

# MP01 – DYNAMIQUE DU POINT ET DU SOLIDE

4 janvier 2017

*Je sais calculer le mouvement des corps pesants, mais pas  
la folie des foules.*

Thibaut Clarté & Hélène Piot-Durand

ISAAC NEWTON

## Commentaires du jury

## Bibliographie

♣ *Dictionnaire de physique expérimentale tome1 :Mécanique*, → Source d'idées d'expériences intéressantes

**Quaranta**

♣ *Expériences de physique au Capes, Bréal, Duffait* → Viscosimètre, pendule pesant, mobiles auto-porteurs

♣ *Physique expérimentale aux concours de l'enseignement, Dunod*, → Coefficient de restitution

**Duffait**

♣ *Physique expérimentale, Deboeck, Fruchart, Lidon et co* → Viscosimètre

## Expériences

♣ Pendule pesant

♣ Mobiles autoporteurs (conservation quantité de mouvement et mouvement à force centrale)

♣ Coefficient de restitution d'une balle de ping-pong

♣ Viscosimètre à bille

## Table des matières

<b>1 Principe fondamental de la dynamique</b>	<b>2</b>
1.1 Conservation de la quantité de mouvement pour un système pseudo-isolé . . . . .	2
1.2 Viscosimètre à bille . . . . .	3
1.3 Coefficient de restitution d'une balle de ping-pong . . . . .	4
<b>2 Théorème du moment cinétique</b>	<b>4</b>
2.1 Pendule pesant . . . . .	4
2.2 Conservation du moment cinétique . . . . .	5

## Introduction

La dynamique est la partie de la mécanique qui s'intéresse aux actions mécaniques des forces sur les corps matériels. Dans le cadre classique cette discipline repose sur des principes, telle la fameuse seconde loi de Newton, et des modèles d'interaction.

On se proposera au cours de ce montage de présenter quelques expériences permettant de mettre en évidence tant la validité des lois que celle des modèles décrivant les interactions. En effet, on peut déduire des principes fondamentaux la conservation d'un certain nombre de quantités, tandis qu'il peut être possible d'accéder expérimentalement aux caractéristiques des forces exercées (composantes et dépendances).

## 1 Principe fondamental de la dynamique

### 1.1 Conservation de la quantité de mouvement pour un système pseudo-isolé

Une application du principe fondamental de la dynamique est la conservation de l'impulsion pour un système dont la somme des forces est nulle (système pseudo-isolé). On s'intéresse à un choc élastique entre deux mobiles autoporteurs sur une table horizontale, ce qui permet de négliger les frottements.

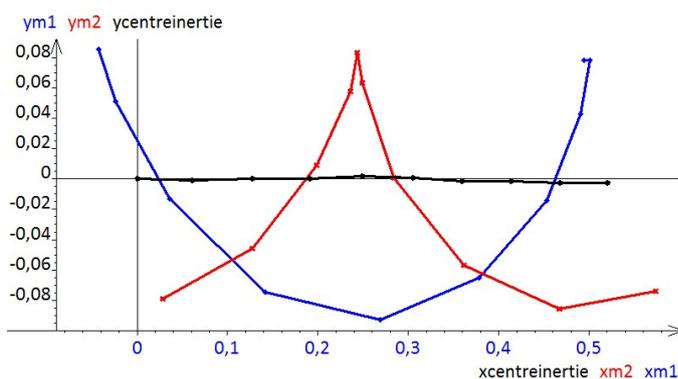
Tout d'abord, on cherche à valider le théorème du centre d'inertie selon lequel le centre d'inertie d'un système pseudo-isolé a un mouvement rectiligne uniforme. On va donc considérer un solide doté d'un mouvement quelconque et on va déterminer le mouvement de son centre d'inertie.

#### Mouvement du centre d'inertie d'un solide

🔧 Duffait

⌚ 6 min

Fixer les deux mobiles l'un avec l'autre (pour cela utiliser des élastiques afin de fixer solidement la barre métallique à chaque mobile. Mesurer la masse de l'ensemble ( $M = 1.306$  kg). On place une webcam au-dessus de la table, en essayant de diminuer la parallaxe le plus possible. Ensuite, lancer le système des deux mobiles en lui imposant un mouvement de rotation. On traite la vidéo obtenue dans Edition -> Analyse de séquence vidéo, ce qui permet de récupérer les coordonnées du centre d'inertie. On peut ensuite exporter les points dans Regressi en enregistrant les données en format texte. Il est important de vérifier que la table est bien horizontale, pour cela il suffit de s'assurer qu'un mobile posé sans vitesse initiale sur la table ne bouge pas.



On obtient la figure ci-contre, qui permet bien de constater que le centre d'inertie a un mouvement rectiligne uniforme (si le système est pseudo-isolé, et on peut déduire l'impact des frottements grâce à la diminution de l'énergie) alors que les deux autres points de notre système solide décrivent des cycloïdes.

Le centre d'inertie correspond au point de la barre équidistant des deux mobiles, ce qui suppose que les deux mobiles ont la même masse.

En pratique, elle diffère d'environ 0.3g. Cela implique une erreur sur la position du centre d'inertie, mais elle est négligeable face à l'incertitude liée au traitement des données. Ces incertitudes sont issues de la parallaxe, de la taille d'un pixel et de la détection du centre de chaque mobile avec Latis Pro, cette dernière étant la plus importante. L'incertitude est estimée à  $\pm 3$ mm pour chaque position.

#### Choc élastique

🔧 Duffait p215

⌚ 7 min

Lester un des deux mobiles et placer une bague élastique sur chaque mobile. Peser chaque mobile :  $M1 = 1060$  g,

M2 = 696 g. Essayer d'obtenir la collision vers le centre de la feuille, sans qu'elle ne soit trop violente.

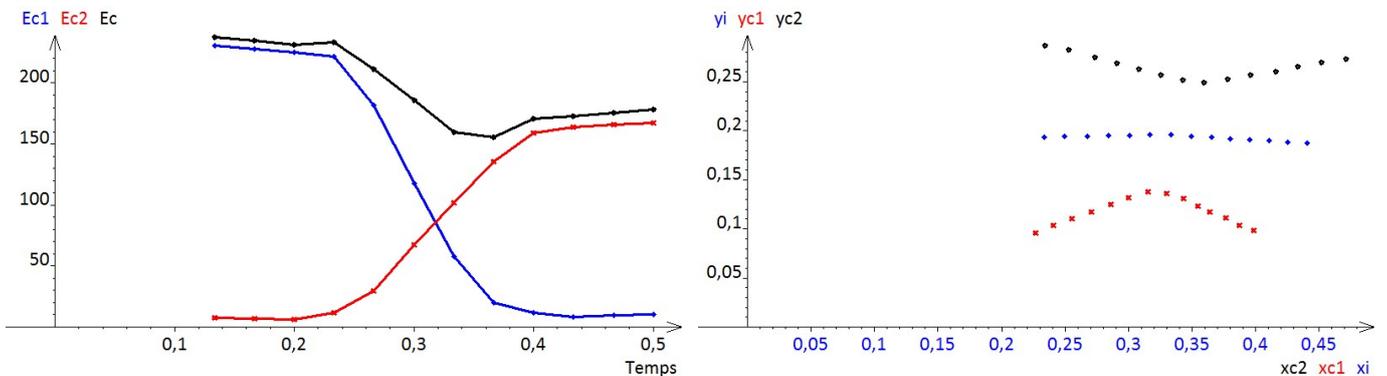
Si le système est bien isolé, la quantité de mouvement du centre d'inertie du système,  $\vec{P}_I$ , est encore une fois bien conservée :  $\vec{P}_I = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$ .

Pour le vérifier, on trace la trajectoire du centre d'inertie :  $x_I = \frac{M_1}{M_1+M_2}x_1 + \frac{M_2}{M_1+M_2}x_2$  et  $y_I = \frac{M_1}{M_1+M_2}y_1 + \frac{M_2}{M_1+M_2}y_2$   
Les courbes  $x_i(t)$  et  $y_i(t)$  doivent être des droites affines.

### Étude énergétique

Si le système est bien pseudo-isolé, on doit observer une conservation de l'énergie cinétique totale (qui correspond ici à l'énergie mécanique totale) et un échange d'énergie cinétique entre les deux mobiles, en supposant l'énergie cinétique de rotation négligeable.

On observe effectivement un échange d'énergie entre les deux mobiles, mais l'énergie cinétique totale n'est pas constante au cours du temps : elle décroît linéairement. La perte globale d'énergie provient des frottements sur le papier et la perte locale de l'énergie perdue lors de la collision. Cette perte est due à un transfert d'énergie cinétique en énergie potentielle élastique lors du contact entre les bagues élastiques, qui n'est ensuite que partiellement restituée (plus le choc est proche d'un choc élastique, plus cette restitution est efficace). On peut estimer la perte d'énergie liée aux frottements comme  $\frac{E_{ci} - E_{cf}}{E_{ci}}$ , ce qui donne souvent un résultat assez élevé à la limite de l'hypothèse d'un système pseudo isolé...



## 1.2 Viscosimètre à bille

Illustration du second principe fondamental de la dynamique et validation de la formule de la force de Stokes.

On commence par estimer le nombre de Reynolds afin de prouver qu'on se situe dans le domaine d'application de la force de Stokes, c'est-à-dire le régime laminaire. Ensuite, on estime la longueur d'établissement de la vitesse limite (de l'ordre du centimètre) et on explique que pour se placer dans le régime permanent, il suffit de laisser la bille parcourir quelques centimètres avant de lancer le chronomètre. Expliquer qu'on peut négliger les effets de bord en prenant une bille de petit diamètre (1 mm) et en la lâchant au centre du tube ; et les effets de fond en arrêtant le chronomètre avant que la bille n'atteigne le fond du tube.

### Détermination de la vitesse limite

➤ Duffait p 249, Physique expérimentale Lidon et co © 6 min  
p432

Effectuer plusieurs lâchers de bille (diamètre 1 mm, avec une incertitude de  $12.5 \mu\text{m}$  d'après le fabricant) au centre du tube et mesurer le temps de chute entre deux points fixes du tube. On a  $\eta = 1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\rho_{\text{liquide}} = 967 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Force de Stokes :  $F = -6\pi\eta Rv$  où R est le rayon de la bille, v sa vitesse et  $\eta$  la viscosité de l'huile.

La vitesse limite est atteinte quand la force de frottement est égale au poids apparent de la bille dans le liquide :

$$6\pi\eta Rv = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho - \rho_{\text{liquide}}) \text{ soit } v_{\text{lim}} = \frac{2R^2 g(\rho - \rho_{\text{liquide}})}{9\eta} = 3.5 + / - 0.3 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$$

Expérimentalement, on trouve  $v_{\text{lim}} = 3.6 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1} + / - 0.1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Les incertitudes théoriques concernent la masse volumique des billes (la masse volumique des billes d'acier a été mesurée en préparation sur une moyenne de 65 billes et est égale à  $7830 \text{ kg.m}^{-3}$  avec une incertitude de 1 %), le diamètre des billes et la viscosité du fluide (sensible à la température). Les incertitudes expérimentales sont de 4 mm pour 32.4 cm en distance parcourue et de 2 secondes pour 90 secondes de temps de trajet. On utilise la formule de propagation des incertitudes et on obtient une incertitude relative de 3 % sur la vitesse limite, soit  $0.1 \text{ mm.s}^{-1}$ .

### 1.3 Coefficient de restitution d'une balle de ping-pong

Le coefficient de restitution, noté ici  $e$ , aussi appelé coefficient de Newton, est défini comme le rapport entre les vitesses relatives avant et après l'impact lors d'une collision. Il permet de qualifier l'élasticité du choc : plus  $e$  est proche de 1, plus le choc est élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie.

Si on néglige toute forme de frottement, l'énergie mécanique entre deux impacts se conserve :

$$E_{m1} = mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$E_{m2} = mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\text{soit } \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{h_2}{h_1} = e^2 \text{ et donc } e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

En effet, à l'apogée du rebond de la balle, on peut assimiler l'énergie mécanique à l'énergie potentielle puisque la vitesse est nulle. C'est pourquoi on va s'intéresser au rapport des hauteurs de rebond.



#### Détermination du coefficient de restitution

📌 Dunod p 325

⌚ 6 min

Filmer la chute d'une balle de ping-pong, initialement tenue par une pince afin que le lâché soit effectué presque sans vitesse initiale. Latis Pro permet ensuite de suivre la hauteur de la balle au cours du temps.

On obtient plusieurs rebonds, ce qui permet de faire une étude statistique sur la valeur du coefficient de restitution :  $e = 0.82$  avec un écart type de 0.05 et donc une incertitude de 6 %. Les incertitudes expérimentales proviennent surtout du nombre d'images par seconde acquises par la caméra et du pointage du centre de la balle sous Latis Pro.

On vérifie que les frottements avec l'air peuvent être négligés en déterminant la vitesse de la balle et en montrant qu'elle peut être modélisée par une droite affine. En effet, sans frottements  $V_b = gt + V_{b0}$  avec  $V_b = \sqrt{2gh}$ . Au passage, si la vitesse initiale est bien nulle, on obtient une modélisation linéaire, ce qui permet de tester deux hypothèses d'un coup.

## 2 Théorème du moment cinétique

### 2.1 Pendule pesant

On cherche à mesurer le moment d'inertie d'un pendule pesant (constitué d'une tige et d'une masse de hauteur réglable) à l'aide du théorème du moment cinétique. On travaille à petits angles afin d'assurer l'isochronisme du système (la fréquence des oscillations ne dépend pas de l'amplitude)



#### Pendule grand angle

📌 Duffait p 264

⌚ 7 min

Mettre sous tension quelques minutes avant utilisation puis faire le zéro. On commence par étalonner le capteur afin de montrer qu'il est linéaire (on n'a pas besoin du coefficient de proportionnalité entre l'angle et la tension). Pour limiter l'erreur due à la lecture très approximative de l'angle, on réalise cet étalonnage pour les angles positifs et négatifs, en restant dans des petits angles ( $< 30$  degrés). On mesure alors avec Latis Pro la fréquence d'oscillation du pendule pour une masse placée à différentes longueurs.

### Mesure du moment d'inertie

En notant  $I$  le moment d'inertie et  $M$  la somme des masses, on obtient grâce au théorème du moment cinétique et dans l'approximation des petits angles :

$$I\ddot{\theta} + Mgl\theta = 0$$

On obtient la fréquence des oscillations  $f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mgl}{I}}$ . et donc  $I = \frac{Mgl}{4\pi^2 f_o^2}$

Or, d'après le théorème de Huygens,  $I = I_{tige} + Ml^2$  et  $I_{tige,théo}$  est connu grâce à la notice (il vaut  $0.002844 \text{ kg.m}^2$ ). On peut donc le retrouver en faisant une régression linéaire après avoir déterminé le moment d'inertie du pendule pour différentes longueurs entre le centre et la masse. Cela permet d'obtenir  $I_{tige,exp} = 0,00503 \text{ kg.m}^2$  (ordonnée à l'origine) avec une incertitude de  $0.0012 \text{ kg.m}^2$ .

L'incertitude relative sur  $I$  est obtenue grâce à la formule de propagation des incertitudes :  $\frac{\sigma_I}{I} = \sqrt{4\left(\frac{\sigma_{f_o}}{f_o}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$ . L'incertitude sur la fréquence est de l'ordre de  $0.01 \text{ Hz}$  et on considère les deux autres comme négligeables (notice). On obtient donc  $\frac{\sigma_I}{I} = 0.0012 \text{ kg.m}^2$ . On peut aussi utiliser Regressi pour obtenir ces incertitudes.

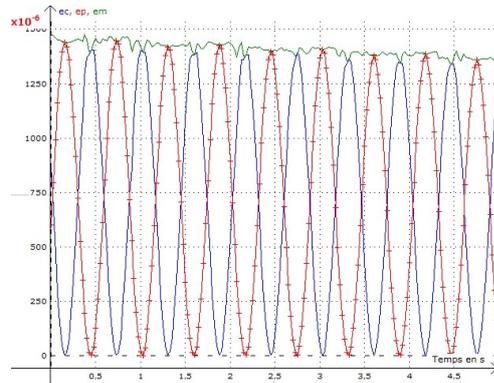
On vérifie que l'approximation des petits angles est valide en montrant que le portrait de phase de la dérivée d'une des courbes forme une ellipse (donc le système est un oscillateur harmonique pour les petits angles). On peut aussi vérifier que la période ne dépend pas de l'angle (pendule isochrone).

### Étude énergétique

On trace  $E_m$  en fonction du temps pour l'une des courbes.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mgl(1 - \cos(\theta))$$

On observe les conversions entre les énergies cinétiques et potentielles au cours du temps. Cette étude permet aussi de montrer la dissipation d'énergie due aux frottements (axe de rotation et air) car l'énergie mécanique décroît au cours du temps. Il y a compétition entre frottement fluides et solides.



**On peut souvent constater que la courbe de  $E_m$  présente des "bosses", qui sont dues aux erreurs de mesures commises sur la masse et la longueur mais surtout sur  $I$ ; si on joue légèrement sur le paramètre  $I$  dans la formule de l'énergie mécanique on obtient facilement une belle exponentielle.**

## 2.2 Conservation du moment cinétique

Illustration de la conservation du moment cinétique pour un système soumis uniquement à une force centrale.

### Mouvement à force centrale

↗ Duffait p XX

⊖ 7 min

On revient sur les mobiles autoporteurs. Les deux mobiles sont reliés par un ressort (attaché au centre du mobile et pas sur les côtés) qui doit être à spires non jointives. L'un des deux doit être fixe sur le support, il ne faut donc pas l'allumer voire appuyer dessus pour s'assurer qu'il ne bougera pas : il s'agit du centre de force centrale imposée par le ressort. On lance l'autre mobile autour de ce dernier (ne pas le lancer trop rapidement, veiller à ce que le ressort soit tendu pour toute la durée du mouvement - ce qu'on peut aisément vérifier en calculant sa longueur à chaque instant  $t$  - et que le mobile ne tourne pas sur lui-même). Il faut s'entraîner un peu.

On calcule le moment cinétique du système pour montrer qu'il s'agit d'une constante :  $\|\sigma\| = \|\vec{r} \wedge \vec{v}m\| = C$ .

Pour cela, on utilise la méthode de la loi des aires : lors d'un mouvement à force centrale, des aires égales sont balayées par le rayon vecteur  $\vec{r}$  dans des temps égaux.

Autrement dit,  $\dot{A} = \text{constante}$ . Or, l'aire d'un triangle s'exprime par  $A = \frac{\|\vec{r} \wedge \vec{v}dt\|}{2}$  donc on obtient  $\dot{A} = \frac{C}{2m}$ , ce qui permet d'obtenir C.

Expérimentalement, on obtient  $C = 0,079 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Les erreurs sur la position des centres de masse proviennent de la parallaxe et de l'imprécision du pointage. On peut estimer globalement l'erreur commise à environ 3 mm sur chaque point, avec 66 ms entre chaque point.

L'incertitude sur la constante des aires est de  $0.008 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$ .

Afin de vérifier si notre constante est acceptable, on effectue une étude énergétique pour remonter à la constante de raideur du ressort utilisé. En effet, dans un repère polaire on obtient :

$$\begin{aligned} Ec &= \frac{1}{2}(m\dot{r})^2 + \frac{C^2}{mr^2} \\ Ep &= k\frac{(r-l_o)^2}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $Ec = -k\frac{(r-l_o)^2}{2} + Em$  où k est la constante de raideur du ressort et  $l_o$  sa longueur à vide.

On mesure  $l_o = 12.0 \text{ cm}$  (avec une incertitude de 0.2 cm).

On trace ensuite  $Ec$  en fonction de  $\frac{(r-l_o)^2}{2}$  et on obtient la constante de raideur k grâce à la pente.

On trouve  $k = 6.1 \text{ N.m}^{-1} \pm 0.5 \text{ N.m}^{-1}$ .

En étudiant l'allongement du ressort lorsqu'on lui suspend une masse connue, on peut déterminer facilement sa constante de raideur grâce au principe fondamental de la dynamique :  $k = 5.7 \text{ N.m}^{-1}$  avec un écart-type de  $0.3 \text{ N.m}^{-1}$ .

## Conclusion

Ainsi, au cours de ce montage a-t-on pu mettre en évidence deux principes fondamentaux, à savoir la seconde loi de Newton et le théorème du moment cinétique. On a également pu retrouver la force de Stokes et caractériser complètement la force de rappel du ressort dans le cadre d'un mouvement à force centrale.

On aurait aussi pu développer plus en détail la dynamique d'un solide spécifique comme le gyroscope (si le cœur vous en dit...).