

MP03: Dynamique des Fluides

A. de Montaigne et O. Chamelat (binôme 2)

16 mars 2010

Références

- [1] P. Charmont, *Montages de Physique*, Dunod : bouquin pratique pour les montages où il y a peu de biblio, mais attention aux erreurs, c'est un copier-coller des fiches de révision de l'auteur.
- [2] Guyon, Hulin et Petit, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences
- [3] *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 89th edition.
- [4] BUP 872, sujet et corrigé épreuve A de 2004 : hypothèses de l'écoulement de poiseuille

Rapports

2009 : Les candidats pensent à évaluer le nombre de Reynolds, mais les conclusions qu'ils en tirent sont souvent incomplètes ou erronées

2005 : Il serait bon que les candidats recherchent dans un handbook la valeur de la viscosité du corps étudié et sa dépendance en fonction de la température

2004 : L'utilisation d'un appareil dédié à l'étude de la loi de Poiseuille doit être menée avec discernement, avec le contrôle précis des conditions de validité (cf [4])

Table des matières

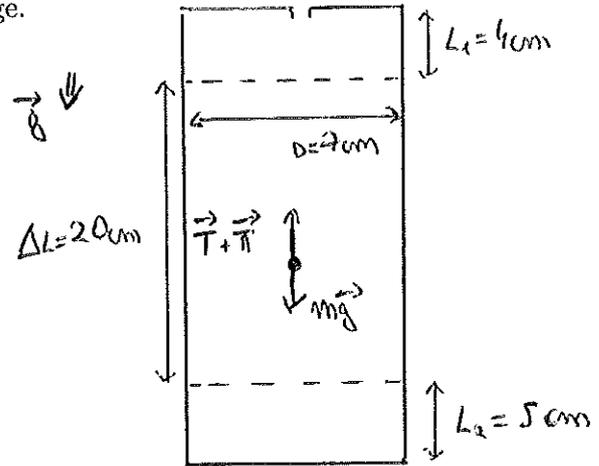
1	Viscosimètre à bille ($Re \ll 1$)	2
1.1	Dispositif	2
1.2	Hypothèses	2
1.3	Résultats	2
1.4	Validation des hypothèses	3
2	Écoulement de Poiseuille ($Re \leq 10^3$)	4
2.1	Dispositif	4
2.2	Hypothèses	4
2.3	Résultats	4
2.4	Validation des hypothèses	5
3	Écoulements à grand Reynolds ($Re \sim 10^5$)	5
3.1	Force de Trainée	5
3.2	Tube de Pitot	6

Introduction

La dynamique des écoulements fluides est complexe à cause des nombreux mécanismes physiques qui la gouverne (convection, viscosité, diffusion thermique,...). C'est pourquoi, on se restreint souvent à des situations où un seul mécanisme domine. Dans ce montage, nous étudierons uniquement des écoulements *incompressibles* où seule la convection et la viscosité sont considérées. C'est pourquoi le nombre de Reynolds Re , qui évalue leur importance relative sera notre fil rouge.

1 Viscosimètre à bille ($Re \ll 1$)

1.1 Dispositif



Attention à bien peser les billes et mesurer leurs diamètres car les valeurs données sont indicatives !

1.2 Hypothèses

Le PFD appliquée à la bille donne :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{P} + \vec{T} \quad \text{où} \quad \vec{T} = -6\pi\eta R\vec{v} \quad (1)$$

on suppose que la force de trainée \vec{T} exercée par le fluide sur la bille est donnée par la *loi de Stokes* et \vec{P} est la poussée d'Archimède¹.

Ainsi en régime stationnaire (i.e. $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$), la vitesse limite de la bille est :

$$v_l = \frac{2(\rho_s - \rho_f)gR^2}{9\eta} \quad (2)$$

Au final, on peut déterminer la viscosité du fluide en mesurant le temps de chute Δt de la bille sur la longueur ΔL :

$$\eta = \frac{2gR^2 \left(\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} - \rho_f \right)}{9 \frac{\Delta L}{\Delta t}} \quad (3)$$

1.3 Résultats

On prend les billes de plus petit diamètres car, comme on le verra dans la prochaine partie, c'est celles qui respectent le mieux nos hypothèses. Pour $R = 0,5mm$ et $m = 4,2 \pm 0,2mg$, (plus grosse source d'incertitude) on mesure $\Delta t = 60s$, d'où une viscosité de :

$$\eta = 1,1Pa.s \pm 0,1 \quad (4)$$

On peut améliorer la précision des mesures en les répétant, on divise l'incertitude par la racine du nombre

¹la résultante des forces de pression n'est rigoureusement égal au poids de fluide déplacé uniquement à l'équilibre, mais pour de faibles vitesses, ceci reste valable(cf [4])

Viscosity of Aqueous Glycerine Solutions in Centipoises/mPa s											
Glycerine percent weight	Temperature (°C)										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0 ⁴⁾	1.792	1.398	1.005	0.8007	0.6590	0.5494	0.4688	0.4061	0.3565	0.3165	0.2833
10	2.44	1.74	1.31	1.03	0.826	0.680	0.575	0.500	-	-	-
20	3.44	2.41	1.76	1.35	1.07	0.879	0.731	0.635	-	-	-
30	5.14	3.49	2.50	1.87	1.46	1.16	0.956	0.816	0.690	-	-
40	8.25	5.37	3.72	2.72	2.07	1.62	1.30	1.09	0.918	0.763	0.668
50	14.6	9.01	6.00	4.21	3.10	2.37	1.86	1.53	1.25	1.05	0.910
60	29.9	17.4	10.8	7.19	5.08	3.76	2.85	2.29	1.84	1.52	1.28
66	45.7	25.3	15.2	9.85	6.80	4.89	3.66	2.91	2.28	1.88	1.55
67	55.5	29.8	17.7	11.3	7.73	5.59	4.09	3.23	2.50	2.03	1.68
70	76	38.8	22.5	14.1	9.40	6.61	4.86	3.78	2.99	2.34	1.93
75	132	65.2	35.5	21.2	13.6	9.25	6.61	5.01	3.80	3.00	2.43
80	255	116	60.1	33.9	20.8	13.6	8.42	6.94	5.13	4.03	3.18
85	540	223	109	58	33.5	21.2	14.2	10.0	7.28	5.52	4.24
90	1310	498	219	109	60.0	35.5	22.5	15.5	11.0	7.93	6.00
91	1500	592	250	127	68.1	39.8	25.1	17.1	11.9	8.62	6.40
92	1950	729	310	147	78.3	44.8	28.0	19.0	13.1	9.46	6.82
93	2400	860	367	172	89	51.5	31.6	21.3	14.4	10.3	7.54
94	2930	1040	437	202	105	58.4	35.4	23.6	15.8	11.2	8.19
96	3900	1270	523	237	121	67.0	39.9	26.4	17.5	12.4	9.08
96	4600	1580	634	291	142	77.8	45.4	29.7	19.6	13.6	10.1
97	5770	1950	785	340	166	88.9	51.9	33.6	21.9	15.1	10.9
98	7370	2450	989	409	196	104	59.8	38.5	24.8	17.0	12.2
99	9420	3090	1150	500	235	122	69.1	43.6	27.8	19.0	13.3
100	12070	3800	1410	612	284	142	81.3	50.6	31.9	21.3	14.8

⁴Viscosity of water taken from "Properties of Ordinary Water Substance" N.E. Doney, p. 154, New York (1916)

FIG. 1: valeurs tabulées trouvées sur internet, on a les mêmes dans [3, p 8-57] (ne pas chercher à glycérol mais à solution aqueuses!) mais on a pas ce tableau à double entrée qui résume bien les choses

de mesures.

La comparaison aux valeurs tabulées est galère car la viscosité du glycérol dépend *fortement* de la température² et de sa teneur en eau (cf tableau), or il est totalement miscible à l'eau et donc s'hydrate facilement à l'air. En supposant une température de la pièce de 20°C, la viscosité mesurée correspond à un glycerol pur à 98,5%.

1.4 Validation des hypothèses

Petit Reynolds : la loi de stokes peut être démontrée [2, partie 8.4] pour $Re \ll 1$ mais reste valable jusqu'à $Re \sim 1$.

$$Re = \frac{\rho_f v R}{\eta} \sim 1,5 * 10^{-3} \ll 1 \quad \text{avec} \quad v \sim \frac{\Delta L}{\Delta t} = 3 * 10^{-3} m.s^{-1} \quad (5)$$

Régime stationnaire : La durée du régime transitoire est de l'ordre de

$$\tau = \frac{2\rho_s R^2}{9\eta} \sim 4 * 10^{-3} s \quad \text{d'où une distance de} \quad L_\tau \sim 10^{-5} m \ll L_1 \quad (6)$$

Pour vérifier expérimentalement $L_\tau \ll L_1$, on mesure les temps de chute tout les 5cm et vérifier qu'ils sont identiques³.

effets de bords [2, p468] : La loi de Stokes est valable pour un milieu *infini*, donc il faut vérifier que les effets de bords sont négligeables ici.

²la viscosité des liquides "simples" chute avec la température car on peut la modéliser par une loi d'activation type loi d'Arrhénius, cf [2, p97]

³on scotche un papier millimétré sur le viscosimètre pour avoir une graduation

Pour un obstacle perpendiculaire (i.e. le fond du tube), un terme correctif apparait dans l'expression de la force de traînée

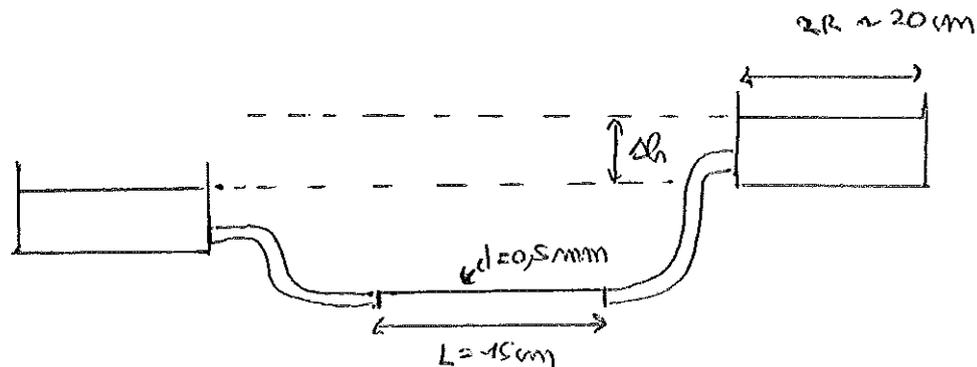
$$\vec{T} = -6\pi\eta R\left(1 + \frac{R}{h}\right)\vec{v} \quad (7)$$

ou h est la distance sphere/paroi. Or $\frac{R}{L_2} \sim 10^{-2} \ll 1$, donc cet effet est négligeable ici.

Pour un obstacle parallèle, la perturbation est plus grande. Par exemple, l'erreur est de 20% pour un cylindre dix fois plus large que la bille. Or on n'est pas loin de ca, car $\frac{2R}{D} \sim 1,4 * 10^{-2}$ avec les plus petites billes. Difficile de quantifier cet effet proprement, tout ce qu'on peut dire est qu'il entraine une *surrestimation* de la viscosité. On n'a pas eu le temps de le faire mais il faudrait vérifier si la viscosité augmente bien avec le diamètre des billes. Si oui, alors on cet effet n'est pas négligeable ici.

2 Ecoulement de Poiseuille ($Re \leq 10^3$)

2.1 Dispositif



2.2 Hypothèses

En régime permanent l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible soumis à un gradient de pression ΔP dans un tube cylindrique de diamètre d et de longueur L obéit à la loi de Poiseuille :

$$Q_v = \frac{\pi \Delta P d^4}{128 \eta L} \quad (8)$$

où Q_v est le débit volumique.

Comme le diamètre du tube capillaire est 10 fois plus petit que celui des autres tubes, on suppose que c'est lui seul qui impose le débit. De plus, on suppose qu'en dehors de ce tube, le *champs de pression est hydrostatique* (i.e. $\Delta P = \rho g \Delta h$).

2.3 Résultats

On a choisit ici de mesurer le débit massique Q_m à l'aide d'une balance pour différents gradients de pression ΔP , imposés en modulant la hauteur Δh entre les surfaces libres des 2 réservoirs.

D'après nos hypothèses,

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho Q_v = \frac{\pi \rho^2 g d^4}{128 \eta L} \Delta h = 1.00 * 10^{-4} * \Delta h \quad \text{kg.s}^{-1} \quad (9)$$

données numériques : $\rho = 10^3 \text{kg.m}^{-3}$, $\eta = 10^{-3} \text{Pa.s}$ à $\theta = 20^\circ \text{C}$, $L = 15 \text{cm}$, $d = 0,5 \text{mm}$, $D = 20 \text{cm}$.
on effectue une quinzaine de mesures de Q_m pour des Δh allant de 5cm à 40cm, et on trace $Q_m = f(\Delta h)$.
La modélisation par une loi affine⁴ est en bon accord avec les mesures :

$$Q_m = a * \Delta h + Q_0 \quad Q_0 = 1.0 * 10^{-6} \text{kg.s}^{-1} \quad a = (1.01 \pm 0.06) * 10^{-4} \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1} \quad (10)$$

⁴comme l'on très justement fait remarquer les correcteurs, il faut utiliser une loi *linéaire* ici car pas d'offset, quand $\Delta P = 0$, on a bien $Q_m = 0$.

2.4 Validation des hypothèses

stationnaire : On observe bien un débit constant en réalisant plusieurs mesures de débit.

Δh constant : l'écoulement est incompressible, donc $\delta m = \rho \frac{\pi D^2}{4} \delta h$. Ainsi pour $\delta h < 1mm$, on doit avoir $\delta m < 10^3 * 0.03 * 10^{-3} = 30g$. On a mesuré des variations de masse de l'ordre du gramme, donc pas de problème.

écoulement laminaire $Re \leq 10^3$: ici le terme convectif est nul par géométrie donc Re ne correspond plus vraiment à la comparaison convection/diffusion. Cependant l'écoulement devient instable si des perturbations de taille finies (i.e. des zones de turbulence) apparaissent [2, p 596]. Expérimentalement, cela se produit pour $Re \sim 10^3$.

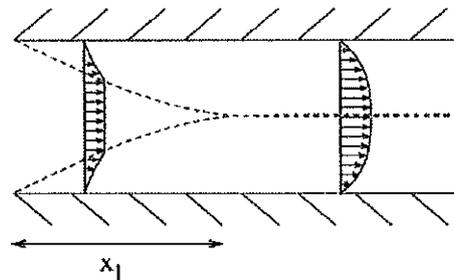
$$Q_m \sim \frac{1g}{30s} \sim 3 * 10^{-5} kg.s^{-1} \quad \text{d'où} \quad v \sim \frac{Q_m}{\pi \rho (\frac{d}{2})^2} \sim 0.1 m.s^{-1} \quad \text{et enfin} \quad Re = \frac{\rho v \frac{d}{2}}{\eta} \sim 25 \quad (11)$$

On a donc bien un écoulement stable.

Etablissement du profil [4, question B3] : Le profil de vitesse parabolique ne s'établit pas dès l'entrée du tube, il faut d'abord que les couches limites dues à la diffusion visqueuse se rejoignent. Le temps caractéristique de diffusion sur une longueur $\frac{d}{2}$ est $t_d \sim \frac{(\frac{d}{2})^2}{\nu}$, soit une distance parcourue le long du tube

$$x_l \sim v * t_d \sim \frac{v (\frac{d}{2})^2}{\nu} \sim 6mm \ll L = 15cm \quad (12)$$

où $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ est la viscosité cinématique (coef de diffusion visqueuse).
 $x_l \ll L$, donc pas de problème pour ce tube⁵.



3 Ecoulements à grand Reynolds ($Re \sim 10^5$)

3.1 Force de Trainée

L'objectif ici est de montrer que pour une certaine gamme de nombre de Reynolds, la force de Trainée⁶ est proportionnelle au carré de la vitesse.

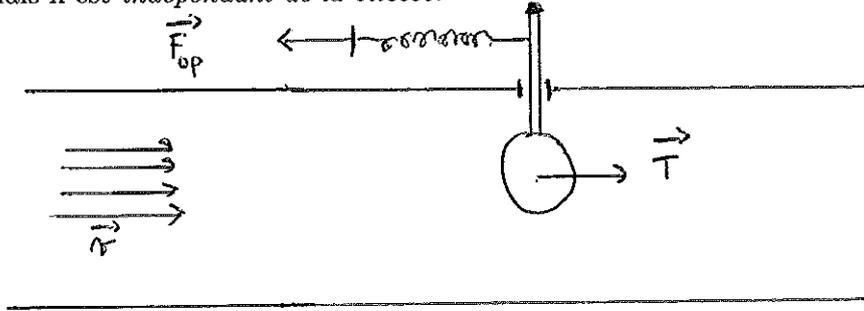
⁵c'est pour cela qu'on s'est limité au plus petit capillaire car pour $d = 1mm$, on a $x_l \sim 2.5cm$

⁶composante parallèle de la force exercé par un fluide en écoulement sur un obstacle fixe

Hypothèses : pour Re compris entre 10^3 et 10^5 environ, le module T de la trainée s'exprime

$$T = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2 \quad (13)$$

avec v la vitesse d'écoulement du fluide loin de l'obstacle, ρ la masse volumique du fluide, S la plus grande section perpendiculaire du fluide à l'écoulement et enfin C_x le facteur de forme. ce nombre dépend du profil de l'objet mais il est *indépendant de la vitesse*.



Résultats : On mesure la trainée à l'aide du dispositif mécanique⁷ intégré à la soufflerie, ainsi que la vitesse avec un anémomètre à fil chaud⁸. On trace ensuite la courbe $T = f(v^2)$, et on observe bien une droite. On évalue aussi Re pour vérifier que l'on est dans le bon domaine.

3.2 Tube de Pitot

Nous voulons ici vérifier le bon fonctionnement d'une sonde à effet pitot en utilisant une soufflerie et un anémomètre à fil chaud.

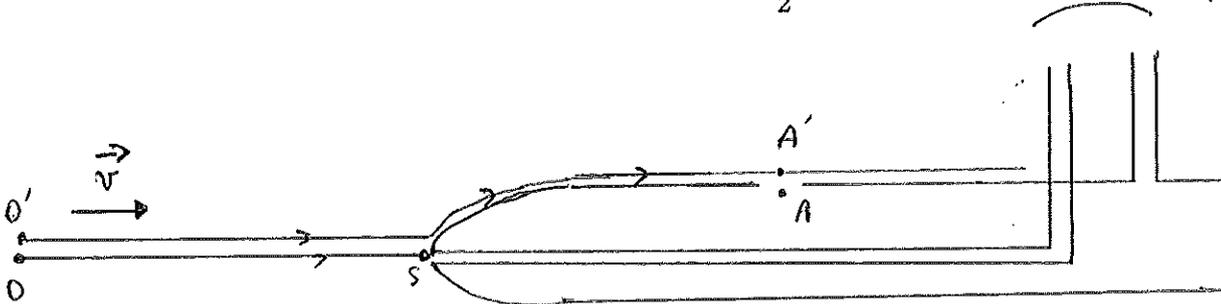
Hypothèses[2, p272] : Dans un écoulement homogène parfait permanent et incompressible, la quantité $P + \frac{1}{2}\rho v^2$ est constante le long d'une ligne de courant. Ainsi en considérant les 2 lignes de courants OS et $O'A'$, où S est considéré comme un point d'arrêt ($v_S = 0$) et $v_A = v$ parallèle à l'écoulement (donc $p_{A'} = p_A$), on a la relation

$$p_S = p_O + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{O'} + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{A'} + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (14)$$

d'où la relation

$$\Delta p = p_S - p_A = \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (15)$$

avec un manomètre différentiel



⁷en gros en ressort que l'on étire

⁸système asservi où l'on maintient à température constante un fil en faisant passer du courant. Lorsque le fluide est en mouvement, le fil perd plus d'énergie interne par convection, on peut donc relier le surplus de courant à faire passer à la vitesse d'écoulement.

Résultats : On mesure Δp en lisant les graduations⁹ du manomètre différentiel du tube et la vitesse v toujours avec l'anémomètre à fil chaud. On trace enfin la courbe $\Delta p = f(v^2)$ et on vérifie bien que le coefficient directeur correspond bien à $\frac{1}{2}\rho_{air}$ (pas eu le temps de le faire mais ça doit marcher sans problème).

Conclusion

La complexité des écoulements fluides oblige bien souvent à faire des hypothèses simplificatrices que l'on vérifie a posteriori, la plupart du temps grâce à des comparaisons d'ordre de grandeur. C'est cette démarche que nous avons tenté d'illustrer dans ce montage, en mettant l'accent sur le nombre de Reynolds.

⁹attention, c'est gradué en millimètre d'eau ($\rho_{eau}gh$) mais le liquide est de l'alcool qui a une tension de surface plus faible et donc moins d'effets capillaires dans le tube.