

## OP2. OPTIQUE DE FOURIER. NOTION DE DIFFRACTION.

La manière dont se propage chaque faisceau lumineux n'a pas été analysée, pour le moment, dans le cas des dispositifs de Young (trous et fentes).

A partir **d'observations expérimentales**, on va établir un principe d'étude de la propagation d'un faisceau de lumière à travers des instruments destinés à former des images. Cela va permettre en particulier d'interpréter le phénomène de diffraction par une fente.

Ce sera aussi l'occasion d'étudier des **signaux physiques fonction des variables d'espace** différents de ceux étudiés en début d'année dans le domaine temporel, mais avec les mêmes techniques d'analyse de Fourier.

### 1. APPROCHE EXPERIMENTALE : ONDE TRANSMISE PAR UN OBJET DIFFRACTANT PLAN ECLAIRE PAR UNE ONDE PLANE SOUS INCIDENCE NORMALE. MISE EN PLACE DU MODELE.

#### 1.1. Observation de la lumière diffractée à l'infini par une mire de coefficient de transparence en amplitude sinusoïdal.

La lumière incidente issue d'un laser He-Ne est spatialement cohérente et temporellement cohérente et a une incidence normale dirigée par le vecteur unitaire  $\vec{u}_0 = \vec{e}_z$ . Il rencontre un milieu transparent appelé **mire sinusoïdale**. Les vecteurs d'onde considérés ont des directions **voisines** de l'axe Oz.



On observe trois points lumineux dans le plan focal d'une lentille mince convergente, ce qui correspond à trois directions dans l'onde diffractée par la mire sinusoïdale selon les vecteurs unitaires :  $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_{-1}$ . La tâche centrale d'intensité plus forte est dans le prolongement du faisceau lumineux incident, les deux tâches secondaires d'intensité identiques mais moindres sont symétriques par rapport à la tâche centrale, espacées d'une distance h.



**Expérience de cours** : on éclaire un réseau sinusoïdal avec un laser monochromatique (3 longueurs d'onde différentes), qu'on assimile à une onde plane sous incidence normale.

L = 80 cm	$\lambda_R = 650nm$	$\lambda_V = 532nm$	$\lambda_B = 405nm$
h = distance entre tâches (cm)			
sin θ			

On trace  $\sin\theta = f(\lambda)$ . En déduire a.

## 1.2. Interprétation des observations : décomposition en ondes planes :

### a) Introduction du modèle.

On considère un objet plan (ici la mire sinusoïdale d'épaisseur négligeable), placé en  $z = 0$ , éclairé par une onde plane monochromatique et on s'intéresse à l'onde lumineuse diffractée par cet objet à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille convergente ; ce sont les **conditions de Fraunhofer**.

Joseph Von Fraunhofer (1787-1826)<sup>1</sup>



#### Définitions:

- Quand une lame mince de faible épaisseur  $e(P)$  et d'indice  $n(P)$  est éclairée par une onde lumineuse sous incidence quasi-normale, sa présence revient à remplacer un chemin optique  $e(P)$  dans l'air par un chemin optique  $n(P).e(P)$  dans la lame et à atténuer l'amplitude de l'onde d'un facteur  $t(P)$ . Ainsi en notant  $P^+$  et  $P^-$  deux points situés dans le vide de part et d'autre d'un point de la lame mince ( $e$  tend vers 0), on peut définir le **coefficient de transmission**, appelé **fonction de transparence**, comme le rapport de l'amplitude de l'onde

juste après et juste avant la lame :  $\underline{t}(P) = \underline{t}(x, y) = \frac{\underline{s}(z = 0^+)}{\underline{s}(z = 0^-)} = t(x, y)e^{-j\psi(x, y)}$  avec

$$\psi(P) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [n(P) - 1] e(P) \text{ et } t(x, y) < 1. \text{ Quand } \underline{t}(P) \text{ est réelle, on parle de } \textbf{lame d'amplitude.} \text{ Quand } \underline{t}(P)$$

est complexe, on dit qu'on a une **lame de phase**.

- On appelle réseau ou **mire sinusoïdale unidimensionnelle**, une lame d'amplitude dont la transparence est de la forme :  $\underline{t}(P) = t_0 + t_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ ., fournie par le fabricant. On se limitera à des objets de transparence, unidimensionnels selon l'axe Ox.

Ce réseau unidimensionnel est indifféremment caractérisé par sa **période spatiale**  $a$ , ou sa **fréquence spatiale**  $\sigma = 1/a$ .

### b) Point méthode : introduction aux ondes électromagnétiques à 3 D.

#### Savoir démontrer n°1 : structure d'une onde électromagnétique plane monochromatique.

Les composantes du champs électromagnétiques ( $\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)$ ), dans le vide, satisfont à l'équation de d'Alembert à 3D scalaire :  $\Delta s(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$  avec  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

La recherche de solution sous forme d'onde plane monochromatique

$\underline{s}(M, t) = A_0 \exp[-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})] = A_0 \exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$  conduit à l'équation de dispersion :

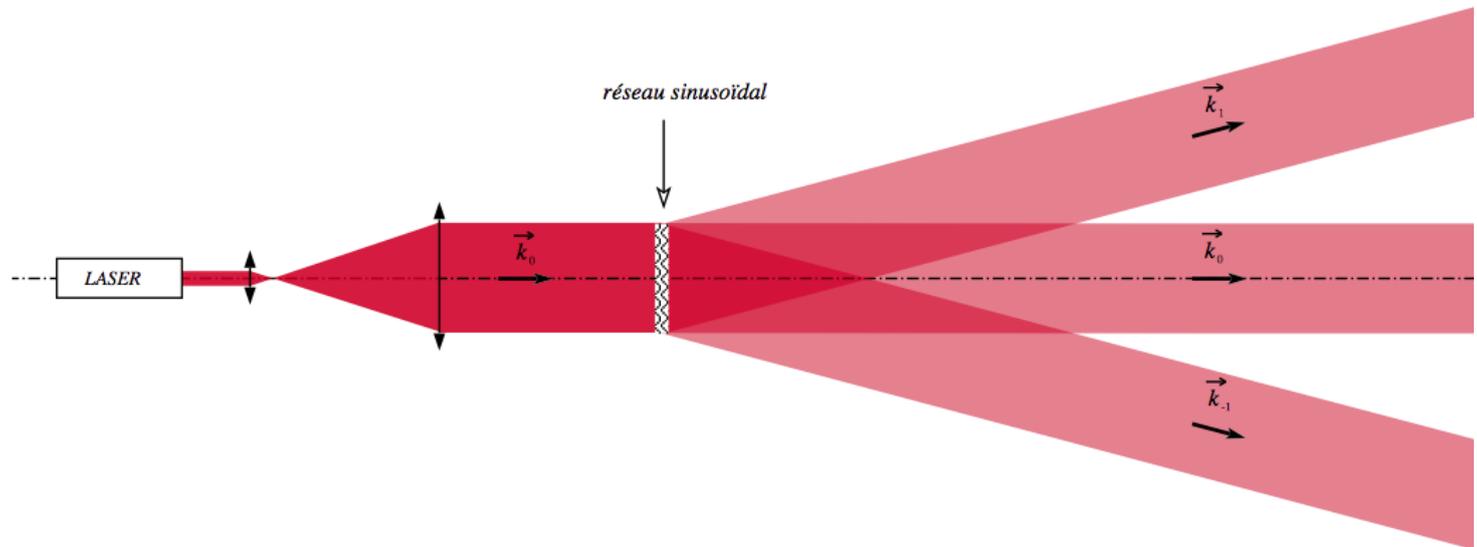
$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \|\vec{k}\|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \text{ qui impose des conditions sur les composantes du vecteur d'onde.}$$

Pour des ondes se propageant dans le plan  $xOz$ , on définit le vecteur d'onde :

$$\vec{k} \stackrel{\text{dét}}{=} \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{e}_u = \begin{vmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{vmatrix} = k_0 \begin{vmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{vmatrix} = 2\pi \begin{vmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ \sigma_z \end{vmatrix}, \text{ avec } \|\vec{e}_u\| = 1, \text{ soit } \sigma_x^2 + \sigma_z^2 = \frac{1}{\lambda_0^2} \text{ et l'onde scalaire plane}$$

monochromatique s'écrit :  $\underline{s}(M, t) = A_0 \exp[j2\pi(\sigma_x x + \sigma_z z - vt)] = A_0 \exp\left[j2\pi\left(\frac{\sin\theta}{\lambda_0} x + \frac{\cos\theta}{\lambda_0} z - vt\right)\right]$

<sup>1</sup> Opticien et physicien allemand. Nous lui devons l'invention du principe du réseau de diffraction et du spectroscope. Il obtint ainsi l'un de premiers spectres détaillés de la lumière solaire. Contemporain de Fresnel, il laissa sa marque sur l'industrie optique allemande, pendant au moins un siècle.



**Savoir démontrer n°2 : structure de l'onde diffractée par une mire sinusoïdale.**

On suppose l'onde lumineuse incidente plane monochromatique, sous incidence normale par rapport à la mire, caractérisée par l'onde de Fresnel :  $\underline{s}(x, y, z = 0^-, t) = A_0 \exp[-j2\pi(vt)]$ . En omettant un facteur de phase, ce qui revient à fixer l'origine des phases convenablement, l'onde à la sortie de la lame = « mire » s'écrit :

$$\underline{s}(x, y, z = 0^+, t) = t(x)A_0 \exp[-j2\pi(vt)]$$

On montre que les **conditions aux limites** imposent la structure de l'onde diffractée :

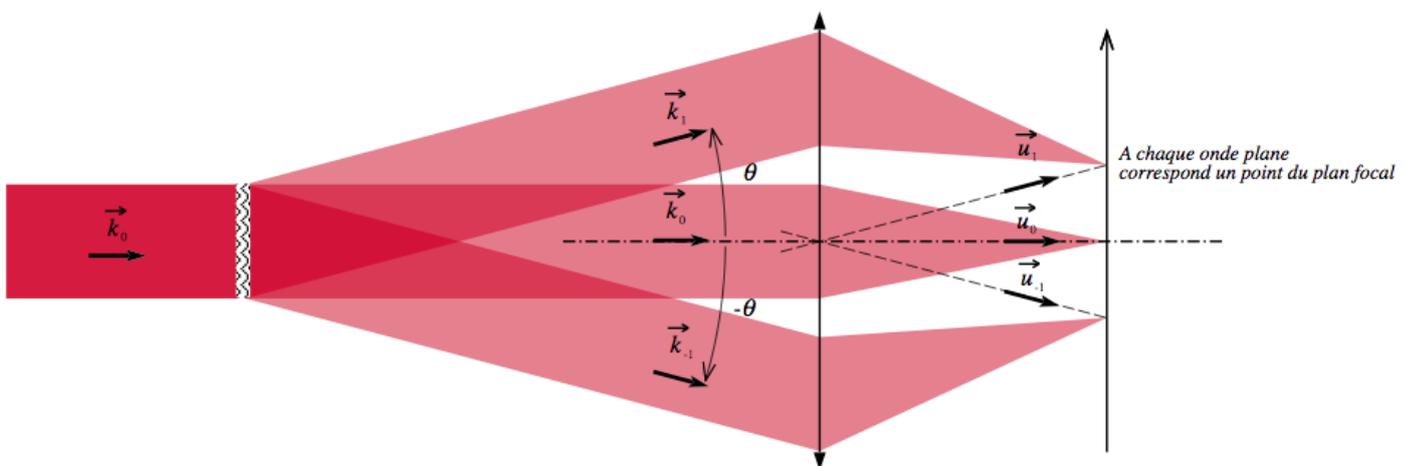
$$\underline{s}_d(x, y, z = 0^+, t) = A_0 t_0 \exp[-j2\pi(vt)] + \frac{1}{2} A_0 t_1 \exp\left[j2\pi\left(\frac{1}{a}x - vt\right)\right] + \frac{1}{2} A_0 t_1 \exp\left[j2\pi\left(-\frac{1}{a}x - vt\right)\right]$$

qu'on peut interpréter (par unicité des solutions de l'équation de d'Alembert) comme la restriction de la somme de trois ondes planes monochromatiques :

$$\underline{s}_d(\vec{r}, t) = A_0 t_0 \exp[j2\pi(\vec{\sigma}_0 \cdot \vec{r} - vt)] + \frac{1}{2} A_0 t_1 \exp[j2\pi(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r} - vt)] + \frac{1}{2} A_0 t_1 \exp[j2\pi(\vec{\sigma}_{-1} \cdot \vec{r} - vt)]$$

On retrouve bien les trois directions observées expérimentalement : la direction de  $\vec{\sigma}_1$  fait l'angle  $\theta_1$  avec

l'axe  $Oz$  tel que  $\sin\theta_1 = \frac{\lambda_0}{a} = \lambda_0 \cdot \sigma_x$ , et celle de  $\vec{\sigma}_{-1}$  fait l'angle  $\theta_{-1}$  avec l'axe  $Oz$  tel que  $\sin\theta_{-1} = -\frac{\lambda_0}{a} = -\lambda_0 \cdot \sigma_x$ .



**Définition:**

Une lentille convergente de distance focale image  $f'$  placée après la lame diffractante permet de collecter l'onde diffractée dans une direction  $\theta$  et de la faire converger dans son plan focal image en un point  $X \approx f' \cdot \theta$  (dans l'approximation de Gauss des petits angles). On appelle ce plan, le **plan de Fourier** car l'intensité lumineuse associée à l'onde diffractée fait apparaître la décomposition en fréquence spatiale de la fonction de transparence de la lame, autrement dit son **spectre de Fourier de fréquences spatiales (stéréo spectre discret ici)**.

La lentille convergente joue le rôle d'un **analyseur d'onde plane**. Chacune des ondes planes progressives harmoniques est à l'origine de l'éclairement d'un et d'un seul point du plan focal image de la lentille.

On écrira simplement que l'éclairement en un point du plan de Fourier :

Les abscisses des 3 tâches, dans le plan de Fourier sont :  $0, f' \frac{\lambda_0}{a}, -f' \frac{\lambda_0}{a}$  et les intensités lumineuses respectives,  $I_0, I_0/4, I_0/4$ , pour une mire sinusoïdale parfaite  $t_0 = t_1 = 1$

**1.3. Généralisation.**

La diffraction s'explique par les propriétés générales des ondes suivantes :

1. l'existence du mode de propagation **par onde plane**,
2. les conditions aux limites imposées à l'onde incidente par un obstacle (lame, pupille/ouverture, réseau,...) fixent la structure de l'onde qui se propage à partir de cet état initial.

La diffraction a pour origine une modification de la distribution d'amplitude/phase d'une onde, appelée **stéréostructure**.

**Méthode à connaître :**

Les raisonnements effectués sur l'exemple du réseau sinusoïdal se généralisent ainsi :

1. Un dispositif optique, unidimensionnel selon Ox, modifie une onde plane incidente, sous incidence normale, et fournit dans un plan de sortie Oxy une distribution d'amplitude connue. En effet, la transparence du dispositif optique est a priori une fonction quelconque de x qui, d'après l'analyse de Fourier, peut se décomposer en une somme (discrète si la transparence est périodique ou continue si non périodique) de fonctions sinusoïdales de la variable x :

$$t(x) = \sum_{\sigma_x} \hat{T}(\sigma_x) \exp[j2\pi\sigma_x x]$$

2. La nouvelle distribution est décomposée en exponentielles complexes, en sortie de lame :

$$\underline{s}_d(x, y, z = 0^+, t) = A_0 \sum \hat{T}(\sigma_x) \exp[j2\pi(\sigma_x x - vt)]$$

Sous réserve qu'on puisse définir pour chaque valeur de  $\sigma_x$  du spectre de la transparence un angle  $\theta$  tel que :

$$\sin\theta = \frac{2\pi \cdot \sigma_x}{k} = \lambda_0 \cdot \sigma_x, \text{ si } |\sigma_x| \leq \frac{1}{\lambda_0}. \text{ C'est la direction de propagation de l'onde plane associée :}$$

$$\underline{s}_d(x, y, z, t) = A_0 \sum \hat{T}(\sigma_x) \exp \left[ j2\pi \left( \frac{\sin\theta}{\lambda_0} x + \frac{\cos\theta}{\lambda_0} z - vt \right) \right]$$

Type de signal	« temps »	« espace »
Variable	<b>Temps t</b>	<b>Abscisse x</b>
Variable conjuguée (1 <sup>er</sup> choix)	Pulsation temporelle $\omega = 2\pi \cdot \nu$	Pulsation spatiale $k_x = 2\pi \cdot \sigma_x$
Variable conjuguée (2 <sup>ème</sup> choix)	Fréquence temporelle $\nu$	Fréquence spatiale $\sigma_x$
Relation fondamentale	$\Delta t \cdot \Delta \nu \approx 1$	$\Delta x \cdot \Delta \sigma_x \approx 1$

**Propriétés à connaître :**

- On peut retenir qu'à l'infini, ou dans le plan de Fourier on récupère la « **carte** » des amplitudes  $A_0 \cdot \hat{I}(\sigma_x)$  des différentes composantes de Fourier de la transparence. Les intensités lumineuses correspondant à ces directions privilégiées sont proportionnelles au module au carré des composantes de la décomposition de Fourier :

$$I_F(X) \underset{\text{plan Fourier}}{\propto} \left| \hat{I}(\sigma_x) \right|^2$$

- Il est utile de noter qu'à l'infini (ou dans le plan de Fourier), les détails de l'objet (qui correspondent à une petite échelle spatiale donc à une grande fréquence spatiale  $\sigma_x$ ) se trouvent loin de l'axe  $Oz$ , alors que le **fond continu** de la transparence (qui correspond à  $\sigma_x = 0$ ) se trouve situé sur l'axe  $Oz$ : cette séparation spatiale est à l'origine du filtrage optique que nous verrons plus loin.

- **Critère de Rayleigh** ; pour la fréquence spatiale  $1/a$  de la composante de Fourier,  $|\sin\theta| \leq 1 \Leftrightarrow \sigma_x = \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\lambda_0}$ .

Une onde « ne voit pas » les détails inférieurs à sa longueur d'onde. (sinon on a des ondes évanescentes, qui sont récupérées par les microscopes à champ proche et qui s'affranchissent de cette limite de Rayleigh)

## 2. DIFFRACTION PAR UN RESEAU A UNE DIMENSION = MIRE UNIDIMENSIONNELLE D'EXTENSION LATÉRALE INFINIE DE N TRAITS PARALLELES EQUIDISTANTS.

### 2.1. Observation de la lumière diffractée à l'infini par une mire unidimensionnelle infinie de N traits équidistants de pas a. Diffraction par un objet périodique à une dimension.

On remplace la mire sinusoïdale par un réseau à fentes d'extension quasi infinie selon  $Ox$ . On observe dans le plan focal d'une lentille convergente (plan de Fourier) une répartition lumineuse de tâches centrée sur la direction de l'optique géométrique et symétrique d'intensité décroissante de part et d'autre.



### 2.2. Interprétation des observations : décomposition en ondes planes.

- Le réseau de traits se décompose en une superposition de mires sinusoïdales identiques à celles qui vient d'être étudiées. En effet, la transparence de type « créneau » du réseau, de période spatiale  $a$ , varie brutalement et donc contient a priori toutes les **composantes de Fourier** de fréquences spatiales  $n/a$  avec  $n$

entier relatif :

$$t(x) = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \cos\left[2\pi m \frac{x}{a} + \varphi_m\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{j\left(2\pi n \frac{x}{a}\right)}$$

où les amplitudes des harmoniques de fréquences  $\nu_n = \frac{n}{a}$  sont calculées par la relation :

$$T_n = \frac{1}{a} \int_{\text{pas}} t(x) e^{-j2\pi n \frac{x}{a}} dx$$

- La vibration lumineuse dans le plan de sortie se décompose ainsi :  $\underline{s}(x, z=0, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n e^{2\pi j \left( n \frac{x}{a} + \sigma_z z - \nu t \right)}$

- Le nombre entier  $n$  est l'ordre de l'onde plane. Son vecteur  $\vec{\sigma}_n$  de composantes  $\left( \sigma_x = \frac{n}{a}, 0, \sigma_z \right)$ , fait avec

l'axe  $Oz$  l'angle  $\theta_n$ , tel que  $\sin\theta_n = \frac{\lambda_0}{a} |n|$ , en ne considérant que le cas où  $|n| \lambda < a$ ,

**Propriétés à connaître :**

- On a les fréquences spatiales  $\sigma_{x,n} = \frac{n}{a}$
- Sans qu'il soit nécessaire de reprendre les calculs, on prévoit qu'à l'infini, ou dans le plan de Fourier (PFI d'une lentille mince convergente), l'onde diffractée est la somme d'ondes planes monochromatiques dans les directions  $\theta_n$  tel que :  $\sin\theta_n = \sigma_{x,n} \cdot \lambda_0 = n \frac{\lambda_0}{a}$  ce qui décrit parfaitement la relation de Bragg du réseau en transmission dispersif vue en tp de pcsi.
- L'intensité lumineuse des tâches est proportionnelle à  $T_n^2$ .

**3. FENTE RECTILIGNE DE COEFFICIENT DE TRANSMISSION = TRANSPARENCE UNIFORME.****3.1. Observation de la lumière diffractée à l'infini par une pupille fente rectiligne de largeur  $b$ . Diffraction par un objet de dimension limitée.**

On remplace la mire sinusoïdale par une fente très fine de largeur  $b$  selon  $Ox$ .

On observe dans le plan focal d'une lentille convergente (plan de Fourier) une tâche principale de diffraction centrée sur la direction de l'optique géométrique et perpendiculaire à la grande dimension de la fente ( $Oy$ ).

**3.2. Interprétation des observations :**

**Savoir démontrer n°3 : première approche semi-quantitative.**

- La fonction de transparence correspondant à une fente de largeur  $b$  selon  $Ox$  s'écrit simplement :

$$t(x) = \text{rect}\left(\frac{2x}{b}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \text{ L'analyse de Fourier montre que les composantes de Fourier}$$

significatives sont centrées en  $\sigma_x = 0$  à cause de la valeur moyenne de  $t(x)$  et ont une largeur donnée par la

relation fondamentale de l'analyse de Fourier  $\Delta x \cdot \Delta \sigma_x \approx 1$ , soit  $\Delta \sigma_x \approx \frac{1}{b} \Leftrightarrow -\frac{1}{b} \leq \sigma_x \leq \frac{1}{b}$ .

- Il résulte des études précédentes qu'à l'infini, ou dans le plan de Fourier, l'onde diffractée émergeant de la fente fine et éclairée par une **onde plane sous incidence normale** est constituée d'ondes planes dans toutes

les directions  $\theta$  telles que :  $|\sin\theta| \leq \frac{\lambda_0}{b}$ , relation fondamentale vue en pcsi.

- La tâche centrale est d'autant plus large que la fente est fine.

Savoir démontrer n°4 : seconde approche quantitative, notion de transformée de Fourier à 1D de la la fonction transparence et calcul inverse (complément).

- Dans le cas d'une fonction de transparence non périodique, l'analyse de Fourier, permet d'obtenir, l'amplitude de l'onde diffractée en sortie de la fente de transparence  $t(x)$  grâce à la transformée de Fourier à 1 dimension :

$$\hat{T}(\sigma_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(x) \cdot \exp(-j2\pi\sigma_x x) dx = TF[\underline{t}](\sigma_x),$$

cette fonction est le **stéréospectre continu** de la distribution d'amplitude de l'onde diffractée ( transformée de Fourier à une dimension de la fonction transparence de la pupille diffractante). Les ondes planes diffractées associées font avec l'axe Oz (direction de l'onde incidente) l'angle  $\theta$  tel que  $\sin\theta = \sigma_x \lambda_0$ .

- Connaissant la répartition d'amplitude  $\hat{T}(\sigma_x)$ , on peut remonter à la fonction transparence de la pupille diffractante en calculant la transformée de Fourier inverse :  $\underline{t}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}(\sigma_x) \cdot \exp(+j2\pi\sigma_x x) d\sigma_x = TF^{-1}[\hat{T}](x)$

A une dimension, sous incidence normale d'une onde plane, l'amplitude de l'onde diffractée s'écrit :

$$\underline{s}_d(x, 0, z = 0^+) = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}(\sigma_x) \cdot \exp(j2\pi\sigma_x x) d\sigma_x, \text{ soit } \underline{ds}_d(x, 0, z = 0^+, \sigma_x \rightarrow \sigma_x + d\sigma_x) = A_0 \hat{T}(\sigma_x) \cdot \exp(j2\pi\sigma_x x) d\sigma_x$$

d'ou la décomposition en ondes plane :  $\underline{s}_d(x, y, z, t) = A_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}(\sigma_x) \cdot \exp(j2\pi(\sigma_x x + \sigma_z z)) d\sigma_x$  avec, d'après

l'équation de dispersion :

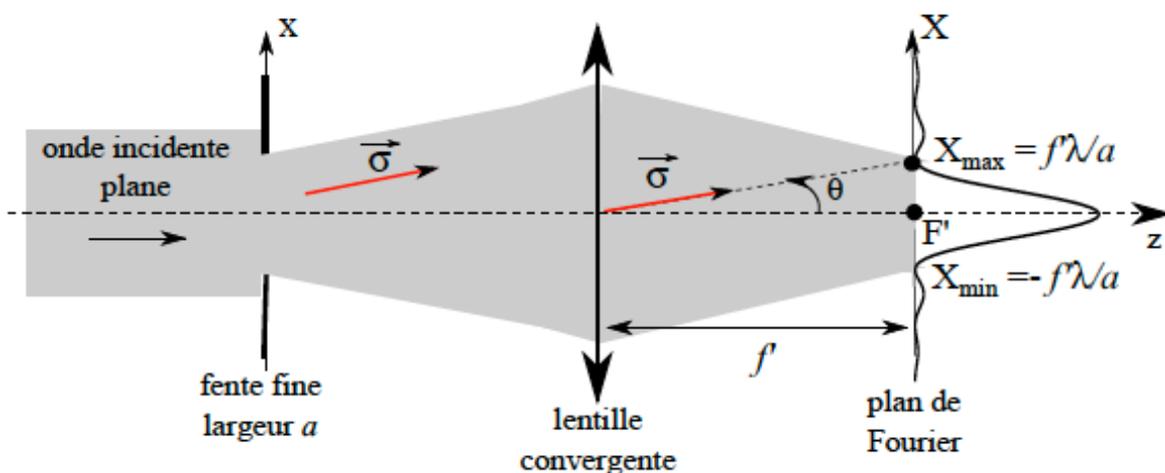
$$\sigma_z = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \sigma_x^2}$$

dans les conditions de Gauss, et dans le plan de Fourier :  $\frac{\bar{k}}{k} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \frac{O'M}{O'M} \approx \frac{O'M}{f'}$ .

L'intensité lumineuse dans le plan de Fourier :  $I_F(X) \propto |\hat{T}(\sigma)|^2 = I_0 \text{sinc}^2(\pi\sigma_x b) = I_0 \text{sinc}^2\left(\pi \frac{X}{\lambda_0 f'} b\right) \Rightarrow \Delta\sigma_x \cdot b \approx 2$

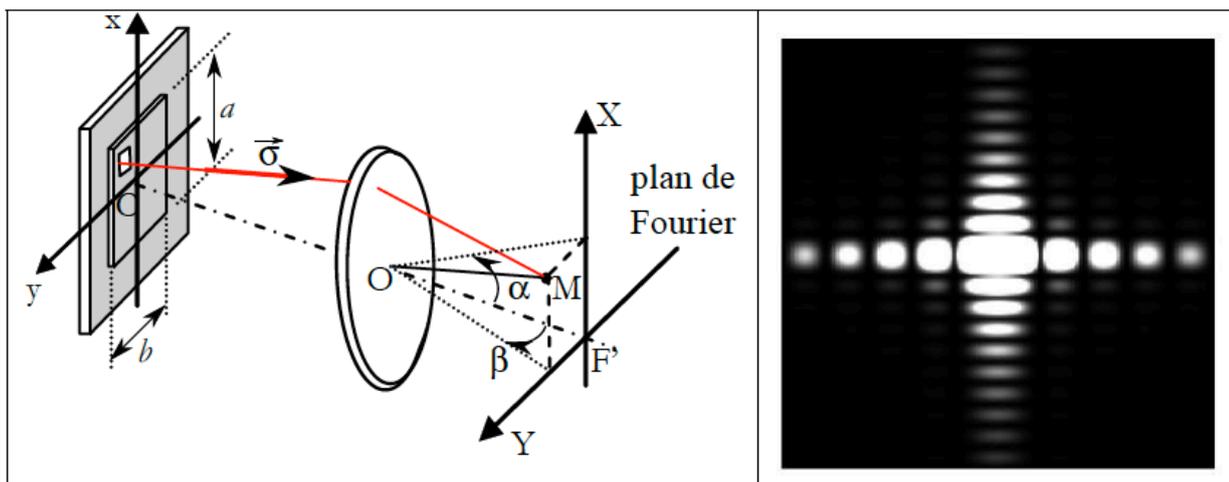
- soit pour une fente rectangulaire de largeur b, décrite par une transparence de type « fonction porte » :

$$\hat{T}(\sigma_x) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \exp(-j2\pi\sigma_x x) dx = b \frac{\sin(\pi\sigma_x b)}{(\pi\sigma_x b)} = b \text{sinc}\left(\pi \frac{X}{\lambda_0 f'} b\right), \text{ On en déduit la répartition d'éclairement dans le plan de Fourier :}$$

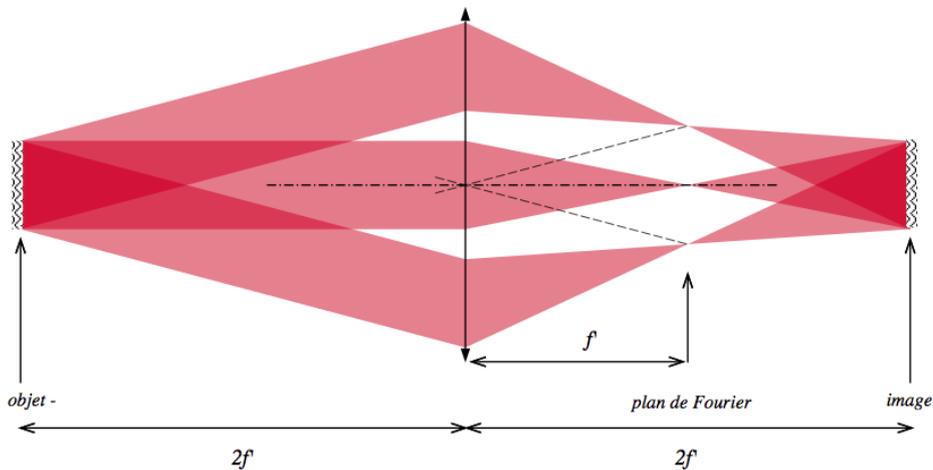


**Propriétés à connaître :**

- Symétrie et dimensions caractéristiques : la figure de diffraction respecte la symétrie de l'objet diffractant, mais avec des dimensions inversement proportionnelles. Si  $a$  est une dimension caractéristique de l'objet diffractant dans une direction donnée, la dimension caractéristique de la figure de diffraction dans la même direction varie en  $1/a$ . La figure de diffraction s'étale d'autant plus suivant la direction de son plus petit côté.
- Une rotation de l'ouverture dans son propre plan provoque une rotation de la figure de diffraction dans le même sens (rotation des axes  $F'X$  et  $F'Y$  comme les axes  $Cx$  et  $Cy$ ).
- Une dilatation de l'ouverture provoque un rétrécissement de sa figure de diffraction :  $\theta \nearrow$  si  $a \searrow$ .
- La translation de l'objet diffractant dans son plan n'a aucun effet sur la figure de diffraction sous réserve que l'ouverture reste complètement éclairée par l'onde plane incidente (l'amplitude diffractée est déphasée de façon homogène, ce qui n'a pas d'effet sur l'intensité ou l'éclairement). Quelle que soit la position de l'objet diffractant dans le faisceau lumineux, **la figure de diffraction reste centrée sur l'image géométrique de la source lumineuse, seule compte la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  ou  $\vec{\sigma}$ .**

**4. NOTION DE FILTRAGE OPTIQUE.****4.1. Le principe du filtrage optique.****Définitions:**

- La représentation concrète du **stéréospectre** (spatial) dans le plan de Fourier permet d'agir sur ce spectre de façon comparable à l'action d'un filtre électronique sur le spectre fréquentiel d'un signal électrique.
- Un objet mince est éclairé par un faisceau laser élargi. Une lentille convergente en donne une image sur un écran éloigné, par un montage de **Silbermann de type  $2f'-2f'$**  par exemple (le moins encombrant sur une paillasse). Le grandissement transversal vaut alors  $\gamma = -1$ .
- En modifiant la distribution d'amplitude complexe dans le plan de Fourier, on modifie le stéréospectre de l'onde diffractée et donc l'image de l'objet.
- Comme dans tout problème de filtrage il est important de bien définir les grandeurs d'entrée et de sortie : on peut choisir l'**amplitude complexe de l'onde diffractée**  $\underline{s}_d(x, y, z = 0^+, t)$  juste après la lame (qui est proportionnelle à la fonction transparence de la lame) pour grandeur d'entrée. Puis on choisit comme grandeur de sortie, l'**amplitude de l'onde dans le plan de Fourier**. Mais ces amplitudes complexes ne sont pas accessibles aux mesures optiques
- Une autre façon de considérer le filtrage est de définir comme l'entrée du dispositif de **filtrage l'intensité dans le plan image en l'absence de cache ou filtre**. On choisit alors comme grandeur de sortie l'**intensité dans le plan de l'image en présence de cache ou filtre**.



La lentille établit une correspondance entre la direction  $\theta$  et le foyer secondaire  $F'_\theta$ ; autrement dit elle exploite la décomposition en ondes planes de la lumière diffractée en amont de la lame, et en associant à chaque onde plane un point de son plan focal image, elle réalise l'opération de transformation de Fourier décrite précédemment. La carte d'intensité dans le plan focal image reflète l'intensité en fonction de la direction, d'où le nom de plan de Fourier. La lentille permet aussi de projeter l'image de l'objet diffractant (la lame) dans le plan conjugué image sur un écran.

**4.2. Des exemples d'expériences de filtrage optique.**

**a) Filtrage en amplitude :**

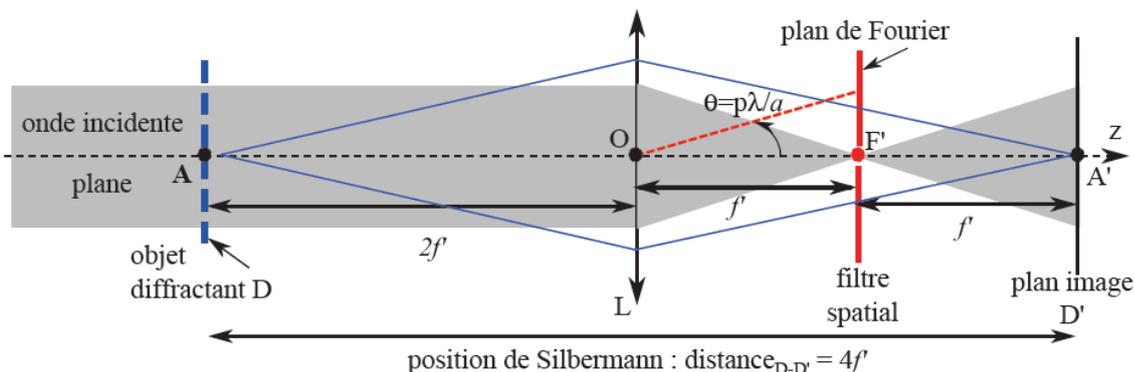
- Filtre passe-bas : cas d'un diaphragme centré sur  $F'$ .
  
- Filtre passe-haut ; cas d'un cache centré sur  $F'$ .
  
- Expérience d'Abbe ; cas d'un détramage d'une photo.

L'expérience dite d'Abbe a pour but d'illustrer le rôle de la diffraction en formation des images et de montrer qu'il est possible de modifier l'image géométrique d'un objet par un système optique en agissant directement sur le spectre de ses fréquences spatiales, par l'action d'un filtre spatial. C'est l'analogue en imagerie du filtrage temporel utilisé en électricité pour modifier le spectre en fréquences de signaux fonction du temps.

Le montage expérimental est schématisé sur la figure 3.2. La lentille joue ici deux rôles :

- elle permet d'obtenir, dans son plan focal image, le plan de Fourier associé à l'objet diffractant D.
- elle projette l'image de l'objet D dans le plan  $D_0$  conjugué avec le plan objet D.

Il convient de placer le filtre spatial dans le plan de Fourier (plan focal de  $L_1$ ).



**Propriétés à connaître :**

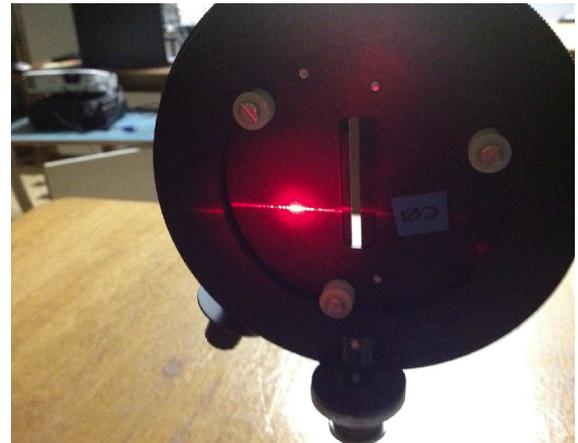
L'expérience d'Abbe consiste en un **filtrage passe-bas** du stéréospectre fréquentiel de l'objet diffractant.

**Observations à connaître :**

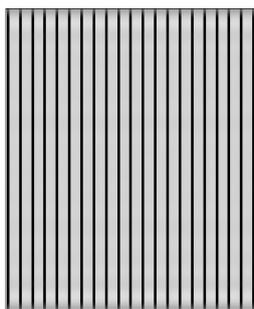
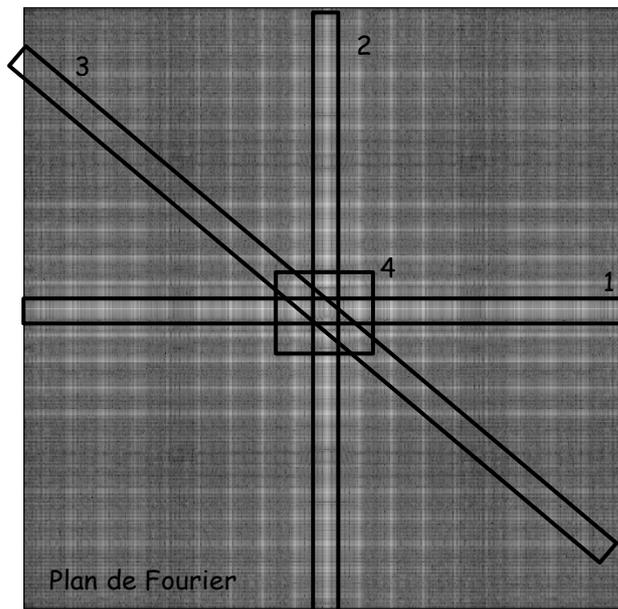
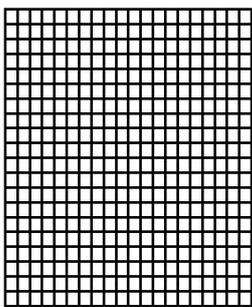
Dans l'expérience la plus simple, on utilise comme objet un grillage de faible pas  $a$  selon  $Ox$  et  $Oy$  et on supprime, au moyen de petits écrans ou diaphragmes certaines composantes (fréquences spatiales  $\sigma_x$  ou  $\sigma_y$ ) du stéréospectre dans le plan de Fourier.

En considérant le grillage comme un réseau à deux dimensions, les composantes du stéréospectre sont centrées sur les points du plan de Fourier

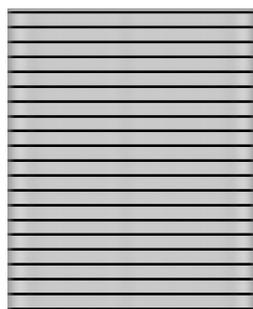
de coordonnées :  $X_p = pf' \cdot \frac{\lambda_0}{a}$ , et  $Y_q = qf' \cdot \frac{\lambda_0}{a}$  avec  $p$  et  $q$  deux entiers relatif.



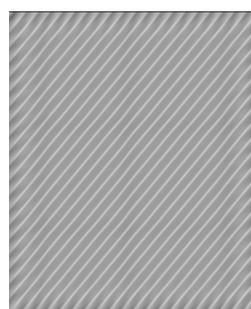
La grille



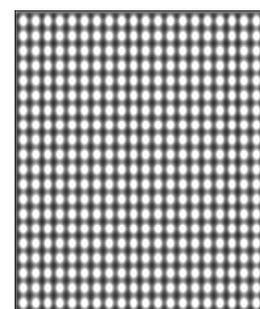
Cadre 1



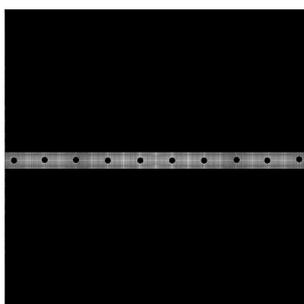
Cadre 2



Cadre 3



Cadre 4



Plan de Fourier

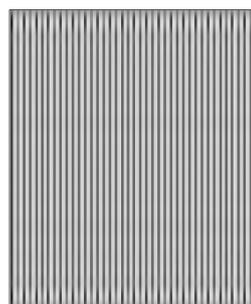
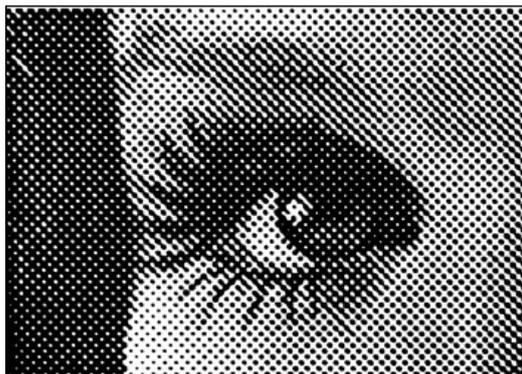


Image Filtrée

A partir d'une photo tramée... avec le logiciel de traitement d'image **ImageJ**



Plan de Fourier

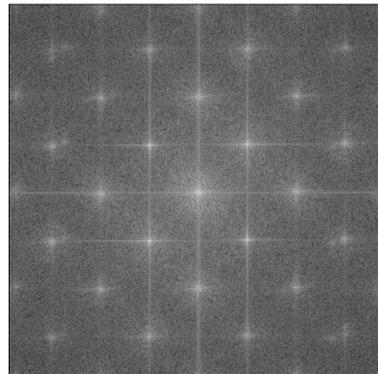
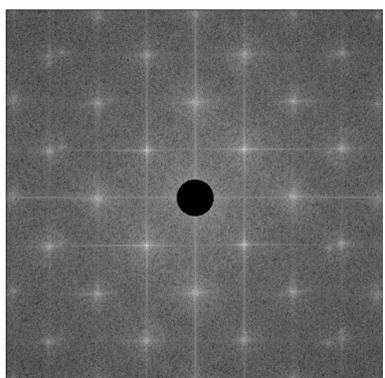
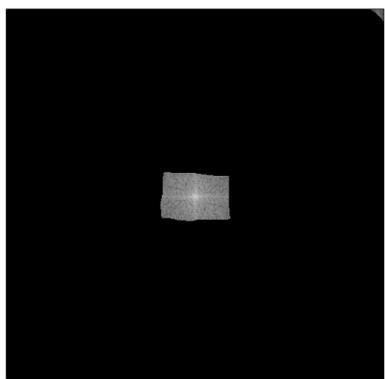
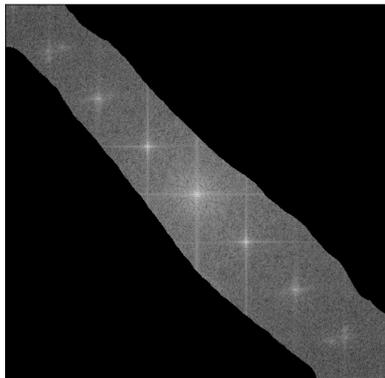


Image filtrée



**b) Filtrage des objets de phase :**

- **Strioscopie = filtre passe-haut.**

En l'absence de cache, on peut raisonner dans le cadre de l'optique géométrique. On s'attend donc à récupérer dans le plan image (A') une intensité  $I(x') = I(-x')$  où les signe - vient du grandissement (configuration de Silbermann  $2f'-2f'$ ). Dans le cas d'une lame de phase, dont le module  $\left| \exp(-j\psi(x)) \right|$  vaut 1, l'intensité  $I(x')$  est uniforme et on ne voit donc qu'un **fond uniforme**.

En particulier le fond uniforme d'une lame d'amplitude donne une composante de Fourier telles qu'on ait  $\sigma_x = 0$  et donc  $\theta = 0$  : cette composante est donc localisée en F' et par conséquent coupée par le cache.

Ainsi tout se passe comme si on avait mis une lame (A) sans fond uniforme et pas mis de cache : on comprend que le fond uniforme et les basses fréquences spatiales de (A) soient perdues dans l'image (A').

Quand on utilise une lame de phase avec  $|\psi(x)| \ll 2\pi$ , on peut faire un développement limité de la transparence complexe :  $\underline{t}(x) = \exp(-j\psi(x)) \approx 1 - j\psi(x)$ .

Le cache coupe la composante de Fourier associée au fond continu décrit par le 1 sans perturber  $\psi(x)$  car sa valeur moyenne est nulle. On peut donc écrire pour la transparence filtrée :

$$\underline{t}^*(x) \approx j\psi(x) = |\psi(x)| \exp\left(\pm j\frac{\pi}{2}\right)$$

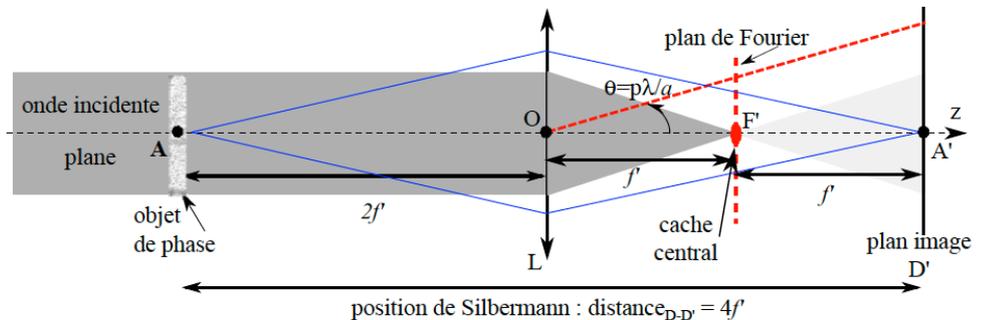
On récupère donc une intensité dans le plan image :  $I'(x') = \left| \underline{t}^*(-x) \right|^2 = |\psi(-x)|^2$

On parle naturellement de filtrage optique par analogie avec le filtrage de signaux électriques. Le cache qui coupe la composante continue et laisse passer les composantes de Fourier de pulsation spatiale élevées (donc petites distances spatiales ou détails d'une image) est l'analogie d'un filtre passe-haut.

On peut noter qu'un cache de largeur  $2a$  possède une fonction de transfert variant beaucoup plus brutalement que celle d'un circuit RC car :  $H(\sigma_x) = 0$  si  $|\sigma_x| \leq \sigma_c$  et  $H(\sigma_x) = 1$  si  $|\sigma_x| > \sigma_c$ .

**Propriétés à connaître :**

Une expérience de strioscopie consiste en un filtrage passe-haut du stéréospectre fréquentiel de l'objet diffractant.

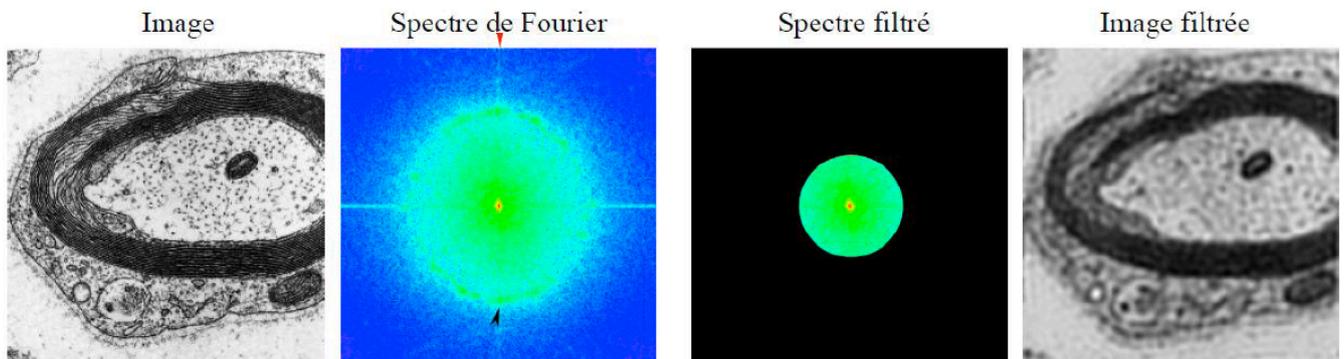
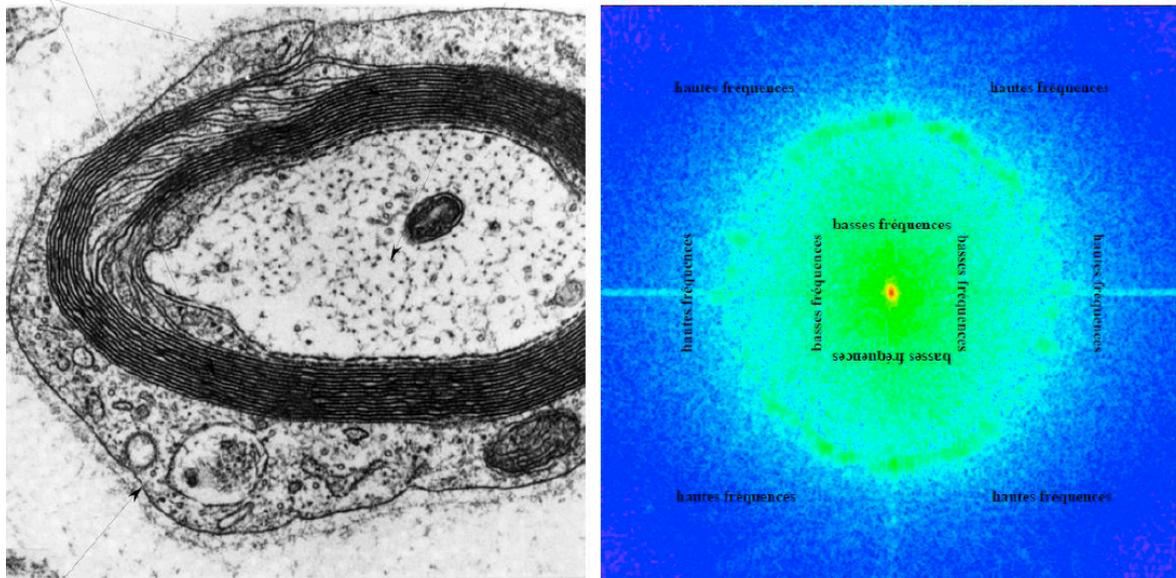


- **Foucaultage**

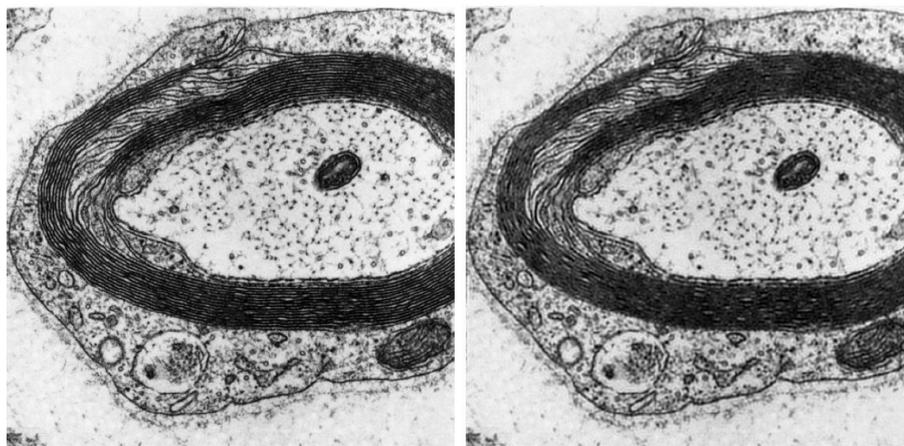
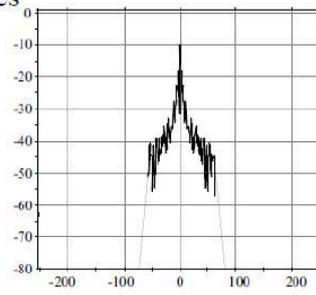
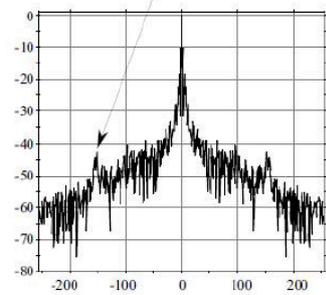
La technique du foucaultage (de Léon Foucault), bien connue des astronomes amateurs, permet de détecter les défauts d'un système optique tel qu'un miroir. On éclaire à l'aide d'une source ponctuelle ce miroir que l'on peut considérer, du fait de ses faibles aberrations géométriques, comme un objet de phase faible. Dans le plan conjugué de la source par rapport au miroir, on cache, en plus de la fréquence spatiale nulle, la moitié des fréquences spatiales de l'objet.

L'image du miroir qui se forme sur la rétine apparaît sur fond noir avec une répartition dissymétrique de l'intensité, ce qui met en évidence les imperfections de l'objet, comme si on avait éclairé le miroir sous incidence rasante : le côté d'une "bosse" qui reçoit la lumière paraît clair, alors que l'autre paraît sombre.

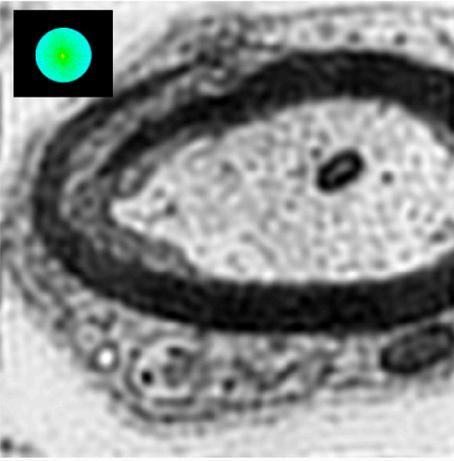
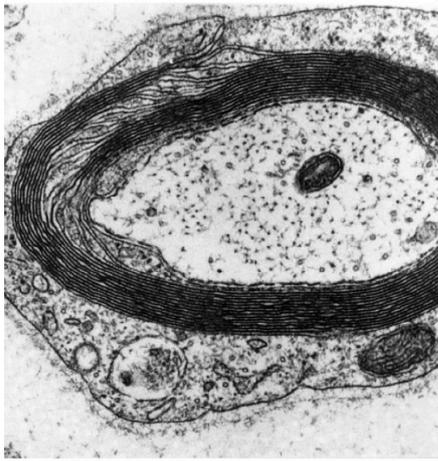
Annexe : Principe du filtrage spatial ; passage du domaine spatial au domaine fréquentiel de Fourier



→ Transformée de Fourier
→ Coupe des hautes fréquences spatiales
→ Transformée de Fourier inverse



Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 128<sup>e</sup> harmonique)



Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 32<sup>e</sup> harmonique)

Image filtrée

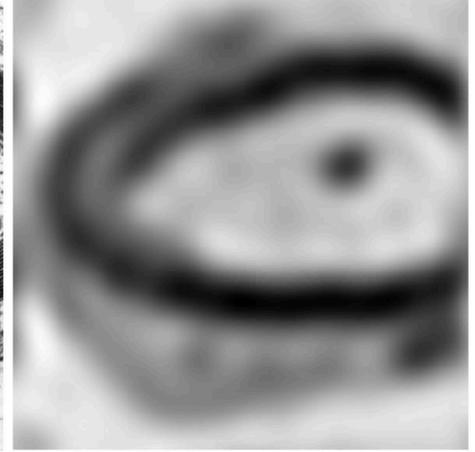
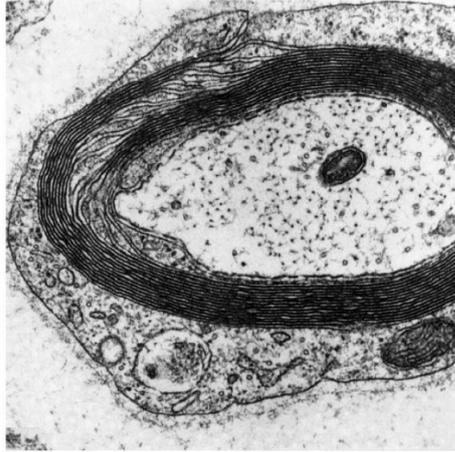
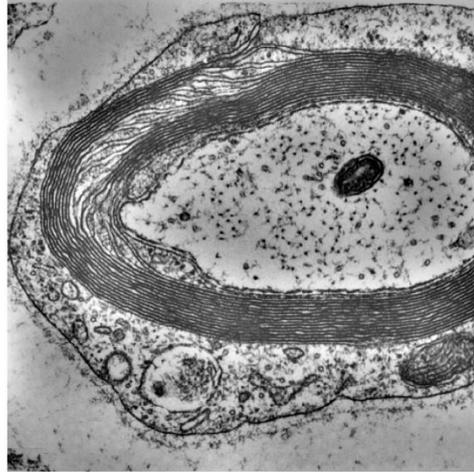
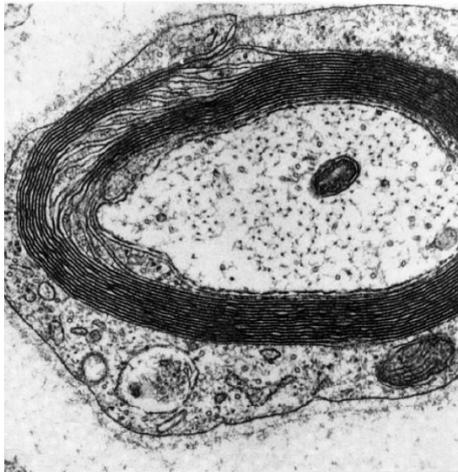


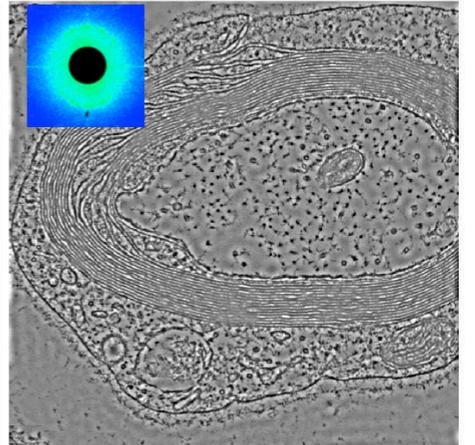
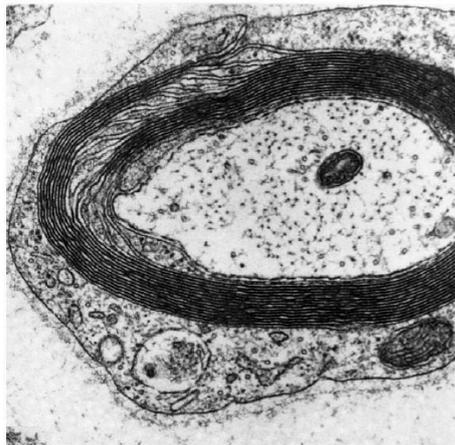
Image brute

Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 8<sup>e</sup> harmonique)



Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 4<sup>e</sup> harmonique)

Image filtrée



Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 32<sup>e</sup> harmonique)

**Capacités exigibles :**

- Construire l'onde transmise par superposition de trois ondes planes définies par la condition aux limites sur le réseau. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.
- **Relier une fréquence spatiale du spectre de la mire à la position d'un point du plan de Fourier. Relier l'amplitude de l'onde en ce point à la composante du spectre de Fourier correspondant.**
- **Interpréter les observations dans le plan de Fourier.**
- **Relier une fréquence spatiale du spectre de la fente à la position d'un point du plan de Fourier. Relier l'amplitude de l'onde en ce point à la composante du spectre de Fourier correspondant.**
- **Interpréter les observations dans le plan de Fourier.**
- Faire le lien avec la relation  $\sin \theta = \lambda/a$  vue en première année.
- **Utiliser l'analyse de Fourier pour interpréter les effets d'un filtrage de fréquences spatiales dans le plan de Fourier.**

Annexe : rappels sur la transformée de Fourier.

Plus généralement, toute fonction non périodique du temps est la somme de composantes sinusoïdales dont les fréquences  $V$  couvrent a priori tout le domaine entre 0 et l'infini. Il s'avère préférable en pratique de décomposer les fonctions sinusoïdales en exponentielles complexes, ce qui revient à utiliser des fréquences algébriques comprises entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . L'amplitude complexe de la composante de Fourier décrivant la bande spectrale infinitésimale  $[v, v + dv]$  est naturellement proportionnelle à  $V$ , donc on peut écrire :

$$s(t) = \sum dA(v) \exp(j2\pi vt) \text{ avec } dA(v) = \hat{S}(v) dv$$

soit 
$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(v) \exp(j2\pi vt) dv$$
 en passant à la limite continue.

La fonction  $\hat{S}(v)$  renseigne par son module sur les amplitudes relatives des composantes de Fourier et par son argument sur leurs phases relatives.

**Définition** : pour un signal non périodique

Comme pour les coefficients d'un DSF, le programme ne prévoit aucun calcul de la densité spectrale d'amplitude  $\hat{S}(v)$  mais nous donnons

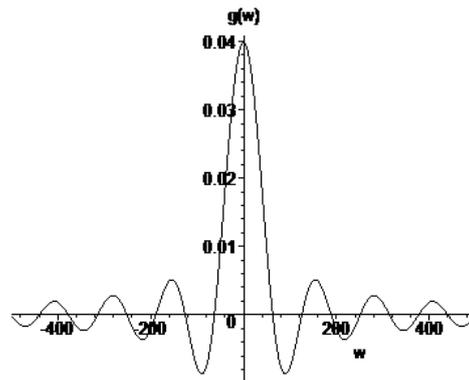
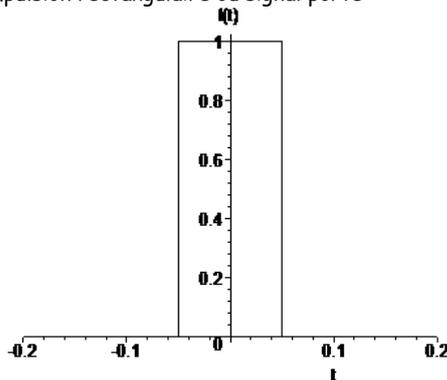
ici de manière informelle son expression : 
$$\hat{S}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \exp(-j2\pi vt) dt = TF[s(t)]$$

qui conduit à définir la transformée de Fourier  $\hat{S}(v)$  de  $s(t)$  qu'on note TF en abrégé.

Le module de  $\hat{S}(v)$  constitue le **spectre continu** du signal  $s(t)$ .

Exemples

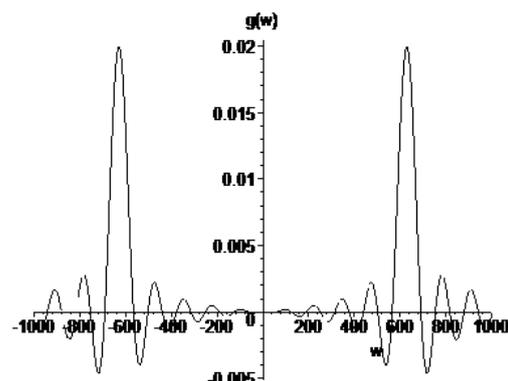
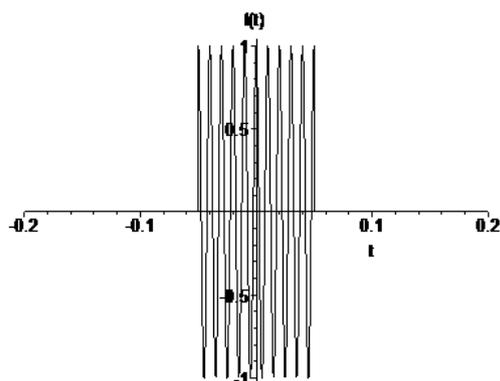
- Impulsion rectangulaire ou signal porte



Soit  $\tau$  la durée de l'impulsion,  $\Delta v$  la largeur à mi-hauteur du pic de la densité spectrale

$$\tau \cdot \Delta v \approx 1$$

- Train de sinusoïdes



Tracés effectués pour un train de durée  $\tau = 0,1$  s et un signal sinusoïdal à  $v_0 = 100$  Hz