixe du ressort.

*N.B.* : faire le découpage sur 2 feuilles de papier pour avoir un plus fort grammage, et donc davantage de précision sur la mesure.

### 3.3 Conservation de l'énergie

Pour cette étude qui va demander davantage de points de mesure, on exploite les données obtenues en préparation, en refaisant si c'est vraiment nécessaire une mesure de longueur devant le jury.

L'énergie cinétique s'exprime

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} \quad (3.1)$$

On y accède expérimentalement connaissant  $C$  par la loi des aires (on a moyenné sur 7 mesures en préparation), et mesurant  $r$  pour différents instants. On déduit facilement de cette dernière mesure la longueur  $l$  du ressort.

La conservation de l'énergie mécanique permet de tracer  $E_c$  en fonction de  $\frac{1}{2}(l - l_0)^2$  (au prix d'une feuille de calcul Régressi pas très compliquée) (figure 4). Il s'agit d'une droite dont la pente donne la raideur du ressort :

$$E_c = E_m - K \frac{1}{2}(l - l_0)^2 \quad (3.2)$$

On obtient

$$K = \quad \pm \quad \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

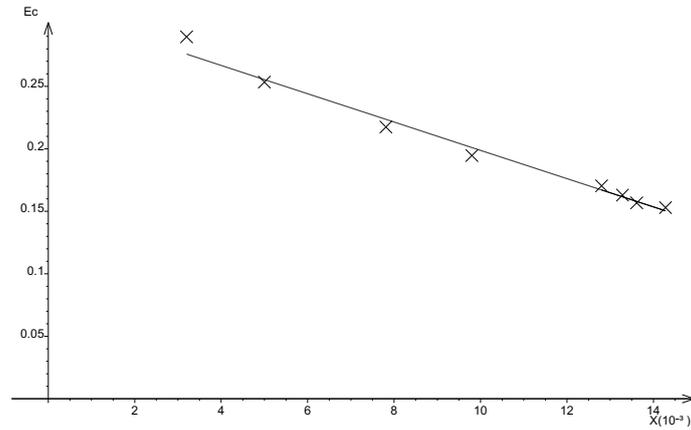


FIGURE 4 –  $E_c$  en fonction de  $\frac{1}{2}(l - l_0)^2$ . Les barres d'erreur n'ont pas été représentées car l'incertitude est ici dominée par les 15% dus à la table.

## 4 Pendule pesant

### 4.1 Moment d'inertie

On étudie un solide en mouvement autour d'un axe fixe horizontal : c'est le théorème du moment cinétique qui va donner le mouvement du solide.

On utilise le dispositif "pendule grand angle". Il faut commencer par étalonner la mesure d'angle en faisant correspondre la tension délivrée par le capteur à l'angle du pendule. Attention : le réglage de l'offset est crucial pour l'étude énergétique qui suit.

On commence par faire remarquer que la tige (prise seule) est équilibrée, puis on fixe une masse  $M$  à l'une des ses extrémités.

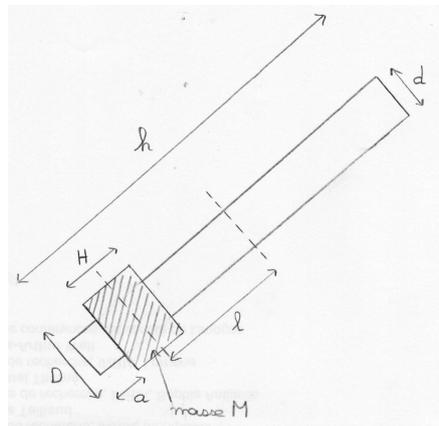


FIGURE 5

$$\rho_{Al} = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$h = 52,3 \text{ cm}$$

$$d = 1,0 \text{ cm}$$

$$a = 2,0 \text{ cm}$$

$$M = 148 \text{ g}$$

$$H = 3,0 \text{ cm}$$

$$D = 3,0 \text{ cm}$$

$$l = \frac{h - H}{2} - a$$

Le théorème du moment cinétique impose

$$I\ddot{\theta} + Mgl \sin \theta = 0$$

d'où une fréquence propre

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mgl}{I}}$$

Ceci est valable dans la limite des petits angles : la première correction est donnée par  $f = f_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{16}\right)$ , donc l'approximation des petits angles est valable à moins de 1% tant que  $\theta \leq 20^\circ$ .

On réalise une acquisition sur Synchronie, puis une analyse spectrale : on observe la convolution d'une lorentzienne (T.F. de l'exponentielle décroissante due aux frottements) et d'un Dirac de fréquence centrale

$$f_0 = (\quad \pm \quad) \text{mHz}$$

(l'incertitude est fixée par la résolution spectrale), donc

$$I = (\quad \pm \quad) 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

On peut comparer avec l'ordre de grandeur suivant, obtenu en considérant que la tige et la masse sont des cylindres pleins (cf. Pérez pour le tableau donnant les moments d'inertie) :

$$I = \left(\frac{1}{16}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2\right) + Ml^2 + \left(\frac{1}{16}md^2 + \frac{1}{12}mh^2\right)$$

où  $m = \rho_{\text{Al}}\pi h \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 111 \text{g}$ , soit

$$I = 1,02 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

## 4.2 Energie

Toujours sur Synchronie, on trace l'évolution au cours du temps de l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mgl(1 - \cos\theta)$$

On met ainsi en évidence les conversions d'énergie entre les formes cinétique et potentielle. Cependant, il y a clairement dissipation : on peut fitter la courbe par une exponentielle décroissante (modèle de type frottement fluide, en réalité il y a également ici du frottement solide sur le point d'attache).

Bizarrement, Synchronie fitte beaucoup mieux la courbe lorsqu'on lui entre une expression du type  $E_m = E_0 e^{-t/\tau} - E_1 t$ , et qu'on le laisse se rendre compte tout seul que  $E_1 = 0...$

## Conclusion

Dans ce montage, on a donc illustré l'utilisation des concepts de quantité de mouvement, de moment cinétique et d'énergie. Ces notions trouvent une multitude d'applications, tant pour le mouvement des planètes (qui vérifie en première approximation la loi des aires) que pour les machines tournantes industrielles par exemple.