

# MP 20 – INDUCTION, AUTO-INDUCTION

22 mars 2018

Léa LACHAUD & Quentin MARSAL

*Action, Réaction, y a que ça qu'ils comprennent*  
CHABERT - *Les Choristes*

## Commentaires du jury

Les commentaires des dix dernières années se résument à :

**2016** : Lors de ce montage, trop de candidats abusent des expériences qualitatives et transforment la séance en une série d'expériences de cours sur l'induction et obtiennent de ce fait une note médiocre. Par ailleurs, la notion d'inductance mutuelle est souvent mal dégagée, en particulier à cause de mauvais choix dans les composants utilisés et dans la fréquence d'excitation.

**2009** : L'observation subjective d'un retard à l'allumage d'une lampe ne peut être qu'une introduction qualitative du phénomène d'auto-induction qui doit être illustré par des mesures précises et une confrontation entre la mesure et le modèle décrivant le phénomène. L'étude du rendement du transformateur n'a pas sa place dans ce montage.

## Bibliographie

- ✦ Quaranta, Dictionnaire de physique expérimentale, T. IV
- ✦ Barrandon, Maxifiches d'Électronique
- ✦ BUP n°536 et 915

## Expériences

- ✦ Vérification de la loi de Faraday
- ✦ Mesure de l'impédance d'une bobine
- ✦ Mesure d'une inductance mutuelle

## Table des matières

<b>1</b>	<b>La loi de l'induction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Auto-induction : impédance d'une bobine</b>	<b>3</b>
2.1	Mesure de l'inductance d'une bobine idéale . . . . .	3
2.2	Écarts au comportement idéal . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Inductance mutuelle et couplage de circuits</b>	<b>4</b>
3.1	Inductance mutuelle . . . . .	4
3.2	Influence sur les modes propres d'un circuit RLC . . . . .	5
3.3	Mesure du couplage critique de 2 circuit RLC . . . . .	6

## Introduction

Le phénomène d'induction électromagnétique repose sur l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

Cette équation couple avec celle de MAXWELL-AMPÈRE, les champs électrique et magnétique. Dans le cadre de l'induction, on se place en approximation des régimes quasi magnétostatiques, c'est-à-dire dans un régime où l'effet des courants domine celui des charges. Dans ces conditions, le champ magnétique est une donnée du problème, liée aux courants par le théorème d'AMPÈRE tandis que le champ électrique est au plus petit ordre non nul, le champ électrique dit induit, donné par l'équation de MAXWELL-FARADAY.

## 1 La loi de l'induction

Comme les autres équations, l'équation de M.F. est une équation locale, qui peut être intégrée sous la forme :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint -\frac{\partial B}{\partial t} dS \quad (2)$$

Soit, aux bornes d'une spire :

$$\Delta V = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3)$$

Où  $\Delta V$ , est la force électromotrice apparaissant en convention générateur entre les deux bornes de la spire,  $\phi$  est le flux total du champ magnétique à travers la spire. À partir de là, on distingue deux cas selon que l'induction est produite par un circuit mobile dans un champ statique (cas d'induction de LORENTZ), ou par un circuit fixe dans un champ variable (cas d'induction de NEUMANN). Au cours de ce montage, on s'intéressera majoritairement au cas de NEUMANN.



### Vérification de la loi de Faraday

▲ BUP 536, p. 967

⊖ 15 min

On utilise le dispositif **P77.4**. L'objectif est de mesurer la force électromotrice induite aux bornes d'une bobine, par deux autres bobines placées en configuration de HELMOLTZ, en fonction des différents paramètres possibles :  $\omega$ ,  $I_0$ ,  $\phi$ ... On impose la tension aux bornes des bobines de HELMOLTZ, la bobine centrale étant branchée directement sur l'oscilloscope. On peut d'abord faire plusieurs observations qualitatives :

- En régime stationnaire, les signaux sont en opposition : on a une quadrature entre la tension et le courant, et une autre entre le champ  $\vec{B}$  et la fem.
- La fem induite est croissante de la fréquence de la tension imposée par le GBF, et croissante de l'amplitude de cette tension.
- On peut également mettre en évidence le cas d'induction de LORENTZ, avec un champ statique, et en faisant tourner la bobine autour de son axe.

On va ici faire une mesure de la dépendance en l'angle formé par le champ et l'axe de la bobine. Pour  $10^\circ < \theta < 90^\circ$ , on mesure la moyenne des fem induites  $\frac{fem(\theta) + fem(-\theta)}{2}$  que l'on trace en fonction de  $\cos(\theta)$

La courbe obtenue est linéaire en  $\cos(\theta)$ , ce qui est la dépendance attendue (à l'exception du point en  $\theta = 0$  pour lequel on a pas corrigé le repérage de l'origine des angles). La pente peut être comparée à une valeur attendue. D'après la loi de Faraday, la fem induite vaut :

$$U = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (B_0 \cos(\omega t) \cos(\theta) NS) \quad (4)$$

La notice donne les valeurs de toutes les caractéristiques du dispositif (y compris  $B_0(I)$ ), ce qui permet d'obtenir :

$$U = -(5.85 \times 10^{-2} \text{ V}) \times \cos(\theta) \quad (5)$$

Expérimentalement, on a pu obtenir :

$$U = -((5.9 \pm 0.1) \times 10^{-2} \text{ V}) \times \cos(\theta) \quad (6)$$

La loi de Faraday montre que pour optimiser les comportements inductifs, il vaut mieux utiliser des enroulements de fil conducteur. On est alors confronté au phénomène d'auto-induction : le champ magnétique issu du courant circulant dans la bobine n'est plus négligeable, et crée lui-même une force contre-électromotrice.

## 2 Auto-induction : impédance d'une bobine

### 2.1 Mesure de l'inductance d'une bobine idéale

Dans le cas d'un enroulement pour lequel on ne peut pas négliger l'auto-induction, on distingue la fem induite par le flux propre et celle induite par le flux imposé :

$$U = -\frac{d}{dt}(\phi_p + \phi_{ext}) \quad (7)$$

Or  $\phi_p = B_p S \propto i$ . On note  $L$  le coefficient de proportionnalité entre  $i$  et  $\phi_p$ . Ainsi, en convention générateur :

$$U = -L \frac{di}{dt} - \frac{d\phi_{ext}}{dt} \quad (8)$$

#### Mesure de $L$ via la pulsation de résonance d'un RLC

⚡ Quaranta IV par exemple

⊖ 5 min

On utilise un bête circuit  $RLC$ , avec  $R$  pas trop grand pour avoir une résonance raisonnable. On mesure la résonance en intensité (aux bornes de  $R$ ) pour que la pulsation de résonance ne dépende pas du facteur de qualité de l'oscillateur (comportement passe-bande). La résonance est repérée en mode XY grâce à la méthode de LISSAJOUS.

La pulsation de résonance dépend uniquement de la capacité et de l'inductance du circuit, mais pas de la résistance :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9)$$

$C$  est mesuré au RLC-mètre, mais pourrait être mesuré grâce au temps de charge d'un circuit  $RC$  par exemple.

Au RLC-mètre, on mesure :

$$R = 599 \pm 2 \Omega \quad \text{et} \quad C = 99 \pm 3 \text{ nF}$$

Par ailleurs, la mesure de la fréquence de résonance par la méthode de LISSAJOUS, au GBF donne :

$$f_0 = 2390 \pm 2 \text{ Hz}$$

On en déduit :

$$L = 45 \pm 1 \text{ mH} \quad (10)$$

À comparer à la valeur inscrite sur la bobine étudiée :  $L = 44.7 \text{ mH}$ .

### 2.2 Écarts au comportement idéal

Vu la discussion précédente, une bobine idéale est caractérisée par une impédance complexe :

$$\underline{Z} = Lj\omega \quad (11)$$

En pratique cependant, une bobine est constituée d'une grande longueur de fil conducteur, et présente donc également un comportement résistif, surtout visible aux basses fréquences. En hautes fréquences, peut également apparaître un comportement capacitif entre les différentes spires formant l'enroulement.

## Diagramme de Bode en Amplitude d'une bobine

⚡ Je sais pas mais c'est pas très compliqué

⊖ 5 min

On réalise cette fois un bête circuit  $RL$ . La pulsation de coupure d'un tel circuit (passe-bas en intensité) est  $\omega = \frac{R}{L}$ . En mesurant la tension aux bornes de la résistance, on a accès au courant <sup>1</sup>. On trace le gain en décibels, en fonction de la fréquence.

On distingue trois gammes de fonctionnement :

- À basse fréquence, le système a une impédance constante.
- Entre  $\approx 50$  Hz, et  $\approx 100$  kHz, on observe le comportement passe-bas d'une bobine idéale
- En très hautes fréquences, on retrouve un comportement passe-haut. Celui-ci peut s'expliquer par l'apparition de comportements capacitifs.

La mesure de la pulsation de coupure en BF permet de déterminer la résistance interne de la bobine :

$$R + R_L = \omega L = 14.07 \Omega \quad (12)$$

Soit  $R_L = 8.90 \Omega$ . Cette valeur est cohérente avec celles notées sur la bobine ( $8.75 \Omega$ ) et mesurée à l'Ohmmètre ( $8.55 \Omega$ ). La légère différence peut s'expliquer par la dépendance fréquentielle de la résistance d'une bobine <sup>2</sup>.

## 3 Inductance mutuelle et couplage de circuits

Quand deux bobines sont proches l'une de l'autre, on ne peut pas négliger leur interaction : le champ propre de chacune d'elle va induire une fem aux bornes de la bobine voisine. Il en résulte dans chaque circuit l'apparition d'une fem :

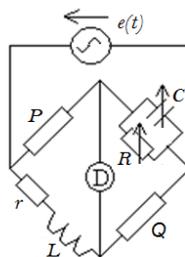
$$e_{2 \rightarrow 1} = -M \frac{di_2}{dt} \quad (13)$$

$$e_{1 \rightarrow 2} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (14)$$

où  $M$  est un coefficient de proportionnalité dépendant uniquement de la construction des bobines.

### 3.1 Inductance mutuelle

On se propose ici de déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines pour différentes distances séparant celles-ci. Pour cela, on va utiliser un montage classique permettant de mesurer l'impédance d'une bobine : le pont de MAXWELL. Dans le montage ci-dessous,  $L$  représente l'inductance de l'association en série des deux bobines à étudier, et  $r$  sa résistance interne. On dit que le pont est équilibré lorsque la différence de potentiel mesurée à l'oscilloscope



est nulle. Si on note  $Z$  l'impédance de l'association  $(R, C)$  parallèle, la relation d'équilibrage s'écrit :

$$\underline{Z}(r + jL\omega) = PQ \Leftrightarrow r + jL\omega = \frac{PQ}{R}(1 + j\omega RC)$$

Soit, en identifiant parties réelle et imaginaire :

$$r = \frac{PQ}{R} \quad \text{et} \quad L = PQC$$

On détermine l'inductance mutuelle  $M$  en mesurant  $L$  lorsque les bobines sont en configuration HELMOLTZ d'une part, et lorsqu'elles sont en ANTI-HELMOLTZ d'autre part :

1. La mesure aux alentours de 100 kHz est assez délicate en raison du comportement « coupe » du RL. Peut-être qu'il est plus aisé de travailler sur la tension aux bornes de la bobine, puisqu'une bobine idéale est passe-haut pour la tension à ses bornes.

2. En effet, en HF la résistance se met à dépendre de  $\omega$  car la section efficace du conducteur diminue par effet de peau.

$$\left. \begin{aligned} L_H &= L_1 + L_2 + 2M \\ L_{AH} &= L_1 + L_2 - 2M \end{aligned} \right\} M = \frac{L_H - L_{AH}}{4}$$

### Mesure de l'inductance mutuelle de deux bobines amovibles

☛ Quaranta IV, p.59

⊖ 10 min

On branche un fil entre les bobines du dispositif P64.18 afin que celles-ci soient en série, puis on insère le tout dans un pont de MAXWELL alimenté par un GBF à 1kHz. Les bobines sont premièrement en configuration HELMOLTZ. Débrancher tout d'abord  $R$  et, en faisant varier  $C$ , s'approcher de l'équilibre : l'amplitude du signal détecté à l'oscilloscope est alors minimale. On branche ensuite  $R$  et en agissant successivement sur  $R$  et  $C$  on affine l'équilibre. On note alors les valeurs de  $R$  et  $C$  et on en déduit  $L$  et  $r$ . Mettre les bobines en configuration anti-HELMOLTZ et recommencer. On mesure ainsi  $L_H$  et  $L_{AH}$  pour différents écarts entre les bobines et on trace  $M$  en fonction de  $d$ .

#### Remarques :

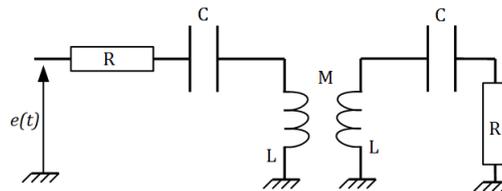
- Cette méthode ne nécessite pas de connaître  $L_1$  et  $L_2$  pour trouver  $M$ .
- En pratique, le minimum de tension à l'oscilloscope est assez dur à repérer car l'amplitude varie peu sur une grande plage de variation de  $C$ , ce qui cause une grande incertitude sur la mesure de  $C$ . Pour remédier à ça, prendre une grande tension d'entrée (10 V) pour maximiser la tension à l'oscillo et choisir  $P$  et  $Q$  faibles (100  $\Omega$ ) car alors la valeur de  $C$  qui permet de conserver  $PQC = L$  est grande, ce qui minimise l'incertitude relative sur sa mesure<sup>3</sup>. Mettre l'oscillo en mode haute résolution pour l'approche du minimum et se placer en mode moyennage ( $\times 512$  au moins, le temps de réponse est long mais les variations du signal redeviennent visibles) pour affiner le réglage de  $C$  à  $\pm 2\text{nF}$ .
- Cette méthode permet aussi de mesurer la résistance interne des bobines en faisant varier  $R$ . Ici, on ne s'intéresse qu'à  $L$  donc on peut débrancher  $R$  et se contenter de faire varier  $C$  pour trouver le minimum car la résistance interne des bobines est si faible qu'on peut prendre une impédance d'équilibrage imaginaire pure.

On réalise un ajustement affine de la courbe obtenue en échelle log, pour faire apparaître l'exposant -3 (d'après le fascicule) qui correspond à la décroissance de  $M$  en  $1/d^3$  (il s'agit d'une loi phénoménologique dont la dérivation analytique n'a rien d'évident puisqu'il faudrait connaître le champ en tout point et non uniquement sur l'axe des bobines)<sup>4</sup>.

## 3.2 Influence sur les modes propres d'un circuit RLC

C'est bien beau de mesurer des mutuelles, mais on peut se demander à quoi ça sert...

Un exemple où elles ont un effet sensible est la levée de dégénérescence des modes propres de deux oscillateurs couplés identiques<sup>5</sup>.



Quand deux oscillateurs RLC sont couplés par une inductance mutuelle, deux modes propres, symétrique et anti-symétrique apparaissent. Ils ont respectivement pour pulsation :

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}} \quad \text{et} \quad \omega_- = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}} \quad (15)$$

3. Pour le calcul de la sensibilité des ponts de mesure, cf. Baurand, Mesures Électriques, T. 1. Et oui Léo, même dans le bouquin des années 60, y a des choses à tirer!

4. D'après ce qu'il ressort de la correction, la dépendance de  $M$  en  $d$  peut s'écrire en  $M \propto \frac{1}{(d^2 + R^2)^{3/2}}$ , où  $R$  est le rayon de la bobine. C'est loin d'être incompatible avec nos mesures mais qu'on avait pas essayé faute d'avoir eu connaissance de ce modèle.

5. On a aussi vu une expérience qui avait l'air intéressante dans le BUP 915, où ils parlent de transmission de puissance et d'adaptation d'impédance, mais nous n'avons pas vraiment trouvé comment l'exploiter en montage. C'est pas sûr que ça soit très intéressant, mais ça vaut peut-être le coup d'y réfléchir à tête reposée.

## Mesure de $M$ par étude de RLC couplés

⚡ Fascicule TP élec

⊖ 3 min

On reprend les bobines utilisées précédemment, qu'on monte en deux circuits RLC couplés où  $R$  et  $C$  sont identiques. Les inductances du dispositif P64.18 valent  $L \approx 2$  mH. Pour changer un peu (et pour aller un peu plus vite), on relève la réponse à un échelon de tension aux bornes de la résistance et on trace le spectre avec Latis-Pro. On obtient deux pics dont on mesure les fréquences  $\omega_+$  et  $\omega_-$  (dans la vraie vie, on a plutôt une multitude de pics assez saes : il est conseillé d'accorder finement les résonances propres des deux circuits avant de les coupler, voir fascicule de TP).

$M$  est donnée par :

$$M = \frac{1}{2C} \left( \frac{1}{\omega_+^2} - \frac{1}{\omega_-^2} \right)$$

On a alors plus qu'à espérer que les valeurs de  $M$  des deux manips correspondent... Si ce n'est pas le cas et qu'on est désespéré, on peut toujours faire des vérifications qualitatives :

- La présence du second circuit amortit la résonance du premier
- Dans le cas où  $C_1 \neq C_2$ , la hauteur des pics se déséquilibre en faveur du plus grand des deux facteurs de qualité
- Rapprocher les bobines (et donc augmenter le couplage) augmente l'écart entre les deux résonances
- Augmenter la résistance altère l'acuité des résonances

Dans ces conditions, le montage constitue un filtre accordé sur la fréquence propre. Ce montage est utilisé dans les récepteurs radio superhétérodyne pour la sélection des fréquences intermédiaires (Exemple pour décorer, libre à vous d'aller chercher en la signification).

### 3.3 Mesure du couplage critique de 2 circuit RLC

Mesure alternative pour raccrocher la courbe  $M(d)$  de la partie 1 à quelque chose, quand les deux RLC sont accordés (même  $\omega_0$ ). Dans ces conditions, et quand le circuit primaire est excité à la fréquence de résonance, il existe un couplage critique  $M_C$  qui maximise le courant induit dans le circuit secondaire :

$$M_C = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega_0} \quad (16)$$

La théorie est détaillée dans le BUP 562. Ce phénomène peut avoir pour application le chargement de batteries à distance, et d'après M. VINCENT, on peut même arriver à allumer une ampoule de 6 V dans le secondaire.

## Conclusion

On a étudié ici l'origine physique du phénomène d'induction électromagnétique, et son corollaire, l'auto-induction. Le couplage inductif est à l'oeuvre dès lors que des conducteurs sont proches l'un de l'autre. On peut retenir diverses applications des phénomènes inductifs : freins à courants de FOUCAULT, plaque à induction, capteur inductif... Mais aussi des cas où l'on souhaite éviter l'induction : disjoncteurs, transformateurs (pertes par courants de FOUCAULT dans le noyau)...

## Remarques et autres idées de manip