

JAUGES DE CONTRAINTES. ETUDE DE LA FLEXION D'UNE BARRE.¹

But de la manipulation

- Poser le problème de la mesure de la **déformation** d'un matériau au moyen d'une **jauge de contrainte**.
- Utiliser la jauge en régime **statique** pour l'étude de la flexion d'une barre métallique.
- Etude du régime **dynamique** et des **fréquences propres** à l'aide d'un capteur inductif (bobine-aimant).

I. PRESENTATION DU CAPTEUR

1.1. Notion de déformation d'un matériau

Un matériau élastique en forme de cylindre de longueur L , de rayon r , de section droite d'aire

$S = \pi r^2$, est encastré à l'une de ses extrémités (fig 1). Une action mécanique axiale est exercée à l'autre extrémité ; elle est supposée uniformément répartie et de résultante F .

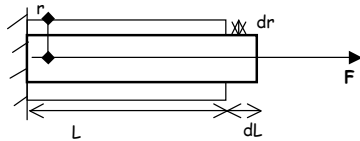


Fig1. Déformation d'une barre

On appelle **déformation axiale** du matériau la variation relative de sa longueur :

$$\varepsilon_l = \frac{dL}{L} \quad (1)$$

De même la **déformation transversale** du matériau est la variation relative de son rayon (ou plus généralement de ses dimensions transversales) :

$$\varepsilon_t = \frac{dr}{r} \quad (2)$$

Dans le domaine d'élasticité du matériau il y a proportionnalité entre les déformations et la contrainte

$\sigma = F/S$ subie par le matériau et on pose :

$$\varepsilon_l = \frac{dL}{L} = \frac{1}{Y} \frac{F}{S} ; \quad \varepsilon_t = \frac{dr}{r} = -\nu \varepsilon_l \quad (3)$$

Le coefficient Y est le **module d'Young** (pour les métaux $Y \approx 10^{11}$ Pa), ν est le **coefficient de Poisson** (pour la plupart des matériaux $\nu \approx 0,3-0,4$).

- Quelles sont les **dimensions** des coefficients Y et ν ?
- En dehors de l'action mécanique quelle est l'autre cause physique importante qui est susceptible de provoquer une déformation du matériau ?

¹ D'après une étude originale de M. JP Lièvre et sujet de concours X-Cachan PSI 2000
Lycée du Parc - page 1 / 10

Remarque : dans des situations plus complexes les **déformations** et les **contraintes** doivent être définies **localement**. Dans le domaine élastique, déformations et contraintes sont reliées par une application linéaire.

1.2. Jauge de contrainte

Une jauge de contrainte est un capteur résistif constitué d'un conducteur métallique filiforme (fig 2). Il est destiné à mesurer (localement) les **déformations** d'un matériau sur lequel il est collé. On peut alors en déduire des informations sur les **contraintes** existant dans le matériau et qui sont la cause des déformations.

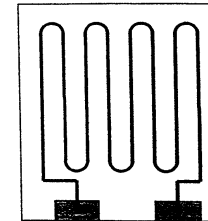


Figure 2.
Schéma d'une jauge de contrainte. On négligera les résistances des connexions. Quelques lacets ont été représentés, dans la réalité les éléments constitutifs sont en nombre plus important.

Rappelons qu'un conducteur cylindrique de longueur L , de rayon r et de résistivité ρ possède une résistance électrique R :

$$R = \rho \frac{L}{\pi r^2} \quad (4)$$

Supposons alors que le conducteur subisse une déformation dans le sens de sa longueur, sa résistance subit une variation dR telle que :

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - 2 \frac{dr}{r} \quad (5)$$

La variation relative de la résistivité est liée à la variation relative du **volume** du conducteur (phénomène de **piézorésistance**) :

$$\frac{d\rho}{\rho} = C_j \frac{dV}{V} \quad (6)$$

Dans le cas d'une jauge métallique : $C_j \approx 1$.

- En utilisant les relations précédentes montrer qu'il y a **proportionnalité** entre la variation relative de la résistance de la jauge et la déformation axiale qu'elle subit :

$$\frac{dR}{R} = K \frac{dL}{L} = K \varepsilon \quad (7)$$

- Exprimer le **facteur** de proportionnalité K de la jauge en fonction de la constante C_j et du coefficient de Poisson ν_j du matériau constitutif de la jauge.
- Pour une jauge métallique montrer que le facteur de jauge est $K \approx 2$, sa valeur «exacte» dépend du type de jauge utilisée et sera précisé dans la suite.

Remarque : comme pour tout conducteur métallique la résistance de la jauge dépend **aussi** de sa température : $\frac{dR}{R} = \beta dT$ où β est le **coefficient de température** de la jauge (pour une jauge en alliage métallique : $\beta \approx 10^{-5} \text{ K}^{-1}$).

1.3. Flexion d'une barre

Pour des raisons pratiques la pièce étudiée est une barre d'épaisseur e , de largeur ℓ , et de longueur L qui est encastree à une extrémité et qui subit une flexion sous l'action d'une force F orthogonale à la barre (fig 3).

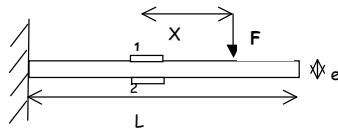


fig 3. Flexion d'une barre

Sur la face 1 de la barre il y a *allongement* relatif et sur la face 2 il y a *raccourcissement* relatif. A la distance X du point d'application P de la force F , on montre que les déformations des deux faces sont opposées et que l'on a :

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 = -\frac{6FX}{Y\ell e^2} \quad (8)$$

- Vérifier l'homogénéité de la relation (8).

De manière à *mesurer* les déformations ε_1 et ε_2 deux jauges de contrainte J_1 et J_2 ont été collées sur chaque face de la barre à la distance X du point P . Pour simplifier les raisonnements elles sont supposées *identiques*, de même résistance «à vide» R_0 et de même facteur de jauge K .

II. ETUDE EN RÉGIME STATIQUE

2.1. Mesure directe à l'ohmmètre numérique.

Relier la jauge J_1 à un multimètre numérique (à 20000 points de lecture au moins) en fonction ohmmètre.

- a) Mesurer la résistance R_0 en l'absence de force extérieure appliquée.
- b) Mesurer la résistance R en présence d'une force extérieure $F = mg$ due à une masse $m = 100$ g qui sera accrochée à la barre. En déduire la variation $\Delta R = R - R_0$ de la résistance et la valeur de la déformation ε correspondante, et un premier ordre de grandeur du module de Young.
 - Si le système précédent est destiné à *mesurer* la valeur de la masse m accrochée, l'appareil de mesure est-il bien utilisé ? Sa *précision* est-elle en cause ?
 - Compte tenu *uniquement* de la *résolution* de l'ohmmètre numérique estimer la plus petite variation de masse pouvant être mise en évidence par ce dispositif, c'est à dire sa résolution en masse : $(\Delta m)_R$. Vérifier *expérimentalement* la valeur estimée.

2.2. Mesure au moyen d'un pont «déséquilibré»

Pour un capteur du type jauge de contrainte c'est la *variation* de la résistance : $\Delta R = R - R_0$ qui est la grandeur intéressante. Pour y accéder il est commode d'utiliser une structure en pont analogue au pont de Wheatstone habituel (Wheatstone : 1802 - 1875).



Sir Charles Wheatstone
né en 1802, mort à Paris le 20 octobre 1875.
(D'après une photographie de London Stereoscopic Company)

a) Etude théorique

Comme nous l'avons déjà vu (§ 1.3) lors de la flexion de la barre ses deux faces subissent des déformations opposées : $\varepsilon_1 = \varepsilon$ et $\varepsilon_2 = -\varepsilon$. En charge les résistances des deux jauges (supposées identiques) sont donc :

$$R_{j1} = R_0(1 + K\varepsilon) \text{ et } R_{j2} = R_0(1 - K\varepsilon) \quad (9)$$

Les deux jauges sont placées dans deux branches *adjacentes* du pont, les deux autres branches sont constituées de résistances P et Q de précision (1%). La diagonale $[AB]$ du pont est reliée à un générateur idéal de tension de fem V_a (fig 4).

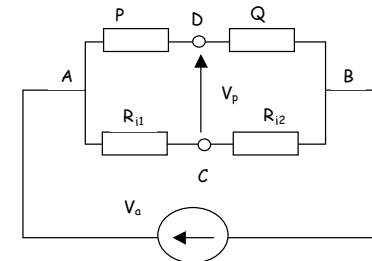


Fig4. Pont de Wheatstone

- Montrer que la «tension de sortie» du pont V_p est

$$V_p = V_a \left(\frac{Q}{Q + P} - \frac{R_{j2}}{R_{j1} + R_{j2}} \right) \quad (10)$$

- Le pont est supposé *équilibré* «à vide», soit $V_p = 0$ pour $\varepsilon = 0$, montrer alors qu'en charge la *tension* de déséquilibre du pont est :

$$V_p = \frac{KV_a}{2} \varepsilon \quad (11)$$

La tension de sortie du pont est ainsi proportionnelle à la déformation ε à mesurer et à la tension d'alimentation V_a du pont. Cette dernière ne peut pas être choisie arbitrairement car la *puissance dissipée* par les jauges est limitée !

- Dans le cas considéré la puissance dissipée maximale est fixée à 5 mW.mm². Sachant que la grille de la jauge occupe une surface de 3 mm x 7 mm, vérifier que la condition est bien satisfaite pour une tension d'alimentation $V_a = 5$ V.
- Dans ce montage la dilatation thermique de la barre a-t-elle une influence sur la mesure de la déformation due à la contrainte mécanique ?
- Calculer l'ordre de grandeur de la tension de déséquilibre pour la déformation calculée au §II.2.1. Commenter le résultat obtenu.

b) Manipulation

Vu la faiblesse des tensions de déséquilibre, les mesures sont facilitées par l'introduction d'un amplificateur de tension entre le pont et le voltmètre numérique.

En raison de la structure du pont cet amplificateur doit être un **amplificateur différentiel** dont la tension de sortie V_s est fonction de la *différence* V_p des tensions V_+ et V_- de ses entrées (fig 5). Dans cet amplificateur (« d'instrumentation ») on peut régler l'amplification (« A_v ») et le décalage de sortie (« zéro ») si bien que l'on peut écrire :

$$V_s = A_v(V_+ - V_-) + V_d = A_v V_p + V_d \quad (12)$$

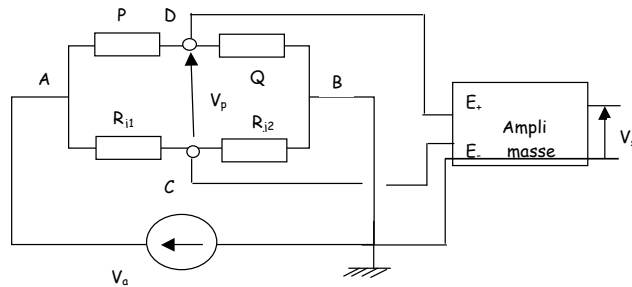


fig 5. Pont déséquilibré et amplificateur

Réalisation du pont

- Pour éviter de détruire les jauges (!) , et pour avoir une tension bien constante, on utilise une alimentation de 5V continu réalisée à partir d'une pile.
- Réaliser alors le montage représenté sur la figure 5.
- Les résistances P et Q sont des résistances :

P est ajustable (10 k Ω),

Q est fixée (2k Ω)

- **Relier toutes les terres entre elles** avec les fils spécifiques verts et jaunes.

Réglage du pont (à vide)

- Fixer l'amplification de l'amplificateur différentiel à $A_v = 100$,
- Alimenter le pont et attendre quelques minutes afin que l'équilibre thermique s'établisse.
- Connecter maintenant le multimètre à la sortie de l'amplificateur et agir sur le réglage du « zéro » de manière à annuler la tension de sortie ($V_s = 0$ à qq mV près).

c) Mesure au pont (en charge)

- Suspendre différentes masses m_i à l'extrémité de la barre et mesurer les tensions V_{si} correspondantes.

Ne pas dépasser 100 g pour éviter une déformation permanente de la barre !

- Tracer la courbe représentative de V_s en fonction de m , peut-on considérer la relation $V_s(m)$ comme « linéaire » ?
- Dédurre de la pente de la courbe, des caractéristiques électriques et mécaniques du montage, la valeur du module d'Young Y du matériau constituant la barre (alliage d'aluminium). Comparer à la valeur tabulée.

On donne : $Y_{\text{Aluminium}} = 6,87 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ dans le Handbook.

DONNEES :

$V_a = 10 \text{ V}$; $A_v = 100$, $R_0 = 350,0 \pm 0,3\%$, $K = 2,140 \pm 0,3\%$

Les caractéristiques géométriques : ℓ , e , L et X sont précisées pour chaque barre

- Estimer comme précédemment la résolution en masse (Δm)_R du système, conclusion ?

III. ETUDE EN REGIME DYNAMIQUE

3.1. Partie théorique

Dans cette dernière partie nous étudions les *vibrations* de la barre. Pour un système oscillant *linéaire* on appelle *modes propres d'oscillation* des mouvements particuliers dans lesquels tous les éléments du système oscillent à la même pulsation ω .

Dans le cas de la flexion d'une barre il existe une infinité dénombrable de modes d'oscillations dont les pulsations ω_n dépendent des *conditions aux limites* imposées aux extrémités de la barre.

Le mouvement de flexion le plus général de la barre peut s'écrire comme la *superposition* des différents modes propres. Les coefficients du développement dépendent des conditions initiales (position et vitesse).

Dans le cas considéré d'une barre ayant une extrémité *fixe* et une extrémité *libre* les premières pulsations ont les valeurs approchées suivantes :

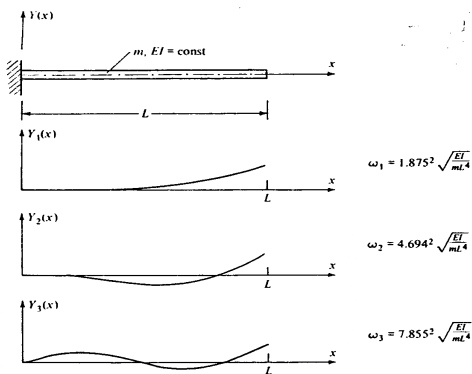
$$\omega_1 = 1,875^2 \omega_0; \omega_2 = 4,694^2 \omega_0; \omega_3 = 7,855^2 \omega_0; \omega_4 = 10,996^2 \omega_0; \omega_5 = 14,137^2 \omega_0$$

avec :
$$\omega_0 = \left(\frac{Y e^3}{12 m L^3} \right)^{1/2} \quad (13)$$

où : ℓ est la largeur de la barre, e son épaisseur, L sa longueur, m sa masse et E son module d'Young.

Pour le mode propre d'oscillation de rang n le déplacement transversal de la barre $y(x,t)$ à partir de sa position d'équilibre est de la forme :

$$Y(x,t) = Y_n(x) \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (14)$$



L'allure des «amplitudes» $Y_n(x)$, pour les trois premiers modes, est donnée sur la figure 6. On notera l'augmentation du nombre de *noeuds de vibration* (où $Y = 0$) avec le rang n du mode.

Fig 6. Modes de vibration de flexion d'une barre

3.2. Manipulation

a) Aspect temporel et étude du régime libre d'oscillation.

On n'utilise plus montage précédent (§ II.2.2, fig.5). En régime dynamique on va se servir d'un capteur inductif constitué d'un petit aimant collé sur la barre et d'une petite bobine placée au-dessus. On mesure directement la tension induite, par le mouvement de l'aimant, aux bornes de la bobine via l'oscilloscope numérique. Cette tension induite est proportionnelle la vitesse de la barre.

Les oscillations de flexion de la barre, dont l'extrémité est initialement écartée de sa position d'équilibre, peuvent être enregistrées en utilisant le mode « *single* » de l'oscilloscope HP et un choix convenable de la « *synchronisation* » (voie, niveau, pente).

- Montrer que le premier mode est dominant, en mesurer la fréquence f_1 avec son incertitude.
- Utiliser les relations (13), les caractéristiques géométriques de la barre et la masse volumique $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ du matériau pour calculer, à nouveau, le module d'Young Y . Comparer le résultat à la valeur obtenue précédemment (§ II.2.2).
- Plus généralement comparer les deux méthodes de mesure de Y .
- En analysant attentivement l'enregistrement, constater, éventuellement, la présence des autres modes de vibration.

b) Aspect fréquentiel et étude du régime forcé ; recherche des fréquences de résonance.

On relie cette fois les bornes de la bobine à la sortie du GBF HP. En choisissant une amplitude suffisante (quelques Volts), faire varier la fréquence d'excitation par pas assez faibles (au 1/10 ème de Hz) pour observer correctement la résonance coïncidant avec les fréquences propres de la barre.

Expérimentalement on relève la tension de sortie du système associant les jauges de contrainte, le pont de Wheatstone et l'électronique de conditionnement en fonction de la fréquence. Tracer cette courbe et remplir le tableau suivant :

Fréquences propres	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
Théorique (Hz)	16,8				
Expérimentale (Hz)					

Annexe : utilisation de la FFT pour une analyse fréquentielle des signaux.

Activer la fonction F.F.T. de l'oscilloscope numérique en procédant comme suit :

touche : +/- , puis **Fonction 2** touche : **ON** ,

puis touche : **Menu** , puis **Opération** touche : **FFT**

régler f_E à 2 ksa/s avec le bouton Time/div

Un processeur de calcul effectue à partir du signal temporel, qui est échantillonné à la fréquence f_E , le calcul de sa transformée de Fourier discrète grâce à l'algorithme F.F.T. (Fast Fourier Transform). On passe ainsi de N échantillons du signal temporel séparés par l'intervalle de temps $\Delta t = 1/f_E$ à N échantillons du spectre de fréquences séparés par l'intervalle de fréquence $\Delta f = f_E/N$ (Dans notre cas $N = 1024$).

Précisons que le spectre de fréquence, ainsi calculé, est périodique de période f_E et symétrique par rapport par rapport à $f_E/2$: il n'est affiché que sur l'intervalle $[0, f_E/2]$.

On *augmente* donc la résolution fréquentielle en *diminuant* la fréquence d'échantillonnage mais celle ci ne doit pas être trop faible sous peine de voir apparaître des composantes spectrales erronées (voir ci-dessous).

Cette transformée est, sous certaines conditions, une bonne représentation du spectre de fréquences du signal temporel étudié, c'est à dire ici des vibrations de la barre (fig 10) En particulier pour les signaux considérés on utilisera la «fenêtre» de **Hanning** ; une telle fenêtre permet de limiter l'élargissement des raies spectrales dues au fait que la transformée discrète est calculée sur un enregistrement temporel de durée finie $T_{\infty} = (N - 1)/f_E$.

Précisons que le spectre est affiché avec les échelles suivantes :

- en abscisses : une échelle *linéaire* en fréquences couvrant *au maximum* l'intervalle $(0, f_E/2]$

- en ordonnées : une échelle *logarithmique* en dBV = $20 \log(V/V_0)$ où la tension de référence est $V_0 = 1 \text{ V}$ (efficace).

On notera que le niveau de référence (que l'on peut choisir) est situé *en haut* de l'écran.

- Vérifier que les fréquences des *maxima* du spectre correspondent bien à celles des modes successifs (cf relations 13).

ATTENTION !

Pour éviter toute erreur d'interprétation il faut que la fréquence d'échantillonnage f_E soit suffisante, précisément il faut que le signal ne comporte pas des composantes spectrales de fréquences supérieures à $f_E/2$ (ou que leurs amplitudes soient négligeables). Dans le cas contraire les composantes de fréquences supérieures à $f_E/2$ apparaissent dans le spectre affiché (de manière erronée !).

On montre qu'elles apparaissent aux fréquences $f_{\alpha} = nf_E - f$ ou $f - nf_E$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $f_{\alpha} \in [0, f_E/2]$. De manière imagée on peut considérer qu'elles sont associées au «repliement» du spectre par réflexions successives aux deux extrémités 0 et $f_N = f_E/2$ de l'intervalle (fig 9).

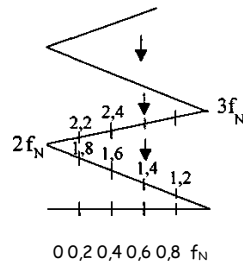


fig 9. Repliement du spectre

Donnons un exemple : Si la fréquence d'échantillonnage est $f_E = 2$ kHz ($f_N = 1$ kHz) et si le spectre comporte une composante à fréquence $f = 1400$ Hz celle-ci apparaît, de manière *erronée* à la fréquence $f_{ap} = 600$ Hz (= $2000 - 1400$).

Cette fréquence apparente correspond bien (fig 9) au repliement par rapport à $f_N = 1000$ Hz [(1400-1000) = (1000-600)] . Par contre la représentation sera correcte si la fréquence d'échantillonnage est portée à 5000 Hz.

D'un point de vue pratique f_E s'affiche chaque fois que l'on appuie sur la touche : +/- (elle est exprimée en samples/s).

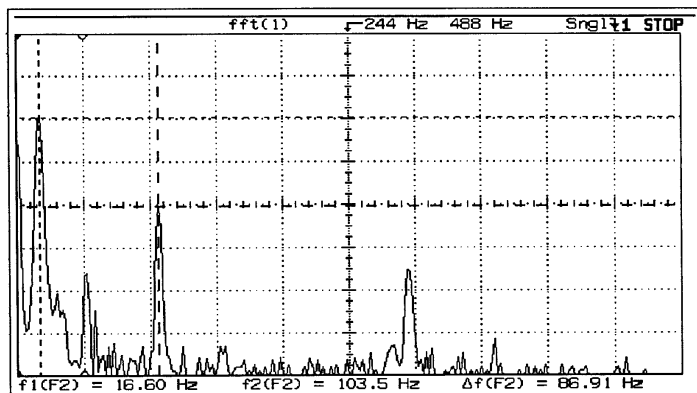
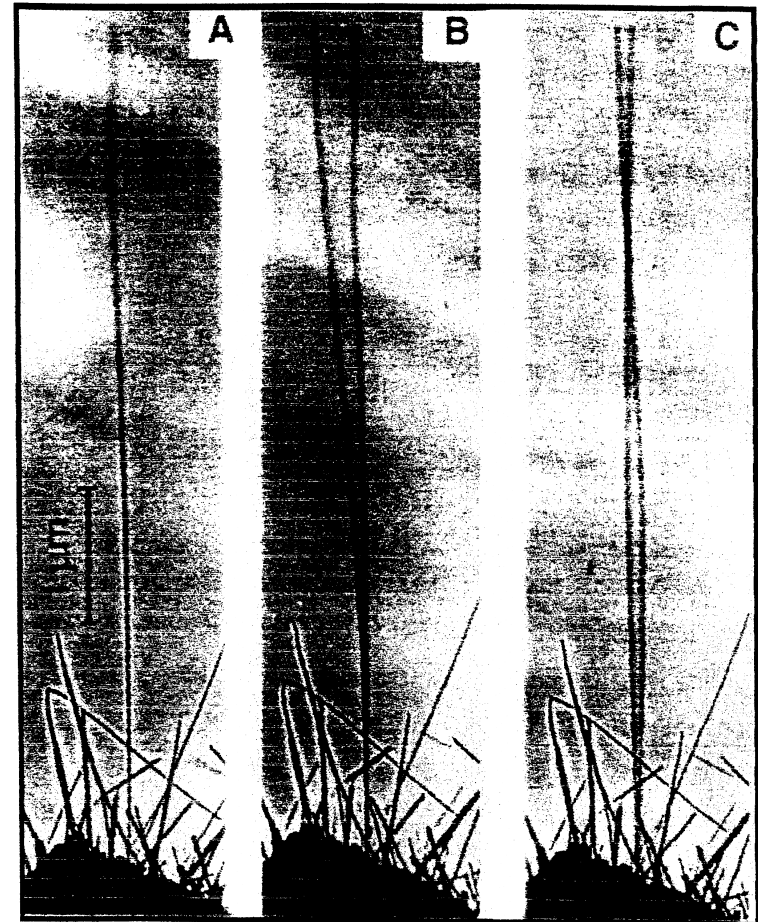


fig. 10 Spectre des modes de vibration d'une barre ($f_E = 2$ Ksa/s)



(issue d'un article de la revue américaine *Science*, Ph. Poncharal et al. Vol 283, 5 mars 1999) :
 Sur la vue A, on observe un nanotube attaché à son substrat, une fibre de carbone. La longueur est $L = 6,25 \mu\text{m}$ pour un diamètre $D = 14,5 \text{ nm}$. Son léger mouvement a une origine essentiellement thermique : l'agitation des atomes de carbone.
 Sur la vue B est représenté le mode fondamental de vibration ($n=1$), et en C le mode $n=2$. Ces modes sont excités par application d'une force électrique répartie, transverse au tube et sinusoïdale, il s'agit donc d'oscillations forcées.
 On a relevé les fréquences de résonance :
 $N_1 = 530 \text{ kHz}$ et $N_2 = 3,01 \text{ MHz}$.