# MP 19
# Condensateurs et effets capacitifs. Applications.

Robin et Michel*

2011/2012

## Prérequis

- électrocinétique
- représentation complexe des grandeurs périodiques
- électromagnétisme
- correspondance AdS/CFT

## Table des matières

**1 Le dipôle capacitif : prototype et mesure** 2
1.1 Condensateur d'Aepinus . . . . . 2
1.2 Détermination d'une capacité par un multivibrateur astable . . . . . 3

**2 Exemples d'effets capacitifs** 4
2.1 Slew rate d'un amplificateur opérationnel . . . . . 4
2.2 Effets capacitifs dans un câble coaxial . . . . . 5

**3 Utilisations des effets capacitifs** 6
3.1 Le filtre RC . . . . . 6
3.2 Introduction aux capteurs capacimétriques . . . . . 7

## Remarques liminaires

Allez lire les comptes-rendus des années précédentes. Comme ce montage (dit « jackpot ») est une clé de succès aux oraux, dont le secret se transmet de bouche d'agrégé à oreille d'agrégatif depuis des années, nous n'avons pas révolutionné le plan. Cela dit, placer la mesure du slew rate d'un amplificateur opérationnel est, disons, expérimental, et pas forcément un bon plan (on verra à quel point râlent les correcteurs), même si ça nous semble amusant. Et la dernière expérience est ... vous verrez bien. Par ailleurs, il y a probablement au moins une manip de trop si on veut que ça tienne en quarante minutes.

Toute une ribambelle d'autres expériences sont possibles. Suit une liste non exhaustive.

- mesure : par charge décharge avec un créneau (Quaranta IV)
- mesure : avec un oscillateur de Wien (oscillations de pulsation $1/RC$ ; Duffait)
- mesure : par la fréquence de coupure d'un filtre RC
- mesure : résonance d'un circuit RLC
- mesure : pont de Sauty (Quaranta IV, Duffait)
- mesure : modèle de capacimètre numérique (Quaranta IV)
- mesure : capacimètre numérique avec un microcontrôleur
- mesure : mesure d'impédance par détection synchrone (Duffait p.14)
- caractérisation : mesure de l'énergie emmagasinée (Quaranta IV)
- caractérisation : résistance de fuite du condensateur (Journeaux, TP de physique)
- effet capacitif : dans bobine (Journeaux, TP de physique)
- caractérisation : utiliser un condensateur d'accord à lames (utilisé pour les radios d'antan, il y en a dans la collection à « condensateurs à air »), au lieu du condensateur d'Aepinus ; cela permet, en le plongeant dans un liquide (isolant, genre de l'acétone qui est très polarisable), de montrer le rôle du diélectrique (et de mesurer la permittivité relative du liquide, sauf que c'est foireux parce que les impuretés la modifient beaucoup)
- application : détecteur de crêtes et démodulation (Duffait)
- application : échantillonneur-bloqueur (Duffait)
- application : principe du flash

Pour le principe de fonctionnement des capacimètres et RCL-mètres modernes, lire *Techniques de l'ingénieur* R1078 et R1079 (c'est mieux que rien). On lira aussi *Martine mesure une capacité* (du même auteur que l'excellent *Martine et la sonde haute impédance*). Une liste des $\varepsilon_r$ de différents matériaux, avec la fréquence d'essai, est donnée page 144 du Bruhat d'électricité.

## Introduction

C'est en octobre 1745, soit deux siècles avant la défaite du Troisième Reich contre les Forces Alliées, qu'Ewald Georg von Kleist de Pomeranie découvrit expérimentalement le principe du condensateur, à l'aide d'appareils ressemblant à ce qu'on appellerait plus tard des bouteilles de Leyde. Depuis lors, l'humanité a de beaucoup amélioré sa compréhension des effets capacitifs, dont l'importance semble atteindre son apogée dans la vie de l'Homme Moderne.

## 1. Le dipôle capacitif : prototype et mesure

Un dipôle purement capacitif (ou capacité idéale, ou, par abus de langage, condensateur idéal) est un dipôle linéaire vérifiant la relation caractéristique

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

où $C$ est une constante appelée **capacité** du condensateur, exprimée en Farad (F).

Dans la réalité, un condensateur est un dipôle principalement capacitif dans un certain domaine de fréquence. Il y a toujours une résistance de fuite qui fait que le condensateur se décharge lentement, même s'il est isolé électriquement du reste de l'univers, et une inductance, qui n'a une importance qu'à haute fréquence.

### 1.1. Condensateur d'Aepinus

**références** : Quaranta IV (et Cap Prépa PC-PC*, Jackson)

La réalisation la plus simple qu'on puisse imaginer d'un condensateur est le condensateur plan. Dans le cadre de l'ARQS électrique et en négligeant les effets de bord [1] deux surfaces métalliques identiques,

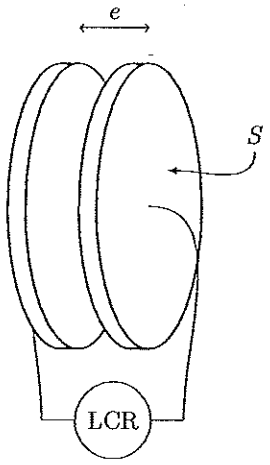
(1). Si on néglige les effets de bord, on obtient que les équipotentielles sont parallèles aux plaques. Quand on les prend en compte, on se rend compte que les équipotentielles se courbent au bord (pour se refermer de l'autre côté de la plaque),

d'aire $S$, séparées d'une distance $e$ par un milieu diélectrique de permittivité relative [2] $\epsilon_r$ forment un condensateur [3] de capacité

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} \tag{3}$$

On va vérifier (en partie) cette loi grâce au condensateur d'AepinusfootnoteFranz Aepinus (1724 - 1802), physicien allemand., qui permet de faire varier la distance $e \ll \sqrt{S}$ séparant deux plaques en métal. Dans ce but, on relie le condensateur d'Aepinus à un dispositif de mesure de capacité, et on trace la capacité mesurée $C$ en fonction de $1/e$. On obtient normalement une droite de pente $\epsilon_0 \epsilon_r S$.

Les capacités que l'on mesure sont de l'ordre du picofarad ($10^{-12}$ F), ce qui est de l'ordre des capacités parasites dues aux cables [4]. On utilise donc les câbles les plus petits possibles, et on les éloigne autant que possible. Par ailleurs, les câbles peuvent agir comme une inductance, ce qui risque aussi de fausser la mesure. Ainsi, on fixe les câbles au plan de travail avec du ruban adhésif, de manière à ce qu'une éventuelle erreur significative soit une erreur systématique, qu'on pourrait éventuellement soustraire. On choisit aussi d'utiliser un capacimètre commercial : un Fluke 187 ou un LCR-mètre en mode capacimètre.




En estimant $\epsilon_r(\text{air}) \approx 1$ et en mesurant $S$, on calcule une valeur attendue $\epsilon S =$ $\pm$ F m et on détermine une pente $\epsilon S =$ $\pm$ F m [5].

## 1.2. Détermination d'une capacité par un multivibrateur astable

**références** : Duffait Lievre (ch. VIII oscillateurs)

Pour mesurer une capacité, on va utiliser une méthode simple et élégante. On fabrique un multivibrateur astable dont l'intégrateur utilise le condensateur dont on veut mesurer la capacité $C$. La période du signal créneau en sortie est

ce qui fait que le champ est plus important au bord (le calcul peut se faire en utilisant une transformation conforme (de Schwarz-Christoffel), comme la transformation de Joukovski que nous chérissons tous). C'est un problème dans le cas de systèmes à haute tension, parce que cela conduit à des étincelles. Pour éviter cela, on utilise des plaques aux bords arrondis (profil de Rogowski). La capacité est légèrement sous-estimée par la formule habituelle. H. B. Palmer (1927) obtient, pour des plaques rectangulaires $L \times \ell$ séparées de $e$ une capacité

$$C = \epsilon \frac{L\ell}{e}\left(1 + \frac{e}{\pi L} + \frac{e}{\pi L}\ln\left(\frac{2\pi L}{e}\right)\right)\left(1 + \frac{e}{\pi \ell} + \frac{e}{\pi \ell}\ln\left(\frac{2\pi \ell}{e}\right)\right) \tag{2}$$

Quand le gap entre les plaques devient comparable à leur taille, on attend une déviation sensible à la formule au premier ordre.

(2). Utiliser un milieu de forte permittivité relative permet d'obtenir une plus grande capacité. Antisèche : $\epsilon_0 = 8.854\,187 \times 10^{-12}\,\text{F m}^{-1}$. $\epsilon_r$ varie avec la fréquence, de sorte que les capacités aussi.

(3). En fait, si les plaques sont des disques de rayon $a$, on a un condensateur de capacité $C = \pi a^2/d$ en série avec une bobine d'inductance $L = \mu d/8\pi$ (Jackson).

(4). Deux câbles en regard constituent deux conducteurs séparés par un isolant, et se comportent comme un condensateur.

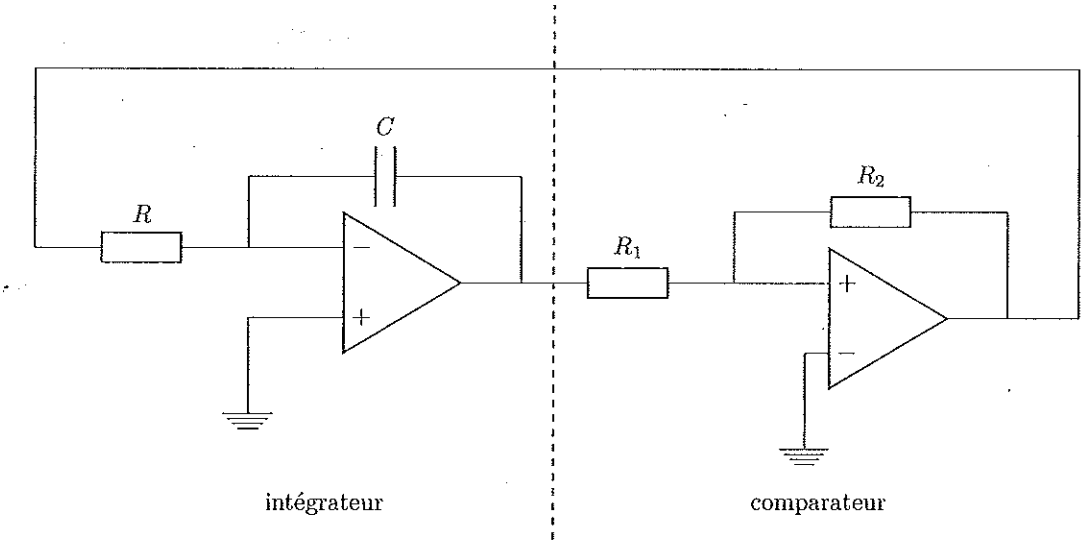
(5). Il semble que l'humidité de l'air n'explique pas de différence significative. En effet il se trouve que la permittivité relative de l'air vaut (cf. J. Fraden, *Handbook of modern sensors*)

$$\epsilon_r = 1 + \frac{211}{T(\text{Kelvin})}\left(P(\text{mmHg}) + \frac{48 P^{\text{sat,eau}}(\text{mmHg})}{T(\text{Kelvin})} H\right) 10^{-6} \tag{4}$$

où $H = 100P(\text{eau})/P^{\text{sat,eau}}(T)$ est l'humidité relative. Pour $H$ allant de 0 % à 100 %, $\epsilon_r$ varie de $10^{-7}$, toutes choses étant par ailleurs fixées. (Merci Christophe.)

$$T = 4\frac{R_1}{R_2}RC \tag{5}$$

qui est linéaire en la capacité. Normalement, ce montage permet, en connaissant les valeurs des résistances, de déterminer directement $C$ en mesurant $T$. Néanmoins, pour valider la méthode de mesure et s'affranchir d'une éventuelle erreur systématique, on commence par étalonner le système avec des capacités étalons (ou, ce qui revient plus ou moins au même, avec des condensateurs dont on mesure la capacité avec un capacimètre commercial dans lequel on a confiance).




On trace donc en préparation la période mesurée $T$ en fonction de la capacité des étalons $C$. On en tire une droite de pente ± s F$^{-1}$, à comparer avec la valeur prévue en mesurant les résitances $4\frac{R_1}{R_2}R =$ ± s F$^{-1}$ (bon, bon, des Ω si vous préférez).

Pendant le montage, on prend un condensateur, on le place dans le montage, et on mesure une période $T =$ ± s qui correspond, via la droite d'étalonnage, à une capacité $C =$ ± F, qu'on compare à la valeur donnée par un capacimètre commercial $C =$ ± F.

D'après (Duffait), on observe un faible écart entre fréquence mesurée et fréquence calculée (de l'ordre de 1 %), dû à la résistance de sortie et au slew-rate de l'AO de droite ; et ces effets diminuent si on augmente $R$. Il faut donc idéalement adapter la résistance $R$ et le modèle d'AO à la gamme de capacité que l'on souhaite mesurer. Remarquons que le slew rate est essentiellement un effet capacitif.

# 2. Exemples d'effets capacitifs

Des effets capacitifs, c'est-à-dire qu'on peut modéliser en introduisant une capacité idéale dans le circuit, ont lieu au sein de tous les appareils, et sont négligeables à prépondérants selon la fréquence où on travaille.

Les condensateurs stockent de l'énergie[6]. L'énergie stockée dans un condensateur est $1/2Cu^2$ (où $u$ est la tension à ses bornes), et comme un signal de puissance infinie n'a pas de pertinence physique, la tension aux bornes d'un condensateur est continue. La capacité mesure ainsi la difficulté à faire changer la tension aux bornes du condensateur. L'électronicien qui, s'attendant à voir brusquement changer une tension, la voit évoluer lentement, flaire à plein nez l'effet capacitif.

## 2.1. Slew rate d'un amplificateur opérationnel

références : Duffait pour la mesure du slew rate (p.86) et les données numériques, Girard pour la théorie des amplificateurs opérationnels

Le slew rate d'un amplificateur opérationnel est la vitesse d'évolution maximale de la tension qu'il est capable de supporter :

$$\mathrm{SR} = \max\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) \tag{6}$$

(6). C'est là leur moindre défaut.

En plaçant une résistance variable à un bout du câble et en annulant (autant que faire se peut) la réflexion observée à l'entrée (toujours en envoyant des impulsions), on estime l'impédance caractéristique (vue comme l'impédance de charge telle que le transfert d'énergie à la charge soit maximal) à $Z_c =$ $\pm$ $\Omega$.

On calcule alors les valeurs expérimentales des paramètres linéiques $\Lambda =$ $\pm$ $\mathrm{H\,m^{-1}}$ et $\Gamma =$ $\pm$ $\mathrm{F\,m^{-1}}$. Cela correspond *Deo juvante* à une capacité totale $\Gamma L =$ $\pm$ F, à comparer avec la valeur mesurée au capacimètre.

# 3. Utilisations des effets capacitifs

Les condensateurs sont très utiles dans la vie de tous les jours des électroniciens.

## 3.1. Le filtre RC

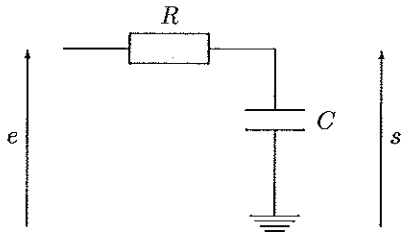
**références** : Duffait

Une des applications les plus importantes de l'électronique analogique est le filtrage, clé de voûte des systèmes de télécommunication et de traitement de données de l'ère pré-numérique, sans lesquels la société comme on la connaît n'existerait pas.

Pour fabriquer des filtres, on exploite la dépendance en fréquence de certains composants, comme le condensateur, dont l'impédance est

$$Z = \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC} \tag{12}$$

et un des filtres les plus simples qu'on peut alors fabriquer est le filtre RC




dont la fonction de transfert est

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} \tag{13}$$

et le diagramme de Bode en gain

Ainsi, si on demande à un amplificateur opérationnel de reproduire un créneau, il est possible qu'il n'y arrive pas, parce que la tension qu'il doit délivrer varie trop rapidement. Il y a alors une distorsion du signal. Le slew rate a l'allure d'un effet capacitif : quelque chose empêche une tension de varier trop brusquement. Le slew rate est dû à une limitation de courant dans l'amplificateur opérationnel et à la présence d'une capacité $C$ entre l'étage d'amplification différentielle et l'étage d'amplification en tension (entre la base et le collecteur du transistor de cet étage). Quand le slew rate se manifeste, on a un condensateur chargé à courant constant $2I$, et ainsi

$$\mathrm{SR} = \frac{2I}{C} \tag{7}$$

où $I$ est le courant de polarisation du transistor (de l'ordre de 10 pA pour un TL081, cf. Duffait p.83).

On mesure le slew rate de l'amplificateur opérationnel choisi en alimentant un amplificateur inverseur avec un créneau de grande amplitude (on prend 10 V), et en augmentant la fréquence jusqu'à ce que le signal en sortie (normalement des créneaux) ait une forme trapézoïdale. On détermine alors les pentes en montée et en descente : c'est le slew rate.

On obtient $\mathrm{SR}_\uparrow =$ $\pm$ $\mathrm{V\,s^{-1}}$ et $\mathrm{SR}_\downarrow =$ $\pm$ $\mathrm{V\,s^{-1}}$, à comparer avec la valeur attendue

$$\mathrm{SR}_\uparrow = \quad \pm \quad \mathrm{V\,s^{-1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{SR}_\downarrow = \quad \pm \quad \mathrm{V\,s^{-1}} \tag{8}$$

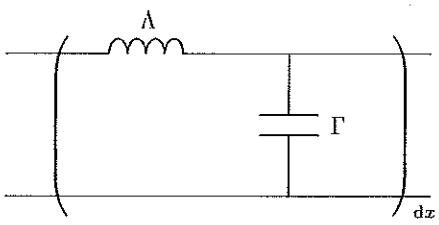
de sorte qu'on estime le slew rate à $\pm$ $\mathrm{V\,s^{-1}}$. Cela conduit (pour le TL081) à une valeur de capacité

$$C = \quad \pm \quad \mathrm{F} \tag{9}$$

## 2.2. Effets capacitifs dans un câble coaxial

**références** : Bruhat électricité

Un câble coaxial peut (dans les conditions où on se place) se modéliser comme une ligne sans perte :




avec

$$v^2 = \frac{1}{\Lambda\Gamma} \qquad \text{et} \qquad Z_\mathrm{c}^2 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \tag{10}$$

où $v$ est la vitesse de propagation du signal dans la ligne et $Z_\mathrm{c}$ l'impédance caractéristique de la ligne, qui relie les tension et intensité complexes dans le câble par telle que $\underline{U} = Z_\mathrm{c}\underline{I}$, $\Lambda$ l'inductance linéique de la ligne et $\Gamma$ sa capacité linéique. On a donc

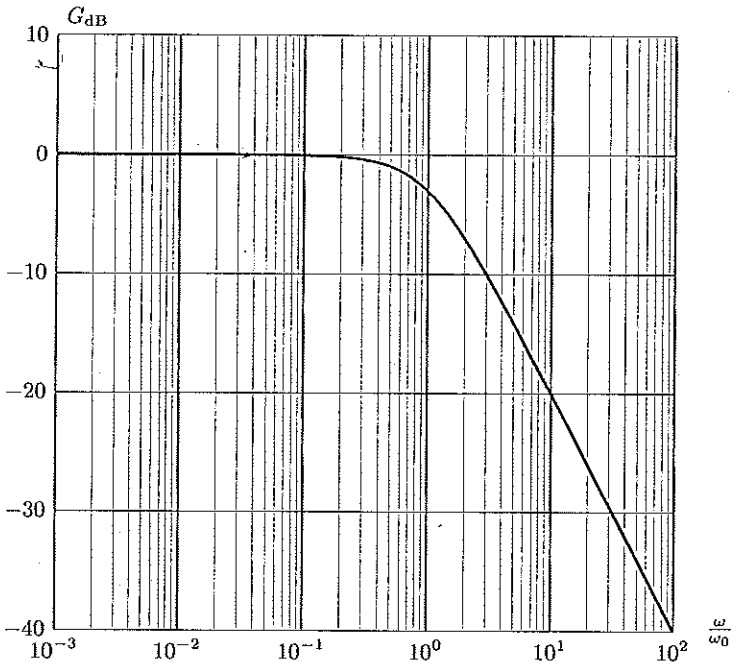
$$\Lambda = \frac{Z_\mathrm{c}}{v} \qquad \text{et} \qquad \Gamma = \frac{1}{Z_\mathrm{c} v} \tag{11}$$

On commence par brancher le câble coaxial au capacimètre à oscillateur de relaxation qu'on a présenté en première partie (avec rien à l'autre bout du câble[7]). On mesure une fréquence $f =$ $\pm$ Hz, d'où une capacité $C =$ $\pm$ F.

(S'il y a le temps.) En envoyant des impulsions (les plus courtes possibles pour éviter qu'elles se recouvrent partiellement et qu'on observe des mélanges indémêlables de signaux moches) à travers un câble coaxial de longueur $L =$ $\pm$ m[8] on mesure un temps de parcours $\Delta t =$ $\pm$ s, d'où une vitesse de propagation $v = L/\Delta t =$ $\pm$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(7). Si on place un bouchon 50 Ω, l'oscillateur n'oscille pas : il y a une résistance en série du condensateur, dont l'impédance est beaucoup plus petite que celle de la capacité à la fréquence où le circuit devrait osciller, de sorte que la résistance court-circuite la capacité et que le système n'oscille pas.

(8). Il faut (du moins on peut) prendre en compte la longueur supplémentaire due aux branchements : les câbles allant à l'oscilloscope étant identiques, on peut les oublier, mais il faut prendre en compte le câble liant le GBF à la bobine de câble coaxial (sinon, cela fait une erreur de l'ordre de 1 %, ce qui n'est pas beaucoup, mais bon)




On fabrique un filtre RC avec $R =$ $\pm$ $\Omega$ et $C =$ $\pm$ F de sorte que sa fréquence de coupure théorique est $f_c = 1/(2\pi RC) =$ $\pm$ .

On effectue le diagramme de Bode[9] en préparation, et on ajoute un point en direct. On mesure $f_c =$ $\pm$ (à $-3\,\text{dB}$). On vérifie par ailleurs que la pente du diagramme de Bode est bien de $-20\,\text{dB}$ par décade.

On montre que le filtre est effectivement un filtre en lui envoyant un créneau (on récupère un triangle), et en visualisant les transformées de Fourier de ces signaux (on observe un clair appauvrissement des harmoniques). Les personnes ayant pris le pari de sortir un analyseur de spectre quelque soit le montage peuvent le faire ici.

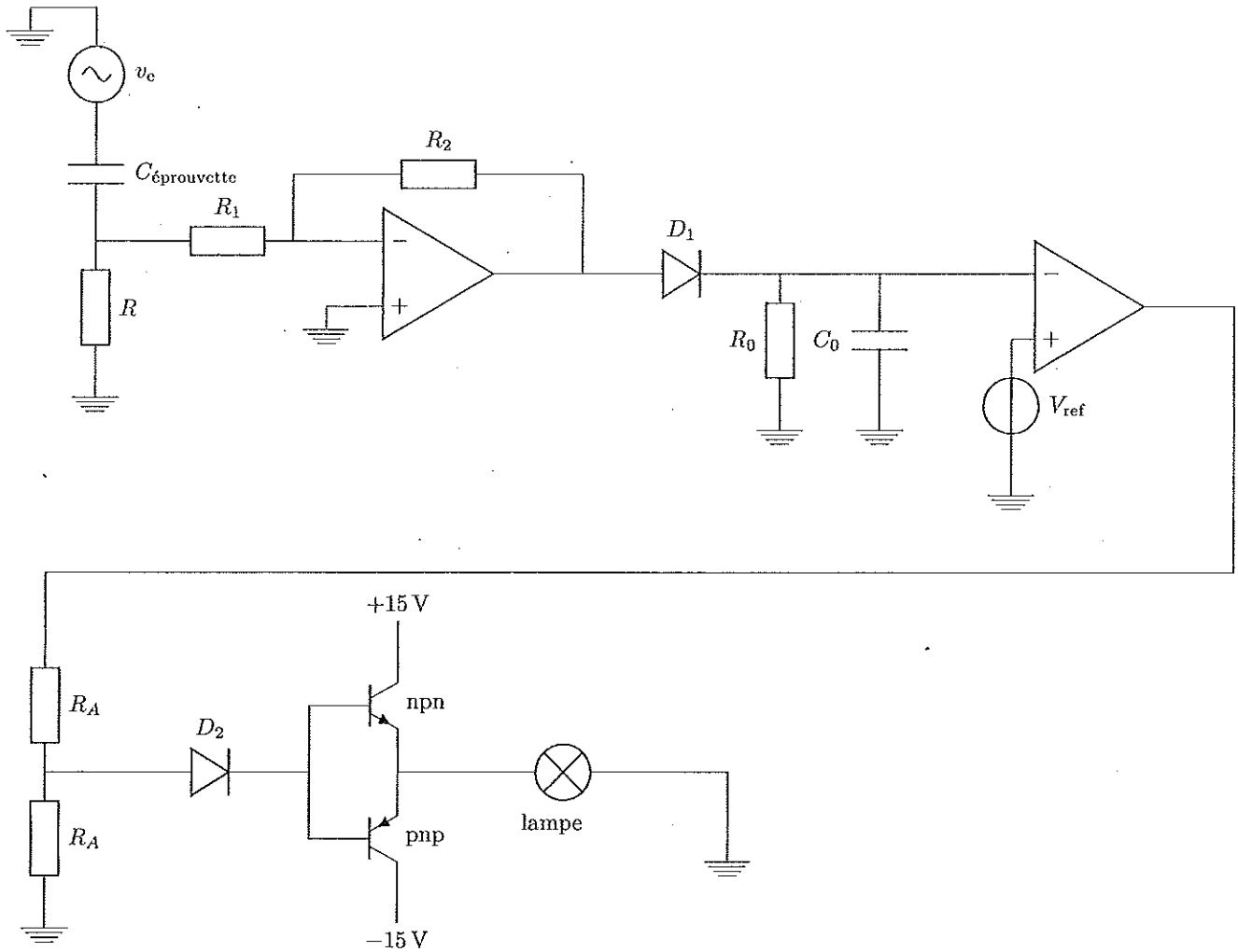
## 3.2. Introduction aux capteurs capacimétriques

On peut exploiter les effets capacitifs pour construire des capteurs. C'est sur ce principe que fonctionnent certains écrans tactiles (par exemples ceux de vos téléphones portables, y compris ceux d'une célèbre marque au nom de fruit ...) : il s'agit alors d'exploiter le changement de capacité d'un condensateur quand on en approche son doigt. C'est aussi le principe de fonctionnement de la thérémine. On va illustrer ce principe sur un détecteur de niveau d'eau, qui exploite la dépendance de la capacité en la permittivité du matériau[10]. On fabrique donc un condensateur presque plan autour d'une éprouvette (avec deux feuilles d'aluminium et du ruban adhésif), et on le place dans un circuit électrique adéquat, de sorte qu'une ampoule s'allume dès que le niveau d'eau atteint un certain seuil[11]. Ce système pourrait être utilisé conjointement avec un système bouclé pour empêcher le débordement d'un réservoir. L'intérêt par rapport à un capteur résistif est qu'il n'y a pas de contact électrique avec l'eau (et que cela marcherait avec un liquide non conducteur mais polaire comme l'acétone). Ce genre de capteur est par exemple utilisé dans les avions, pour connaître avec précision le niveau de kérosène.

(9). Si on monte beaucoup en fréquence, on observe une résonance, probablement due à une inductance parasite. On a préféré à ce propos suivre Wittgenstein : « Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen ».

(10). En prenant une feuille d'aluminium reliée à un capacimètre par une borne, et en reliant l'autre borne du capacimètre à la terre, on devrait pouvoir fabriquer un capteur de proximité (le corps humain, modélisable par une capacité, « ferme le circuit » (même sans contact) par la terre. C'est encore plus amusant. Cela dit, l'expérience du détecteur d'eau permet de souligner l'importance de la permittivité relative du matériau, ce qui est important. Par ailleurs, il se trouve qu'on condensateur voit sa capacité varier quand il s'approche du sol (puisque c'est une équipotentielle et après calcul en utilisant la théorie des images électriques). De la sorte, « on a ainsi un principe possible pour une fusée à influence, qui éclate quelques mètres avant le sol, au lieu de laisser l'obus s'enterrer d'abord, d'où des effets beaucoup plus intéressants sur ce qu'il est convenu d'appeler le personnel » (Y. Rocard, Électricité).

(11). Le seuil est à peu près reproductible. Par contre, il faut attendre que l'éprouvette sèche, parce que la couche d'eau (ou les gouttes) sur les parois suffisent à beaucoup modifier la capacité.




Le principe du circuit est le suivant :

- Grâce à un diviseur de tension entre le condensateur formé par l'éprouvette et une résistance $R$ bien choisie ($R \ll C\omega$), on obtient au milieu du pont une tension sinusoïdale proportionnelle à $C$

$$v_1 = \frac{R}{R + 1/\mathrm{j}C\omega} v_e \approx \mathrm{j}RC\omega v_e \tag{14}$$

- On amplifie cette tension avec un amplificateur inverseur (avec des résistances assez grandes pour pouvoir considérer que l'impédance d'entrée $R_1$ est infinie (devant $R$))
- On redresse la tension avec un « détecteur d'enveloppe » à diode, en choisissant $1/2\pi R_0 C_0$ grand devant $\omega$, pour obtenir une tension continue en sortie.
- On compare cette tension continue à une tension de référence $v_{\text{ref}}$ (réglée à la main avec un générateur) avec un amplificateur opérationnel en comparateur, qui délivre $\pm 15$ V selon la comparaison. Cela revient, toutes choses étant par ailleurs fixées, à comparer la capacité du condensateur à une capacité seuil. Ici, le tour est joué, on a réussi à fabriquer un signal « binaire » signalant si un niveau d'eau seuil est atteint ou pas.
- On veut allumer (ou non) une ampoule qui souhaite une tension moindre, mais une intensité plus importante. On utilise donc un diviseur de tension.
- On ajoute une diode pour avoir un signal soit nul, soit de quelques volts (sinon la lampe est soit allumée (à $-15$ V), soit allumée (à $+15$ V) ...).
- On amplifie le signal en puissance avec un push-pull (le signal est de signe constant, mais le push-pull est déjà monté dans une boîte et c'est donc plus pratique).
- On alimente une lampe avec le signal sortant de l'amplificateur de puissance.

On a pris $V_p = 10\,\mathrm{V}$, $f = \omega/2\pi = 1\,\mathrm{kHz}$, $R = 200\,\mathrm{k\Omega}$, $R_1 = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $R_2 = 10\,\mathrm{M\Omega}$, $D_1 = D_2 = 1\mathrm{N}4007$, $R_0 = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $C_0 = 1\,\mu\mathrm{F}$ (donc $1/RC = 10\,\mathrm{Hz}$), $R_A = 2\,\mathrm{k\Omega}$. La capacité de l'éprouvette varie de 10 pF à 100 pF. On peut faire varier $V_{\mathrm{ref}}$ de 0 V à 12 V.

## Conclusion

Les effets capacitifs sont essentiels dans la vie de l'ingénieur en électronique, mais ils interviennent aussi dans la vie quotidienne de chacun. C'est pourquoi il est aussi important de bien les appréhender correctement pour un électronicien que d'en comprendre le fonctionnement global pour un honnête homme. Nous avons dans ce montage illustré les effets capacitifs tant dans les condensateurs, qui sont conçus pour les faire apparaître que dans divers composants électroniques où on pourrait ingénument, mais légitimement être étonné de les voir apparaître. Nous avons mis en œuvre une, sinon des méthodes de mesure de capacités, qui permettent de relier quantitativement les observations expérimentales aux prédictions théoriques, ce qui est un des piliers fondamentaux de ce qu'on appelle les sciences physiques. Enfin, nous avons illustré des applications pratiques des effets capacitifs, qui en soulignent deux grandes propriétés : la dépendance en la fréquence du comportement du condensateur, et le rôle du diélectrique le composant.(12)

(12) Je peux aussi faire des goodnotes à la main !