

Victor et Chloé

Bibliographie : [1] Guyon, *Hydrodynamique Physique*, [2] Quaranta I *Mécanique*, [3] Handbook,

La dynamique des fluides newtoniens incompressibles est entièrement régie par l'équation de Navier Stokes dans laquelle intervient un nombre sans dimension, dépendant des caractéristiques de l'écoulement et du fluide considéré, le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho UL}{\eta}$. Comparant en général les effets inertiels aux effets de viscosité au sein du fluide, ce nombre permet de classer les écoulements en différentes catégories auxquelles correspondent des propriétés et une forme de champ des vitesses spécifiques.

Dans ce montage, nous nous proposons de balayer de larges gammes de Re afin de mettre en évidence ces particularités. Nous traiterons tout d'abord le cas des écoulements stationnaires de faible Reynolds, dominés par la viscosité : écoulements rampants autour d'un obstacle sphérique ($Re \ll 1$), puis écoulements parallèles et laminaires ($Re \approx 10^2 - 10^3$, type écoulements sanguins). Nous concluons ce montage en abordant le cas des écoulements de grand nombre de Reynolds ($Re \sim 10^4 - 10^5$) qui sont en général des écoulements turbulents en tout point de l'espace (applications en aérodynamique).

1 Écoulements rampants, $Re \ll 1$

Ces écoulements, dominés par la viscosité et intrinsèquement stationnaires, se rencontrent surtout à l'échelle des cellules, et permettent de comprendre la dynamique des micro-organismes. On les génère facilement en utilisant un fluide de grande viscosité cinématique, comme par exemple le glycérol.

1.1 Viscosimètre à bille et force de Stokes

[2] On étudie la chute de billes calibrées dans une éprouvette cylindrique remplie de glycérol (92% en masse annoncés), et l'écoulement relatif du fluide qui en résulte. Pour des vitesses de chute faibles, la résultante des forces de pression (poussée d'Archimède) correspond au poids de liquide déplacé, et la force de traînée est donnée par la formule de Stokes : $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la bille dans le référentiel du laboratoire donne donc, en régime permanent,

$$0 = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_{bille} - \rho_{liq})g - 6\pi\eta Rv_l$$

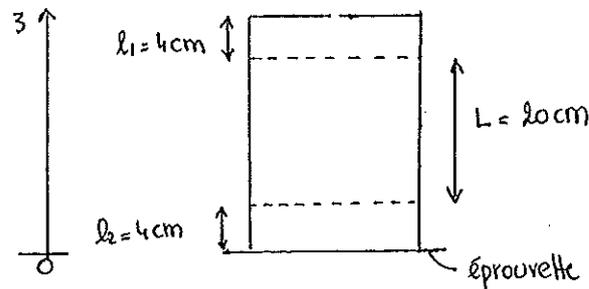
soit la vitesse limite atteinte en régime permanent

$$v_l = \frac{2}{9} \frac{\rho_{bille} - \rho_{liq}}{\eta} g R^2$$

La mesure de cette vitesse limite de chute permet donc de remonter à la valeur de la viscosité dynamique du mélange eau-glycérol, connaissant sa masse volumique ainsi que les caractéristiques des billes.

1.2 Réalisation de la mesure

[1][3] La vitesse limite est estimée en mesurant le temps nécessaire à une bille pour parcourir une distance $L = 20$ cm après une chute de 4 cm en sortie de l'orifice de l'éprouvette (cf. schéma ci-dessous). Nous supposons que le régime permanent est alors atteint, hypothèse qui sera vérifiée a posteriori.



La mesure est réalisée au chronomètre : $v_l = \frac{L}{\Delta t}$. L'estimation des incertitudes sur cette mesure prend en compte le temps de réaction de l'expérimentateur détectant le passage de la bille à une altitude donnée et appuyant prestement sur le bouton du chronomètre. Cette incertitude est, dans le cas où expérimentateur = Victor, de l'ordre de 0,4 s en moyenne.

On mesure ainsi la vitesse limite d'une dizaine de billes (afin de diminuer l'incertitude relative sur v_l) de rayon $R = 0,5, 0,75$ et 1 mm (billes vérifiant le mieux les hypothèses nécessaires à l'établissement de l'expression de v_l) et trace $v_l = f(R^2)$. On constate un bon accord modèle-expérience confortant l'hypothèse d'un écoulement de très faible Re et stationnaire autour des billes, et d'une force de traînée donnée par la formule de Stokes.

La pente de cette droite, donnée par $\frac{2}{9} \frac{\rho_{bille} - \rho_{liq}}{\eta} g =$, permet d'accéder à $\eta =$ sachant que $\rho_{liq} \approx (1,24 \pm 0,01) \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (en supposant la teneur en glycérol affichée exacte, à remesurer éventuellement), et $\rho_{bille} = (7,83 \pm 0,07) \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Cette valeur expérimentale de viscosité est à comparer à la valeur tabulée : $\eta = 0,78$ Pa.s pour le glycérol pur, et $\eta = 0,147$ Pa.s pour un mélange eau-glycérol à 92%, à 25°C (valeur à adapter à la température de travail).

La valeur expérimentale obtenue est en général plus grande que celle attendue, et les variations de température (η diminue avec T) ne suffisent pas à expliquer cet écart. Il faut prendre en compte d'autres phénomènes limites que nous allons détailler à présent.

1.3 Vérification des hypothèses de travail

[1] L'ordre de grandeur de la vitesse moyenne de chute trouvée permet de vérifier l'hypothèse nécessaire pour que la force de traînée soit donnée par la formule de Stokes, à savoir $Re \ll 1$. Avec $v_l \approx 10^{-2}$ m/s et $R \approx 10^{-3}$ m, on trouve $Re \approx 10^{-2} \ll 1$. L'hypothèse d'un écoulement rampant est donc vérifiée.

Rq : il est encore possible d'utiliser la formule de Stokes pour $Re \approx 1$.

Par ailleurs, d'après le théorème de la résultante dynamique, le temps d'établissement du régime transitoire est de l'ordre de $\tau \sim \frac{2\rho_{bille}R^2}{9\eta}$. Il est donc atteint après une chute sur une longueur $l_\tau \sim 10^{-4} \text{ m} \ll l_1 = 4$ cm. La vitesse mesurée correspond donc bien à la vitesse limite atteinte en régime permanent.

Ces hypothèses ne sont donc pas à l'origine de l'écart aux valeurs théoriques observé. Pour expliquer cet écart, il faut tenir compte des effets de bords dans l'éprouvette. La formule de Stokes est en théorie uniquement valable pour un milieu illimité et la présence de parois latérales et transversales (le fond de l'éprouvette) est susceptible d'augmenter la force de traînée de manière significative.

En effet, on peut montrer que la présence du fond de l'éprouvette est modélisée grâce à l'ajout d'un terme correctif dans l'expression de \vec{F} : $\vec{F} = -6\pi\eta R(1 + \frac{R}{h})\vec{v}$ avec h distance séparant la bille du fond du viscosimètre. La contribution la plus importante de ce terme correctif est obtenue pour $h = l_2 = 4$ cm et vaut alors 1,025. Elle reste donc très faible.

Par contre, les parois latérales produisent une perturbation plus importante. Leur présence entraîne l'apparition d'un écoulement de fluide partant du fond du tube et remontant le long des parois, d'où un ralentissement de la bille. C'est cette perturbation qui est à l'origine de la surestimation de la force de traînée, et donc de η . On peut estimer la force additionnelle F_{parois} grâce à la relation :

$$\frac{F_{\text{parois}}}{F_{\text{Stokes}}} \sim \frac{R}{6r}$$

avec r rayon de l'éprouvette. Dans notre cas, ce rapport est de l'ordre de 5%.

2 Écoulements parallèles laminaires et stationnaires, $Re \sim 10^3$

Ces écoulements, pour lesquels les termes inertiels de l'équation de Navier Stokes sont rigoureusement nuls, sont facilement solubles analytiquement et permettent de mesurer des viscosités dynamiques et d'illustrer les concepts de perte de charge et de couche limite, essentiels pour comprendre la transition vers les écoulements turbulents. Pour engendrer ces écoulements, on utilise un fluide de faible viscosité cinématique, comme l'eau.

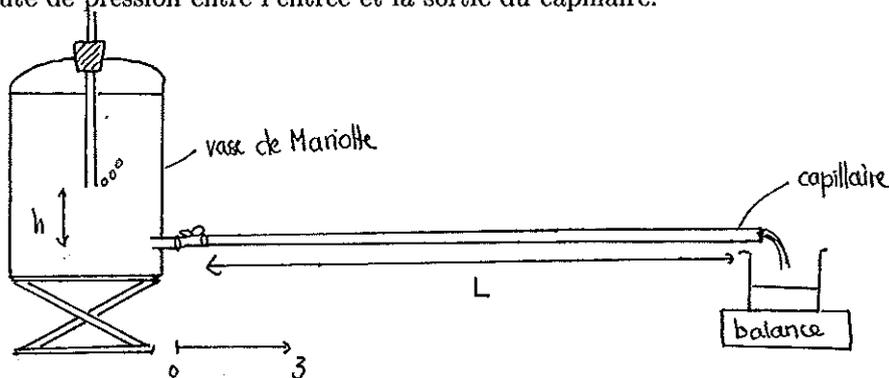
Nous nous intéressons ici au cas d'écoulements de Poiseuille dans des capillaires cylindriques. Médecin physiologiste et physicien à ses heures perdues, Jean-Louis Marie Poiseuille (1797–1869) s'intéressa à ce type d'écoulements, dont on rencontre l'analogie dans les vaisseaux sanguins, dans le but d'étudier la pression artérielle.

2.1 Loi de Poiseuille et dispositif expérimental

[1][2] L'écoulement dans une section du capillaire de verre présente un profil parabolique et le débit volumique est donné par la loi de Poiseuille que l'on cherche ici à vérifier :

$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta P}{128 \eta L}$$

avec ΔP chute de pression entre l'entrée et la sortie du capillaire.



Pour vérifier cette loi, on utilise un vase de Mariotte rempli d'eau et fermé par un bouchon de caoutchouc dans lequel est plantée une tige de verre creuse. Lors de l'ouverture du robinet, une ligne de courant s'établit entre l'extrémité immergée du tube et l'entrée du capillaire : la pression en ce point est alors donnée par $P(0) = P_{atm} + \rho gh$. En sortie du capillaire, la pression est uniforme et égale à P_{atm} . En régime permanent, la pression en tout point du capillaire ne dépend que de z et la chute de pression à l'origine de l'écoulement s'écrit

$$\Delta P = P(0) - P(L) = \rho gh$$

On dispose de plusieurs capillaires de même diamètre $D = (2,4 \pm 0,02)$ mm (données constructeur) que l'on brûle au niveau de l'extrémité libre afin de s'affranchir des effets de capillarité qui pourraient perturber l'écoulement (la suie formée est hydrophobe). Les capillaires ont une longueur comprise entre $L = 30$ cm et $L = 150$ cm, mesurée avec une précision de 0,5 cm.

2.2 Réalisation des mesures

[2] On mesure Q connaissant ΔP (via la mesure de h) pour les différentes longueurs de capillaires. Pour ce faire, on mesure au chronomètre le temps Δt nécessaire pour qu'une masse d'eau donnée (ici 100 g, mesurés à la balance électronique ou à plateaux) s'écoule du capillaire. Il faut cependant veiller à attendre que le régime permanent s'installe avant de commencer les mesures, en évaluant par exemple la masse tombée toutes les 10 s jusqu'à ce qu'elle soit constante.

Le déclenchement du chronomètre est critique. On choisira la mesure de masses suffisamment grandes pour minimiser l'incertitude sur Δt , évaluée à 1,5 s.

On trace $Q = \frac{V_{qt}}{\Delta t} = f(1/L)$. On constate que la loi linéaire de Poiseuille est vérifiée aux grands L , mais que la courbe s'infléchit lorsque L diminue. On trouve une pente :

$$a = \frac{\pi D^4 \Delta P}{128 \eta} = \frac{\pi D^4 g h}{128 \nu} =$$

Avec $h = (12,5 \pm 0,1)$ cm, on accède à une mesure de la viscosité cinématique de l'eau, $\nu =$.
L'incertitude sur cette mesure est donnée par :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{4 \Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L} \sim$$

Cette valeur de viscosité est à comparer à la valeur théorique à $25^\circ C$ (ou à la température de travail) $\nu = 0,896 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

On peut également choisir de mesurer Q pour différentes valeurs de h , de 20 à $(7,5 \pm 0,1)$ cm. La valeur de ν déduite de cette série d'expérience est sensiblement identique à celle trouvée en changeant L .

Rq : la hauteur $h = 0$ correspond à un enfoncement du tube tel que l'écoulement n'ait plus lieu (même pression à l'entrée et à la sortie du capillaire). L'erreur sur l'estimation de cette hauteur est responsable de l'ordonnée à l'origine non-nulle sur la courbe $Q = f(h)$.

Par ailleurs, l'écart à la droite observé pour h faible s'explique par un ralentissement du débit et l'établissement d'un goutte à goutte en sortie du capillaire.

2.3 Vérification des hypothèses

[1] Le nombre de Reynolds de cet écoulement est donné par

$$Re = \frac{4Q}{\pi \nu D} \sim 300 - 1200$$

L'écoulement dans le capillaire est donc bien laminaire.

L'écart à la loi de Poiseuille pour les capillaires les plus courts s'explique par le temps (et donc la distance) nécessaire à l'établissement du profil de vitesse parabolique dans la section du capillaire, qui correspond au temps de développement de la couche limite le long des parois et jusqu'au coeur du tube.

Le profil de vitesses est plat en $z = 0$ et ne deviendra parabolique qu'à une distance notée l_p , qui doit être négligeable devant L pour que la loi de Poiseuille soit valide. Le temps caractéristique de la diffusion de quantité de mouvement est $\tau = \frac{D^2}{4\nu}$ ce qui correspond à $l_p = \frac{4Q}{\pi D^2} \frac{D^2}{4\nu} = \frac{Q}{\pi \nu}$.

On montre que cette distance est négligeable pour les capillaires de longueur $L \geq 70$ cm, mais que ce n'est plus le cas pour les capillaires plus courts. Ceci explique l'écart à la linéarité observé sur la courbe $Q = f(1/L)$.

3 Ecoulements de grands $Re \sim 10^4 - 10^5$

3.1 Dispositif expérimental

Pour générer des écoulements turbulents, et simuler par là-même un problème réel d'aérodynamisme, on utilise un fluide de faible viscosité cinématique, l'air ($\nu = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ à $20^\circ C$), entraîné par la turbine d'une soufflerie à une vitesse de plusieurs m/s .

L'écoulement ainsi créé est équivalent à un écoulement parfait permanent et incompressible, du moins en amont des obstacles placés dans la soufflerie.

La vitesse peut être mesurée à l'aide d'une sonde Pitot contenue dans la soufflerie, et d'un manomètre différentiel à alcool. En comparant la différence de pression ΔP affichée par ce manomètre à la vitesse de l'air mesurée par ailleurs à l'aide d'un anémomètre à fil chaud, il est possible de vérifier la relation de Bernoulli, caractéristique des écoulements parfaits, incompressibles, stationnaires. Cependant, la position du tube de

Pitot (placé juste derrière les obstacles introduits dans la soufflerie) entraîne des erreurs sur la mesure de la vitesse.

On préfère donc utiliser l'anémomètre à fil chaud, introduit sur le côté de la soufflerie, pour réaliser des mesures plus précises. Il s'agit d'un système asservi en température, de très faible temps de réponse (de l'ordre de 10^{-6} s), fournissant automatiquement un courant électrique destiné à compenser les pertes thermiques (par convection) au niveau d'un filament chaud placé au sein de l'écoulement.

Dans cette partie du montage, on s'intéresse à la force de traînée exercée par l'écoulement turbulent sur des objets placés dans la soufflerie.

3.2 Force de traînée

[1][2] Lorsque le nombre de Reynolds augmente et que l'écoulement devient turbulent, la formule de Stokes ne s'applique plus, et la force de traînée devient proportionnelle à la vitesse au carré de l'écoulement :

$$F = \frac{1}{2} C_x S \rho v^2$$

avec S aire de la projection du solide considéré dans un plan orthogonal à l'écoulement.

En aérodynamique, il est essentiel de diminuer la force de traînée des corps en mouvement dans l'air (voiture, avion, Lance Armstrong,...) pour améliorer les performances et atteindre des vitesses limites plus élevées. Les paramètres sur lesquels il est possible de jouer sont S et surtout le coefficient de traînée C_x dépendant de la forme de l'objet.

Pour étudier l'influence de ces deux paramètres sur F , on place des objets de tailles et de formes différentes à l'intérieur de la soufflerie. La force de traînée est mesurée à l'aide d'un dynamomètre (ressort + aiguille), mais cette mesure s'avère assez imprécise. Le dynamomètre est en effet équipé d'une petite ampoule qui reste allumée tant que le bras métallique portant l'objet touche la carcasse de la soufflerie. Lorsque la force de rappel, que l'on fait varier en déplaçant l'aiguille, exercée par le ressort sur ce bras compense la force de traînée, le contact avec est rompu et la lampe s'éteint. Cependant, il n'est pas rare qu'elle reste en contact avec une partie de la carcasse même lorsque les forces sont compensées, ou qu'elle ne se rallume pas lorsque la force de rappel dépasse la force de traînée. On préfère donc repérer à l'oeil le moment où le bras se situe au centre de l'orifice. On estime alors l'incertitude sur la mesure de la force à ± 2 divisions = ± 76 mN.

On trace ainsi la courbe $F = f(v^2)$ pour un même objet, puis $F = f(S)$ pour des objets de même forme mais de section différente (par exemple, l'ensemble de disques) et à v fixée. Ces deux courbes confirment validité de l'expression de la force de traînée donnée. Elles confirment également que le coefficient C_x est indépendant de la vitesse, donc du nombre de Reynolds de l'écoulement : pour l'ensemble des mesures réalisées, $Re \approx \frac{10 \times 10^{-2}}{10^{-6}} = 10^4$, et la crise de traînée n'est donc pas atteinte. Elle ne peut d'ailleurs pas l'être avec cette soufflerie.

En utilisant la mesure de F , il est possible d'estimer le coefficient de traînée de plusieurs solides de S identique. Les valeurs trouvées expérimentalement sont à comparer aux valeurs tabulées : $C_x = 0,4$ pour la sphère et $1,1$ pour le disque, entre autres, ce qui prouve le défaut évident d'aérodynamisme de ce dernier profil. Les erreurs sont imputables à l'erreur de détermination de F , mais aussi aux effets de bords de la soufflerie, analogues à ceux présentés dans le cas du viscosimètre à bille. On remarque ainsi que plus la taille de l'objet est petite, plus le C_x tend vers la valeur attendue. Une autre source d'incertitude provient de la mesure de la vitesse, qui se fait au voisinage de l'objet et est donc légèrement perturbée par sa présence.