

MP25 — Mesure de fréquences temporelles

5 avril 2016

Romain BERTHELARD & Paul EPRON

Une valse à mille temps
Offre seule aux amants
Trois cent trente-trois fois l'temps
De bâtir un roman
JACQUES BREL (Valse à mille temps)

Bibliographie

✎ <i>Expériences d'électronique</i> — Duffait	Pour le fréquencemètre.
✎ <i>Physique expérimentale aux concours de l'enseignement</i> — Bellier, Bouloy, Guéant	Pour le basse-bande et l'expérience avec le téléphone.
✎ <i>BUP n°867</i>	Théorie des pendules couplés (et quelques éléments sur le protocole expérimental)

Commentaires du jury

Le principe de ce montage est de présenter les différentes techniques de mesure de fréquences. Il ne s'agit pas de réaliser différentes expériences faisant intervenir des phénomènes périodiques et de parvenir à une détermination de fréquence moins précise que celle obtenue avec le fréquencemètre présent sur la paillasse.

La résolution spectrale lors d'une transformée de Fourier discrète n'est pas toujours connue. Les candidats gagneraient à connaître les méthodes de détermination de fréquence par multiplication (translation) ou hétérodyne.

Même si un stroboscope présente un intérêt pédagogique, il ne saurait être préféré à un fréquencemètre. Lorsqu'on dispose d'une méthode plus précise, l'utilisation du chronomètre n'est pas recommandée.

TABLE DES MATIÈRES

I Méthode par comptage	2
I.1 Cro-magnon (le chronomètre)	2
I.2 Gay Sapiens... euh Homo sapiens (le fréquencemètre)	2
II Un filtre passe-bande	3
II.1 Signal sinusoïdal	4
II.2 Signal carré	4
III Analyse harmonique	5
III.1 Analyse du signal rectangulaire	5
III.2 Pendules couplés	5
III.2.1 Estimation théorique des fréquences propres	5
III.2.2 L'heure de vérité	6

Introduction

Une fréquence est une grandeur qui caractérise le nombre d'occurrences d'un phénomène par unité de temps. C'est donc une grandeur fondamentale pour tout ce qui a trait aux phénomènes périodiques. Comme souvent en physique, il convient de comparer les différentes méthodes existant pour réaliser ces mesures. Les domaines de l'électronique et de l'acoustique se prêtent particulièrement bien aux fréquences que l'on va considérer, c'est-à-dire hors du domaine optique (qui se situe au delà du THz).

Quelques questions pour lesquelles on se propose de répondre durant ce montage :

- Comment mesurer une fréquence ?
- Existe-t-il plusieurs méthodes et quelles sont leurs avantages ?
- Comment faire quand le phénomène possède plusieurs fréquences ?

I Méthode par comptage

I.1 Cro-magnon (le chronomètre)

La méthode qui semble naturelle pour déterminer une fréquence consiste *a priori* à compter les événements se produisant durant un intervalle de temps donné. On peut faire ça "à la main" pour la fréquence d'oscillation d'un pendule. Il suffit de se munir d'un chronomètre et c'est parti ! Connaissant la longueur du pendule et la valeur du champ de pesanteur terrestre à l'ENS de Lyon dans l'amphi D au niveau de l'estrade où votre serviteur gesticule de façon grotesque en présentant son montage ¹, c'est assez facile d'avoir une valeur théorique pour la période du mouvement :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

La période et la fréquence sont liées par la relation :

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

Dans le cas présent, on préfère mesurer la période du phénomène plutôt que sa fréquence parce que la dynamique est lente. C'est tout simplement plus parlant. C'est un peu dans le même ordre d'idée qu'on parle de la période de révolution d'une planète et non pas de la fréquence de rotation autour du Soleil.

Dans le cas présent, on va compter n périodes du pendule. C'est plus simple et plus précis que d'essayer d'estimer l'erreur humaine du temps de réaction au passage du pendule et de combiner ça avec le chronomètre. Donc en toute simplicité, on prend 10 fois la mesure de dix périodes. On obtient une série de valeurs pour T . On utilise un p'tit script Scilab (pour changer un peu) pour calculer la moyenne et la déviation absolue qui est obtenue par la méthode de Student :

$$T = \bar{T} \pm \frac{2.26\sigma_T}{\sqrt{n}}$$

Le coefficient 2.26 est lié au fait que l'on prend 10 mesures. Ce sont des coefficients tabulés, on les trouve dans le tome "Optique" de physique expérimentale de Bellier.

I.2 Gay Sapiens... euh Homo sapiens (le fréquencemètre)

Bon et sinon on peut se servir un peu de l'électronique pour concevoir un truc qui fait le boulot à notre place. Sans compter (haha) qu'il pourra faire ça plus rapidement, donc gérer des fréquences élevées. On appelle ça un fréquencemètre ². Son principe de fonctionnement repose essentiellement sur les fonctions logiques, et je laisse Duffait vous expliquer ça en long en large et en travers dans le chapitre consacré aux convertisseurs. La flemme de tout copier, non mais oh !

Point de vue manipulation, le boîtier tout fait de la collection est approprié. Pour ne pas se faire tuer par le jury sous prétexte qu'on a une boîte noire, je suggère fortement de bien détailler le fonctionnement de chaque élément (ce sont essentiellement des portes NAND et une bascule JK), ce qui doit démystifier l'ensemble.

¹Il s'avère que vu qu'on est à la latitude 45.73° et grosso modo 170 m au dessus du niveau de la mer, on a $g = 9.8063 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. De ce fait j'ai pris $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ comme tout le monde. À Paris, si vous voulez faire les malins il faudra prendre... la même valeur puisqu'en fait ça change rien vu la différence de latitude !

²# originalité

Principe du fréquencemètre

✎ Duffait, chap XI

⌚30'

Matériel :

- alimentation continue stabilisée
- boîtier de la collection pour le principe du fréquencemètre
- deux GBF (il en faut absolument un qui est capable de délivrer 500 mHz, genre les Agilent)
- 2 ou 3 compteurs qui vont de 0 à 99 (P.70)

Montage :

Le schéma du *Duffait* se suffit à lui-même en ce qui concerne les branchements. Pour ce qui est des compteurs, on branche le premier comme indiqué. Pour afficher des digits supplémentaires, il faut les connecter entre eux. On branche la sortie "dépassement" sur l'entrée "horloge" du suivant (qui indiquera les digits des unités supérieures !). Bien penser à connecter les masses et les alimentations entre elles (il suffit d'alimenter le premier et de transmettre direct sur les autres boîtiers, ça marche très bien). Connecter également tous les RAZ entre eux, bien sûr (sinon tout le monde ne revient pas à zéro, ce serait dommage).

Le GBF à très basse fréquence est réglé à 0.5 Hz pour jouer le rôle de la porte. Pendant 1 seconde, le système compte et on affiche donc directement la fréquence sur les compteurs. Pendant 1 seconde, il laisse le résultat affiché. C'est la bascule JK qui permet de retour à zéro à la suite du comptage, cette étape prenant 2 s

Il est intéressant de comparer la valeur de la fréquence donnée par un véritable fréquencemètre avec celle du montage de principe. On constate que le fréquencemètre commercial affichera toujours des fréquences très proches (à quelques Hertz près pour les fréquences dépassant le kHz) tandis que le montage de principe peut présenter quelques problèmes :

- les mesures sont de moins en moins justes : elles s'écartent sensiblement de la valeur attendue, même si ça ne représente que quelques % de la fréquence véritable ;
- les mesures sont de moins en moins fidèles : les deux derniers chiffres changent sensiblement (quelques dizaines de Hz !) à partir de fréquences de l'ordre de 10 kHz), là où le fréquencemètre commercial n'affiche aucune variation.

Ce manque de justesse et de fidélité n'est une gêne que dans la mesure où la précision requise pour les mesures se trouve être du même ordre de grandeur. Il est certain qu'un fréquence-mètre commercial peut s'avérer plus cher que les quelques composants logiques utilisés dans le montage. Comme souvent, tout est question de compromis.

On vient de montrer l'utilisation de l'instrument de mesure par excellence pour des signaux physiques périodiques : le fréquencemètre. Son principe de fonctionnement repose tout simplement sur le comptage. Sa précision est de l'ordre de la base de temps utilisée, ce qui dans notre cas correspond au Hz. Pour des fréquences usuelles, par exemple le domaine acoustique et celui des ultra-sons, ce n'est pas une gêne et cela constitue une méthode fiable. Cependant, le comptage ne constitue pas la seule méthode de mesure possible.

II Un filtre passe-bande

Un autre moyen de détecter une fréquence est d'avoir recours à une résonance : lorsqu'un système est excité à sa fréquence de résonance, sa réponse (en amplitude) est alors maximale, et il oscille en phase avec l'excitateur. Ce phénomène de résonance est très général en physique et on peut imaginer avoir recours à des systèmes électroniques, mécaniques, optiques, etc. Dans le cadre de ce montage, on va encore recourir à l'électronique mais gardons à l'esprit que la démarche n'est pas limitée à ce domaine, la mécanique était également accessible.

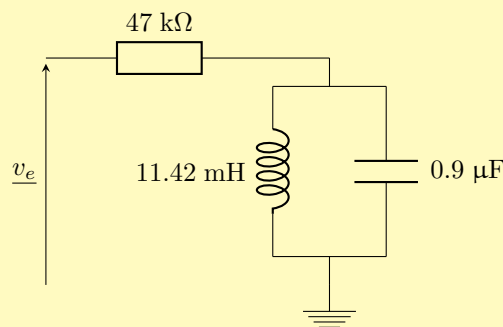
On utilise un filtre passe-bande. S'il est suffisamment sélectif, on peut s'en servir pour déterminer la fréquence d'un signal. Le montage est simple et les résultats sont très précis :

Filtre passe-bande

⚡ Bellier

⊙30'

Montage :



La tension v_e est délivrée par un GBF dont on visualise le signal sur un oscilloscope en même temps que la tension v_s aux bornes du filtre.

Fréquence de résonance (en tension) :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Je renvoie au Bellier pour les détails théoriques. La résistance est choisie de sorte que l'on puisse négliger les résistances internes des composants présents : GBF, inductance, etc. L'idée est que lorsqu'on se trouve hors de la résonance, le signal en sortie du filtre est nul ou très faible.

II.1 Signal sinusoïdal

On envoie un signal sinusoïdal dont on fait varier la fréquence. On visualise les tensions v_s et v_e simultanément en mode XY. La fréquence de résonance est visible quand on n'a plus qu'une droite au lieu d'une ellipse. Les signaux sont en phase, ce qui est typiquement de la résonance. Avec cette méthode, on obtient :

$$f_{0\text{exp}} = (1575 \pm 1) \text{ Hz}$$

On compare avec la valeur théorique, dont les incertitudes sont calculées en tenant compte des incertitudes sur les valeurs³ de L et C :

$$f_{0\text{th}} = (1579 \pm 12) \text{ Hz}$$

La mesure par cette méthode est d'une précision redoutable. En atténuant suffisamment le bruit (mode High Resolution si on veut tricher, mais le jury peut ne pas apprécier) la précision peut aller jusqu'au dixième de Hertz près, ce qui est aussi bien sinon mieux que le fréquencemètre.

II.2 Signal carré

On envoie cette fois-ci un signal carré de fréquence f_0 .

Envoyons ce signal sur le filtre que l'on utilisait précédemment : on constate que la sortie est un signal sinusoïdal de fréquence f_0 , en phase avec le signal de départ ce qui indique qu'on se trouve à la résonance pour cette fréquence. Vu qu'on utilise un filtre passe-bande, cette constatation est en fait très logique : les fréquences multiples (impairs) du fondamental ne sont pas sélectionnées par le filtre qui a une bande passante trop étroite.

Diminuons maintenant la valeur de la capacité. On augmente de ce fait la valeur de la fréquence de résonance du passe-bande. On constate à l'oscilloscope que le signal en sortie du filtre s'affaiblit considérablement dès que l'on change les valeurs de la capacité.

Cependant, si on se place à $C_1 = C/9 = 100 \text{ nF}$ alors la fréquence de résonance du filtre devient $f_1 = (2\pi LC_1)^{-1} = 3f_0$ et on constate que le signal transmis par le filtre connaît de nouveau un maximum ! C'est donc que cette fréquence faisait partie du signal carré et en changeant la fréquence de résonance du filtre, on a pu la mettre en évidence.

On change encore la valeur de la capacité et lorsqu'on arrive à $C_2 = C/25 = 36 \text{ nF}$ alors une résonance se produit de nouveau et elle correspond à $f_2 = 5f_0$.

³Mesurées au RLC-mètre, se reporter à la notice pour l'erreur estimée.

Avec cette méthode, on ne peut pas se placer en mode XY mais on repère assez bien le maximum d'amplitude de la réponse du filtre. C'est un peu moins précis, mais ça demeure très acceptable. En outre, on a accès aux valeurs des harmoniques d'un signal ce qu'un fréquencesmètre ne peut pas faire en dépit de sa précision : il affiche seulement la fréquence du fondamental.

Avec cette dernière expérience, on perçoit la nécessité d'avoir recours à un outil supplémentaire pour des signaux complexes. L'analyse de Fourier permet de décomposer les signaux périodiques en une somme de signaux harmoniques dont les fréquences sont multiples d'une fréquence fondamentale. Voyons à présent comment mettre à profit l'analyse de Fourier dans la mesure de fréquences.

III Analyse harmonique

III.1 Analyse du signal rectangulaire

On fait acquérir le signal par Latis Pro, on utilise la transformée de Fourier et on confirme qu'on a que les impairs du fondamental.

$$f_n = (2n + 1)f_0 \quad n \in \mathbb{N}$$

L'analyse de Fourier indique en effet qu'un signal de ce type est en fait une somme de signaux sinusoïdaux dont les fréquences (ou les pulsations) sont des multiples impairs du fondamental :

$$\square(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

On trouve au passage l'explication au fait que l'amplitude diminuait pour chaque résonance dans la manipulation précédente : les coefficients correspondant aux harmoniques sont de plus en plus faibles et ils sont en relation directe avec l'énergie propagée par chaque mode.

Intérêt de l'étude des harmoniques La présence d'harmoniques dans le domaine de l'électrotechnique est une gêne car les pertes sont liées à la valeur des fréquences. Sur les systèmes de transport de courant électrique, on place des circuits résonants (comme le passe-bande présenté la partie précédente). Leur sélectivité permet de prévenir le passage d'harmoniques indésirables.

III.2 Pendules couplés

On considère un système mécanique de quatre pendules couplés. Le dispositif est un oscillateur composé de 4 pendules identiques de masse m tous reliés entre eux par des ressorts de même raideur (K).

Pendules couplés

➤ BUP n°867

⊙30'

On prend le dispositif de la collection. Il est constitué de quatre pendules couplés par des ressorts supposés identiques.

Des bandes réfléchissantes sont collées sur chaque masse et on utilise une camera CCD de VIDEO COM qui capte les reflets de la lumière envoyée par les diodes électroluminescentes. Le logiciel qui va avec détient la plupart des outils nécessaires pour l'analyse du mouvement (dont la TF, bien sûr).

Il faut disposer la caméra à environ 1.40 m des dispositifs réfléchissants et s'assurer qu'elle est bien à la même hauteur que ces derniers. Si le réglage est bien fait, on voit sur la caméra (ou le logiciel) qu'il repère 4 éléments. S'assurer que c'est toujours le cas au cours du mouvement !

III.2.1 Estimation théorique des fréquences propres

Avant de se lancer dans les mesures, il est de bon goût de caractériser le système. La théorie pour les pendules couplés nous dit que la relation de dispersion pour le mode propre $p \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ d'un système à 4 degrés de liberté comme celui que l'on utilise s'exprime :

$$\omega_p^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{p\pi}{10}\right)$$

$g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: accélération de la pesanteur

ℓ : longueur du pendule pesant

K : raideur des ressorts

m : masse du pendule

Hélas, les quatre pendules ne sont pas rigoureusement identiques. On observe une légère dispersion dans la valeur des masses des pendules. Les valeurs sont entre 321 g et 329 g. On prend le parti de considérer que l'on va attribuer à chaque masse la valeur moyenne et que l'incertitude-type s'identifie à la dispersion (l'écart-type) des valeurs :

$$m = (323.4 \pm 3.5) \text{ g}$$

D'autre part, la longueur des pendules doit elle aussi être estimée. Deux mesures à la règle et l'application du théorème de Pythagore conduisent à estimer :

$$\ell = (31.2 \pm 0.6) \text{ cm}$$

Cette incertitude a été évaluée avec le logiciel GUM en considérant que pour chaque mesure intermédiaire on faisait une erreur de 5 mm.

Enfin, il a fallu estimer la valeur du rapport $\frac{K}{m}$. Pour ce faire, on immobilise les autres pendules et on en fait osciller un seul entre deux ressorts. On suppose négligeable toute action du pendule et que tout se passe comme si la masse n'était soumise qu'à la force horizontale des deux ressorts. Ce mouvement a pour pulsation théorique :

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

En enregistrant son mouvement et faisant une transformée de Fourier, on a mesuré :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = (4.30 \pm 0.08) \text{ Hz}$$

On dispose à présent de tous les éléments pour calculer les valeurs théoriques des modes propres à partir des paramètres expérimentaux ℓ , K et m . Les résultats sont regroupés dans le tableau 1. Là encore, en ce qui concerne les incertitudes, on se sert du GUM qui a le bon goût de recourir à la théorie de propagation des erreurs sans se planter, contrairement à nous, misérables entités de carbone impotentes.

TABLEAU 1: Fréquences propres théoriques du système de pendules couplés

$$f_1 = (2.081 \pm 0.004) \text{ Hz} \quad \bigg| \quad f_2 = (3.684 \pm 0.005) \text{ Hz} \quad \bigg| \quad f_3 = (5.000 \pm 0.007) \text{ Hz} \quad \bigg| \quad f_4 = (5.852 \pm 0.008) \text{ Hz}$$

III.2.2 L'heure de vérité

On initie le mouvement des pendules en appuyant brusquement sur l'un d'eux. L'idée est de simuler une réponse impulsionnelle : on excite toutes les fréquences en imposant un dirac au système. Puisque c'est un système résonant, seuls les modes propres sont supposés absorber de l'énergie et ce sont uniquement eux qui composent le mouvement résultant. Les modes propres sont indépendants, c'est-à-dire qu'ils n'échangent pas d'énergie entre eux.

On lance l'acquisition sur environ 40 s (je conseille de le faire avant de parler du paragraphe ci-dessus, puisque c'est un peu long). La nécessité d'un tel temps est une question de résolution spectrale : l'analyse de Fourier nous donne le spectre avec une résolution qui varie comme l'inverse du temps d'acquisition. Vu le temps qu'on vient de choisir, la résolution spectrale sera d'environ 0.03 Hz. C'est cette valeur qui fera office d'incertitude-type.

Une fois l'acquisition terminée, on lance l'analyse de Fourier. Dans l'idéal, il faudrait prendre un nombre de points qui soit une puissance de 2 et un nombre entiers de périodes. Le mouvement n'a visuellement pas de période que l'on puisse honnêtement déterminer et on n'a aucune idée du nombre de points que l'on prend. Il faut donc garder à l'esprit que lorsque le logiciel va exécuter la FFT il va interpoler les points manquants pour arriver au nombre de points qui lui convient et qu'on a pu introduire des harmoniques indésirables en ne sélectionnant pas un nombre entier de périodes.

Les résultats (obtenus en préparation) sont regroupés dans le tableau 2.

On constate un excellent accord entre les valeurs théoriques que l'on avait calculées et les valeurs expérimentales ! Cela valide au passage les approximations que l'on avait faites pour estimer les paramètres expérimentaux.

Ainsi, d'un mouvement (d'un signal) dont a priori on ne pouvait distinguer aucune sorte de périodicité, l'analyse de Fourier nous permet d'extraire quatre fréquences propres qui constituent à elles seules l'ensemble du mouvement. On met ainsi en évidence la puissance de ce type d'outils pour mesurer les fréquences qui composent n'importe quel signal périodique.

TABLEAU 2: Résultats expérimentaux

Mode	Fréquence théorique (Hz)	Fréquence mesurée (Hz)
1	2.081 ± 0.004	2.07 ± 0.03
2	3.684 ± 0.005	3.63 ± 0.03
3	5.000 ± 0.007	5.00 ± 0.03
4	5.852 ± 0.008	5.88 ± 0.03

Conclusion

Au cours de ce montage, on a mis en évidence des méthodes de mesures pour différents domaines de fréquences et plusieurs types de signaux. Pour de très basses fréquences, on préfère mesurer la période du phénomène plutôt que la fréquence, ce qui est tout à fait équivalent. Pour des fréquences qui dépassent l'ordre du Hz, on peut avoir recours à un outil du type fréquencesmètre qui est conçu pour compter le nombre d'occurrences d'un phénomène dans un certain intervalle de temps et qui en déduit la fréquence. Ce type de système permet de détecter des fréquences allant jusqu'à la centaine de MHz, c'est-à-dire jusqu'à la frontière du domaine radio FM. Une autre méthode consiste à utiliser une méthode basée sur la détection de résonance. Pour un système qui présente une bande passante suffisamment étroite, une telle méthode peut se révéler avantageuse du point de vue de la précision.

Pour des signaux qui contiennent plusieurs fréquences, il est de mise de recourir à des méthodes de d'acquisition et de traitement du signal. L'analyse de Fourier se relève alors un atout précieux pour décomposer le spectre d'un signal et mettre en évidence toutes les fréquences qui le composent et leur "poids" dans le signal (d'un poids de vue énergétique, c'est exactement à ça que correspond leur amplitude dans le spectre).

D'autres systèmes existent quant aux détections de fréquence : la méthode hétérodyne consiste globalement à multiplier le signal informatif avec celui d'un oscillateur dont on connaît parfaitement la fréquence d'oscillation. En résulte un signal composé des fréquences somme et différence. On en élimine une avec un filtre sélectif pour ne garder que la composante d'intérêt. La détection se fait en utilisant encore un oscillateur de la même fréquence que le premier. On récupère ainsi la fréquence du signal informatif. Ces techniques sont très utiles dans la transmission d'information, comme la radio, la télévision, les modems, les satellites et j'en passe.

Commentaires, questions, gribouillis