

# MP 30 : Systèmes bouclés (oscillateurs exclus)

Albane Lambert  
Jules Tayol

## Rapports de jury

[2012] “Les notions de stabilité, puis de temps de réponse et de précision sont essentielles dans ce montage. Le monde moderne regorge de systèmes asservis évitant l’utilisation de “boîtes noires” présentant des défauts introduits exprès pour qu’on les corrige par asservissement. Le produit Gain\*Bande passante = constante ne doit pas être attendu aveuglément, les conditions de validité de cette relation doivent être connues et respectées.”

[2010] “L’utilisation de “boîtes noires” présentant des défauts introduits exprès pour qu’on les corrige par asservissement ne fait qu’illustrer l’incapacité des candidats ‘a aborder des problèmes pratiques réels. Le monde moderne regorge pourtant de systèmes asservis.”

## Bibliographie

– Duffait, électronique

–

## Table des matières

<b>1</b>	<b>L’amplificateur opérationnel</b>	<b>2</b>
1.1	AO en boucle ouverte ( <i>Duffait p80</i> ) . . . . .	2
1.2	AO en boucle fermée : amplificateur non inverseur ( <i>Duffait p87</i> ) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Asservissement en position d’un moteur</b>	<b>4</b>
2.1	Principe . . . . .	4
2.2	Fonction de transfert . . . . .	6
2.3	Qualité de l’asservissement . . . . .	8
2.4	Amélioration par un correcteur ( <i>Duffait p 339</i> ) . . . . .	9

## Correction :

- Le poly ne comporte pas d’erreur et je conserverai le plan (mais il faut avoir le temps de traiter le correcteur). Voici néanmoins des points à ajouter/perfectionner d’après les deux correcteurs :
- A ajouter dans I.1) : avant de déterminer les caractéristiques de l’AO en boucle ouverte en utilisant le montage proposé, qui est à boucle fermé, il faut montrer l’instabilité de l’AO en boucle ouverte de façon introduire l’intérêt du bouclage. Pour cela, faire le schéma en boucle ouverte et montrer que l’on a une saturation.
- A ajouter/éclaircir dans II.1) : Donner un cahier des charges clair et précis pour le comportement entrée-sortie de l’asservissement de position, en précisant notamment comment la rétroaction permet de le remplir. Il faudrait également discuter le comportement du système vis à vis des perturbations, à travers les notions introduites (temps de réponse, dépassement,...).
- Attention à la gestion du temps, il faut être plus efficace sur la première partie de façon à consacrer plus de temps au 2.3 et au 2.4 où l’on expose le cahier des charges de l’asservissement et l’intérêt du bouclage

## Introduction

Certains systèmes fonctionnent en boucle ouverte, une consigne est envoyée au système, et le système essaie de suivre la consigne. L'inconvénient est qu'il n'y a pas de correction en cas de perturbation. Dans ce montage, nous étudierons des systèmes bouclés, c'est-à-dire en boucle fermée : il existe une rétroaction, qui permet au système de suivre fidèlement la consigne. Nous nous consacrerons uniquement aux systèmes stables, donc nous ne parlerons pas des oscillateurs. On s'intéressera à deux systèmes : l'amplificateur opérationnel et le moteur asservi en position.

## 1 L'amplificateur opérationnel

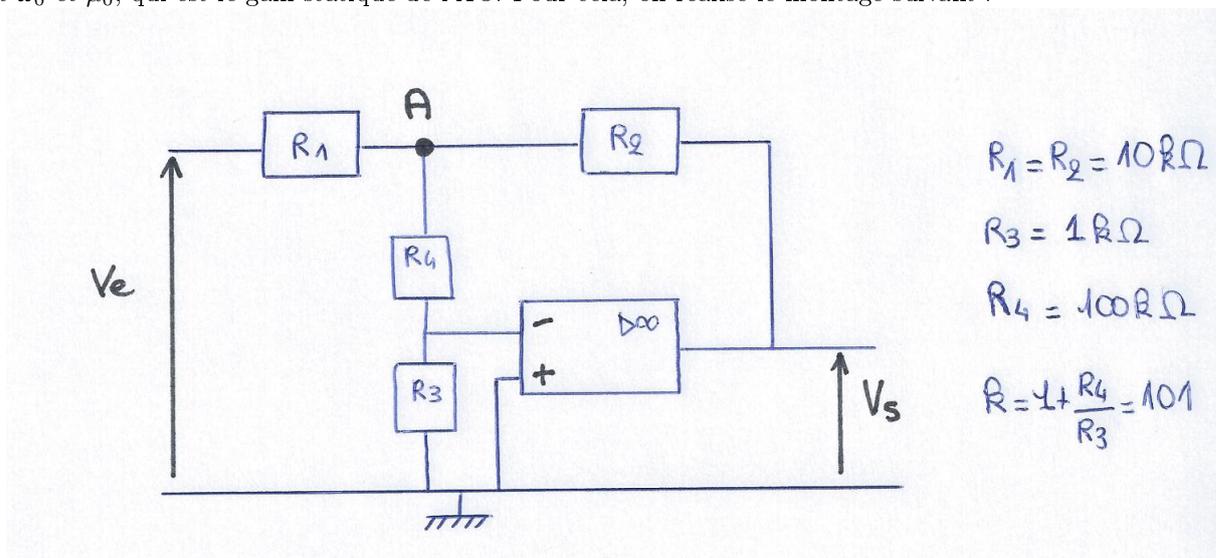
L'AO est un amplificateur différentiel à courant continu de très grande amplification différentielle  $\mu$  (domaine linéaire de l'AO). La borne d'entrée "+" est appelée "non inverseuse" et la borne d'entrée "-" "inverseuse", S étant la sortie.

### 1.1 AO en boucle ouverte (Duffait p80)

Dans le domaine 0 - 1 MHz, l'AO se comporte comme un filtre passe bas du premier ordre (comme on va le voir juste après), donc sa fonction de transfert en régime permanent sinusoïdal se met sous la forme :

$$\mu(\omega) = \frac{V_s}{V_+ - V_-} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Dans cette partie, on souhaite caractériser les paramètres de la fonction de transfert en boucle ouverte, soit  $\omega_0$  et  $\mu_0$ , qui est le gain statique de l'AO. Pour cela, on réalise le montage suivant :



On a donc :  $V_- = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_A$ ,  $V_s = \mu(V_+ - V_-) = -\mu V_-$  soit :

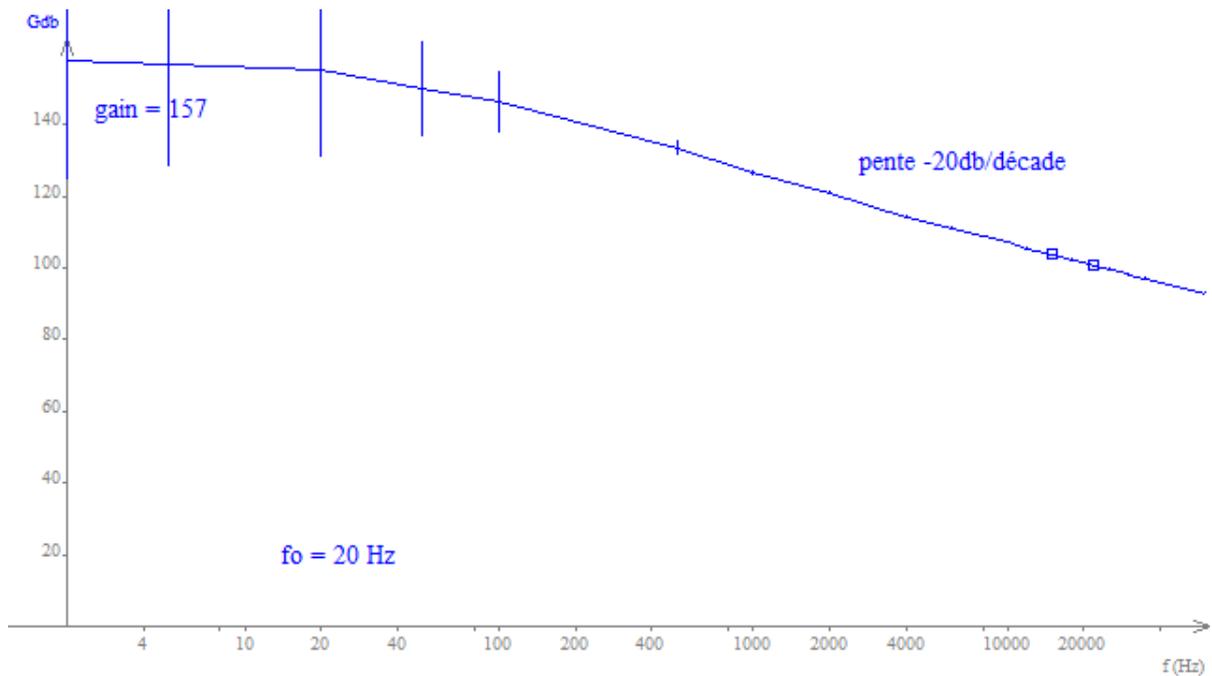
$$\mu = \frac{V_s}{-V_-} = -\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{V_s}{V_A} = -k \frac{V_s}{V_A}$$

*remarque : il paraît surprenant de vouloir caractériser la FTBO de l'AO en utilisant un montage... à contre réaction! en fait, un AO ne fonctionne jamais en boucle ouverte, car il sature tout de suite : impossible de mesurer directement  $\frac{V_s}{(V_+ - V_-)}$ , donc on réalise le montage ci dessus qui permet de mesurer  $k(V_+ - V_-)$ , où  $k$  est très grand : l'AO ne sature plus.)*

Puisqu'on connaît  $k$ , on va pouvoir déterminer  $\mu$  en mesurant  $V_s$  et  $V_A$ . On fait donc varier la fréquence et on relève point par point  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ,  $V_s$  et  $V_A$  sur l'oscilloscope (ou sur un voltmètre). Soit le gain en dB en boucle ouverte :

$$G_{BO} = 20 \log \left| \frac{k V_s}{V_A} \right|$$

**A faire :** On trace  $G_{BO}$  en fonction de  $\log(f)$  (Diagramme de Bode pour le gain) :

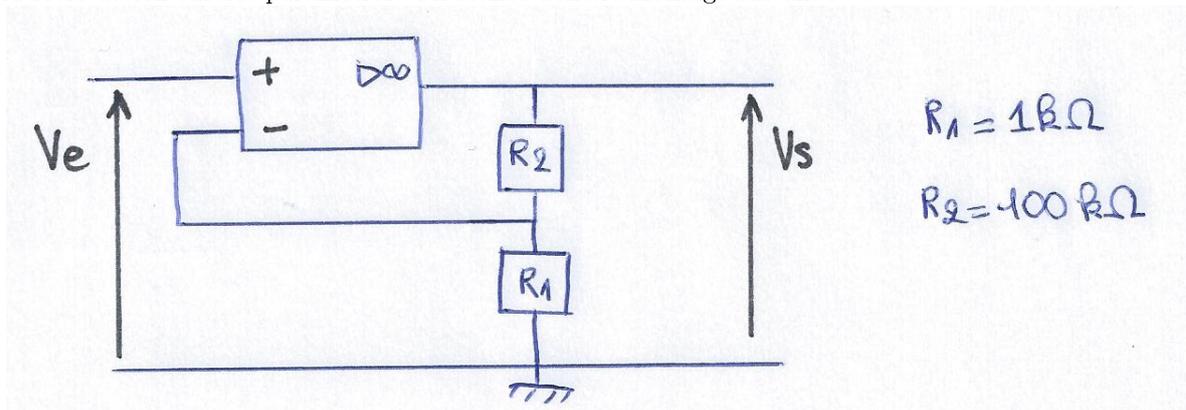


pour les hautes fréquences, modélisation par une droite :  $G_{BO} = a \log(f) + b$ , de pente -20 db/décade (on a donc bien un passe bas du 1er ordre). Le gain statique (fréquence nulle)  $\mu_0$  peut donc être déterminé par lecture sur la courbe, et  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  est donnée par l'intersection des deux asymptotes, soit :

$$f_0 = 10^{\frac{\mu_0 - b}{a}} \pm \Delta f_0 = 10^{\frac{\mu_0 - b}{a}} \pm f_0 \ln(10) \left( \frac{\Delta \mu_0 + \Delta b}{a} + |\mu_0 - b| \frac{\Delta a}{a^2} \right)$$

## 1.2 AO en boucle fermée : amplificateur non inverseur (Duffait p87)

Le but est de déterminer les mêmes caractéristiques pour l'AO non inverseur, et de montrer l'influence de la rétro-action sur ces paramètres. On réalise donc le montage suivant :



Fonction de transfert en boucle ouverte :

$$\mu(\omega) = \frac{V_s}{V_+ - V_-} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{AO}}}$$

On a  $A = \frac{V_s}{V_e} = \mu$  et  $B = \frac{V_-}{V_s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  soit, la fonction de transfert en boucle fermée :

$$FTBF = \frac{V_s}{V_e} = \frac{A}{1 + AB} = \frac{A'}{1 + j \frac{f}{f'_0}}$$

avec le nouveau gain  $A' = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 B}$  et la nouvelle fréquence de coupure  $f'_0 = f_0(1 + \mu_0 B)$ . On constate que la contre réaction a diminué le gain mais augmenté la bande passante. On remarque aussi que le produit gain-Bande passante est resté constant :

$$\mu_o f_o = A' f'_o$$

**A FAIRE** : nouveau diagramme de Bode, détermination des nouveaux paramètres, conclusion sur la contre réaction.

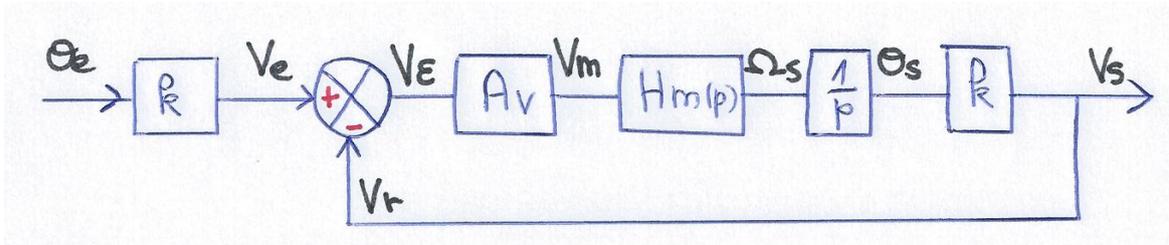
*Remarque : Pour obtenir un fonctionnement linéaire stable de l'AO, il faut qu'il soit inclus dans un système bouclé à contre réaction, la rétro-action permettant d'"asservir" la tension d'entrée  $V_e$  à zéro.*

## 2 Asservissement en position d'un moteur

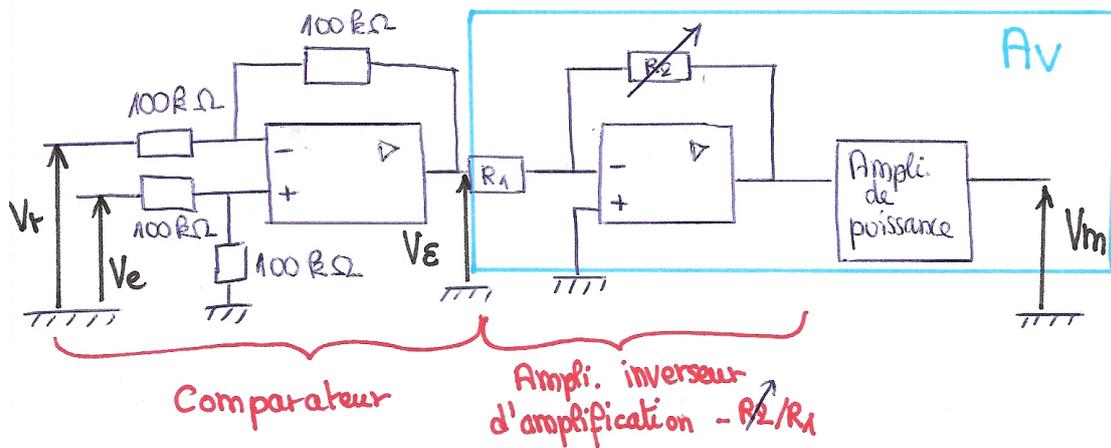
### 2.1 Principe

On souhaite commander la position du clou par une consigne électrique. Pour réaliser la "commande" d'une grandeur de sortie par une grandeur d'entrée (consigne), on réalise un asservissement, qui est un système bouclé à contre réaction : la grandeur de sortie,  $X_s$  est comparée à la consigne  $X_e$  de manière à ce que  $X_s \rightarrow X_e$ . *L'asservissement en position d'un moteur est un système suiveur (la grandeur de sortie doit suivre les variations de la grandeur d'entrée).*

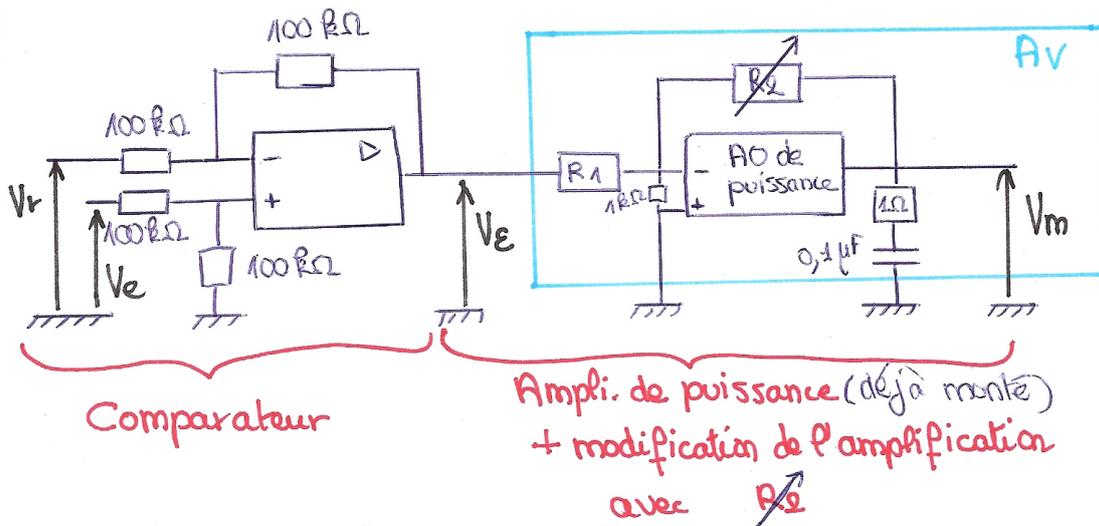
Schéma bloc de l'asservissement de position :



Précision pour la partie électronique :

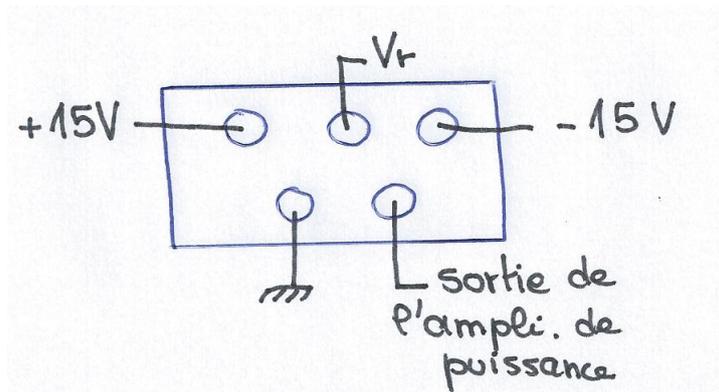


ou



Ce système permet la commande de l'angle  $\theta_s$  qui repère la position du clou au moyen d'une commande  $V_e$  repérée par  $\theta_e$ . Le moteur est alimenté par un amplificateur différentiel dont la tension différentielle d'entrée est  $V_e = V_e - V_s = k(\theta_e - \theta_s)$ . Lorsque  $V_e \neq 0$  le moteur tourne entraînant  $P_s$  de manière à ce que  $V_e$  diminue, et s'arrête lorsque  $V_e = 0$  : on a alors  $\theta_s = \theta_e$ , la consigne est suivie.

nb : voici les branchements à faire pour alimenter le moteur/asservir le clou ("boîte noire" pas très explicite) :



**A faire :** Alimenter en continu et montrer que le clou (son angle) suit la commande d'entrée (la tension imposée). Faire de même avec une alimentation sinusoïdale ou créneaux, et montrer que si la fréquence est trop haute, le clou n'arrive plus à suivre la consigne.

## 2.2 Fonction de transfert

L'étude théorique est détaillée dans le Duffait, notamment pour l'étude détaillée du moteur (pages 328 à 335). L'asservissement peut être représenté par le schéma bloc présenté ci avant, avec :

- Amplificateur différentiel,  $A_v = \frac{V_m}{V_e} \propto R_2$

- Moteur,  $H_m = \frac{A_m}{p\tau_m + 1}$

Fonction de transfert en boucle ouverte :

$$FTBO = \frac{V_s}{V_e} = \frac{kA_v H_m}{p} = \frac{kA_v A_m}{p(p\tau_m + 1)} = \frac{B_m}{p(p\tau_m + 1)}$$

Fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{B_m/\tau_m}{p^2 + p/\tau_m + B_m/\tau_m} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

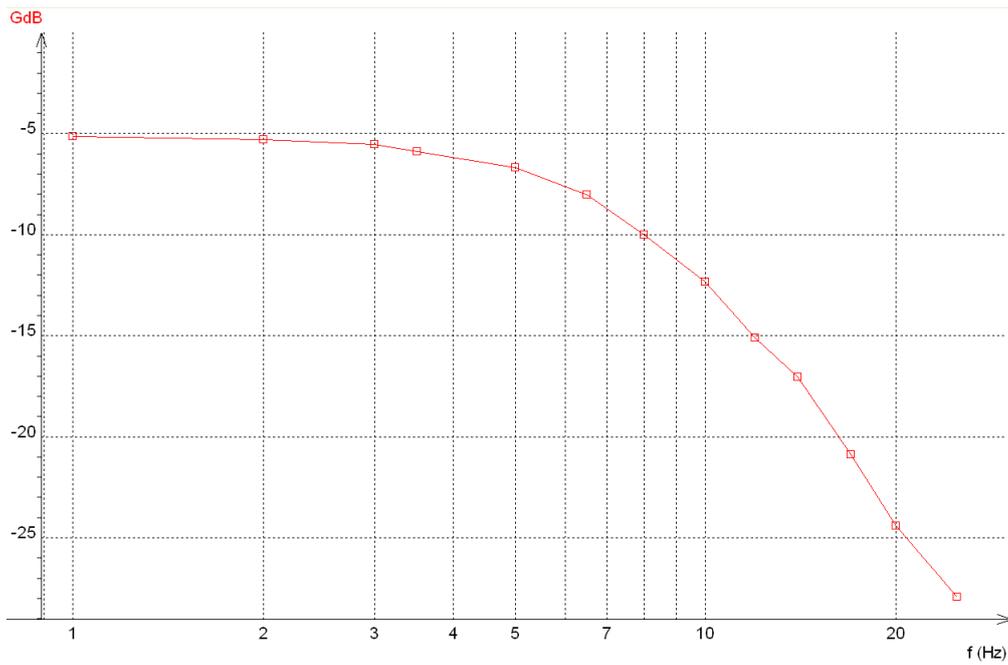
C'est une fonction de transfert du second ordre, où :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{kA_v A_m}{\tau_m}} \propto \sqrt{R_2}$  est la pulsation propre
- $m = \frac{1}{2\omega_0 \tau_m} = \frac{1}{2\sqrt{kA_v A_m} \tau_m} \propto \frac{1}{\sqrt{R_2}}$  le coefficient réduit d'amortissement
- $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$  la pulsation de résonance ( $\frac{d|H|}{d\omega}(\omega_r) = 0$ )
- $|H_{max}| = |H(\omega_r)| = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$

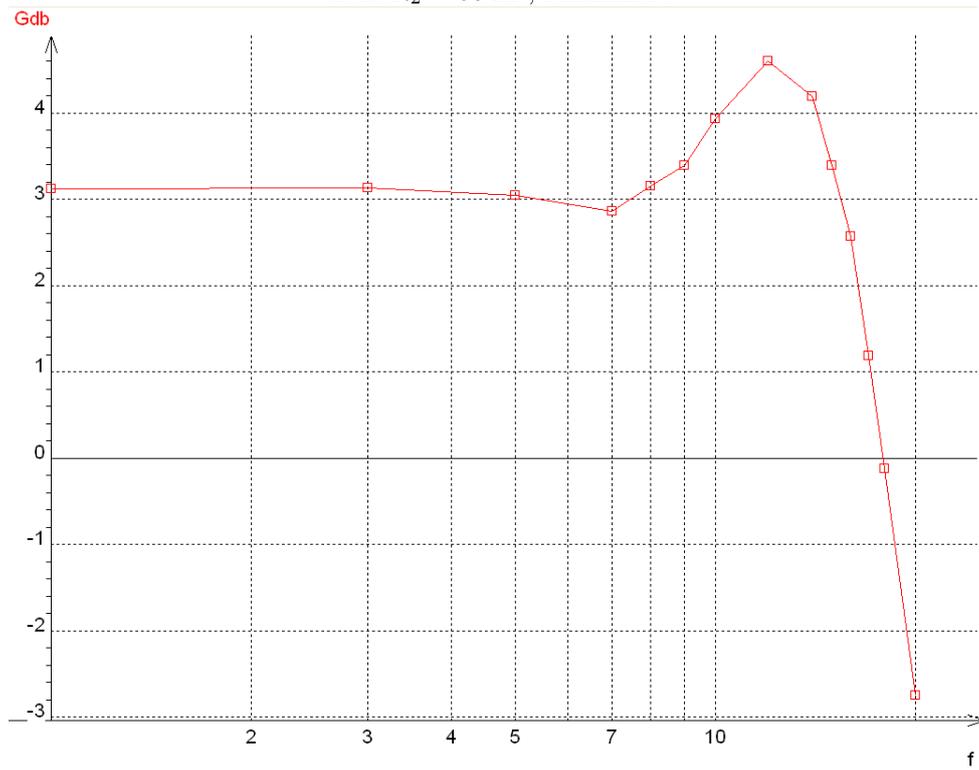
**A faire :** Obtenir le diagramme de Bode du gain , pour cela : tracer point par point, ou faire une réponse indicielle, dériver le signal reçu, en faire la transformée de Fourier, on obtient la fonction de transfert du système bouclé. On retrouve deux point devant le jury. Justifier l'ordre 2 de la fonction de transfert (pente de -40db/décade), mesurer la fréquence de résonance  $\omega_r$  s'il y en a une (dépend de  $m$ , voir ci-dessous) et le gain maximal  $|H_{max}|$ , en déduire  $m$ .

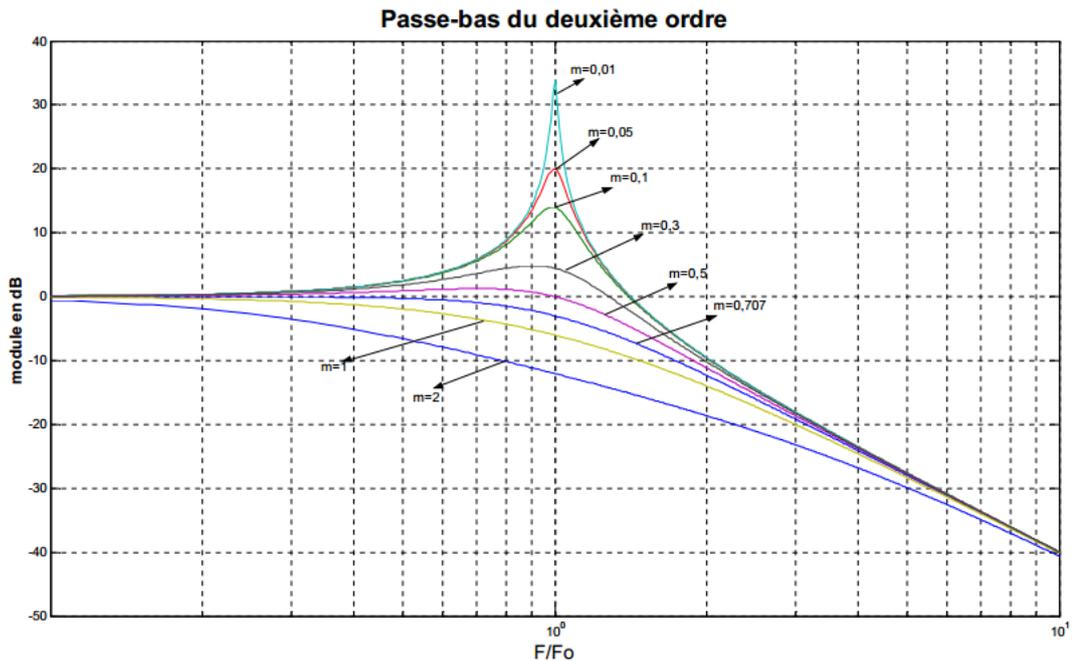
Voici les diagrammes de Bode tracés en préparation (en entrée, sur l'Agilent :  $V_{offset} = 1,30V$  (pour que le clou ne tourne pas),  $V_{amp} = 100mV$  ne pas mettre une amplitude trop élevée aux hautes fréquences (pauvre clou !!)) :

-avec  $R_2 = 10k\Omega$  , pas de résonance :



-avec  $R_2 = 50k\Omega$  , résonance :





(Rappel)

D'un point de vue théorique, on peut noter que le gain agit à la fois sur la pulsation propre et à la fois sur l'amortissement :  $K \nearrow (\leftrightarrow R_2 \nearrow) \rightarrow \omega_0 \nearrow$  et  $m \searrow$ . On pourrait aussi le montrer de façon pratique (faire des Diagrammes de Bode pour plusieurs valeurs de  $R_2$ , mais je trouve ici que ça n'avait pas grand intérêt).

**Conclusion :** on a caractérisé notre système. Nous allons maintenant nous intéresser à la qualité de cet asservissement.

### 2.3 Qualité de l'asservissement

Pour caractériser un asservissement de position, il faut appliquer une tension "créneau" de faible fréquence (*pour que le clou puisse suivre !!*) et d'assez forte amplitude (*mais sans que le clou fasse plus d'un tour, il faut donc jouer sur l'offset de  $V_e$* ).

Pour étudier la qualité de l'asservissement, on peut mesurer différentes caractéristiques de la réponse (*en fonction du gain, piloté par  $R_2$* ) :

- Le temps de réponse  $\tau_r$  (*durée nécessaire pour que la réponse ne diffère pas plus de 5% de la valeur finale*) et le temps de montée  $\tau_m$  (*durée nécessaire pour que la réponse passe de 10% à 90% de la valeur finale*). Ils caractérisent la rapidité du système.
- Le dépassement  $D$  (le clou dépasse la valeur de la consigne avant de se stabiliser), qui augmente quand le coefficient réduit d'amortissement  $m$  diminue. Quand l'amplification augmente, il apparaît des oscillations avec des dépassements par rapport à la valeur du régime permanent. Il est important à estimer pour des raisons de sécurité pour l'équipement qui peut ne pas supporter un certain niveau de dépassement sans être endommager. Il s'exprime en pourcentage :

$$D = \frac{V_s(t) - V_e}{V_e} = e^{-\pi m / \sqrt{1-m^2}} \iff m = \frac{\ln D}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 D}}$$

(*Démonstration de la formule pour un système d'ordre 2 (pas trouvée dans le Duffait) : L'expression de la FTBF donne la relation suivante :*

$$\frac{d^2 V_s}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dV_s}{dt} + \omega_0^2 V_s = \omega_0^2 V_e$$

soit en régime aperiodique ( $\Delta < 0$ ) :

$$r = -m\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

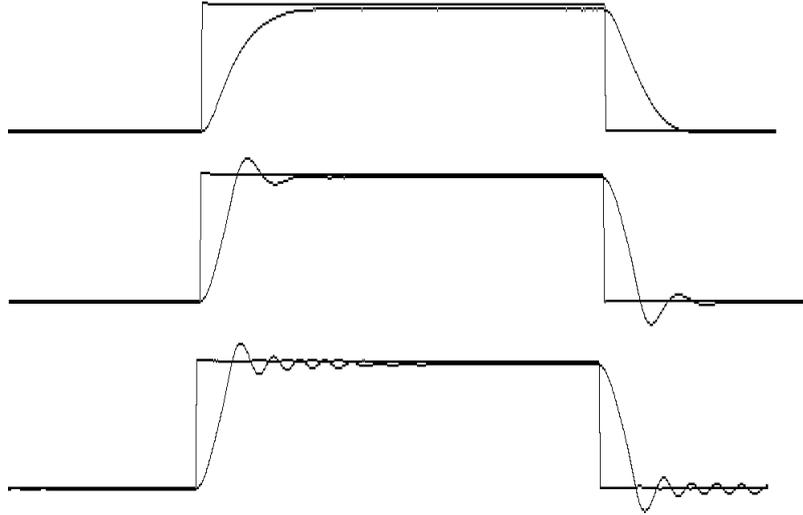
d'où la solution :

$$V_s(t) = V_0(1 - e^{-m\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} t))$$

où le dépassement maximal est obtenu pour  $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$  d'où le résultat)

**A faire :**

- On peut tout d'abord remarquer que quand  $R_2 \nearrow$ , le clou est moins facilement dévié de sa position de consigne (la résistance exercée par le clou augmente lorsque qu'on essaie de le faire bouger). Cela témoigne de la précision du système.
- Pour différentes valeurs de  $R_2$  (du gain), montrer l'influence de l'amplification sur le système à l'oscilloscope :



- Pour différentes valeur de  $R_2$  (de l'amplification), mesurer le déplacement  $D$ , en déduire  $m$ , mesurer le temps de montée  $t_m$

**Conclusion :**

$R_2 \nearrow \Rightarrow t_m \searrow$  (bien!)  $\searrow$  mais  $D \nearrow$  (pas bien!)  $\Rightarrow$  il faut faire un compromis (problème lié au fait que  $m$  et  $\omega_0$  varient de façon opposés en fonction de  $R_2$ . L'idéal serait de diminuer à la fois  $t_m$  et  $D$  : c'est possible en utilisant un correcteur.

**2.4 Amélioration par un correcteur (Duffait p 339)**

L'utilisation d'un correcteur va permettre d'agir sur l'amortissement (facteur D) tout en conservant la même amplification (c'est-à-dire  $R_2$  grand et donc avoir  $t_m$  faible : un système rapide). Le correcteur est introduit dans la chaîne directe, c'est un quadripôle de transmittance  $C(p)$ , soit la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte :

$$FTBO'(p) = FTBO(p)C(p)$$

Duffait propose un correcteur adapté à l'amélioration des performances de l'asservissement de position : un correcteur dit "à avance de phase". Sa fonction de transfert est la suivante :

$$C(p) = \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1}$$

où  $\tau_1 > \tau_2$ . En choisissant  $\tau_m = \tau_1$  on a :

$$FTBO'(p) = \frac{B_m}{p(p\tau_m + 1)} \frac{p\tau_1 + 1}{p\tau_2 + 1} = \frac{B_m}{p(p\tau_2 + 1)}$$

La fonction de transfert a donc la même forme avec et sans correcteur, il y a simplement remplacement de  $\tau_m$  par  $\tau_2$  qui est plus faible, ce qui va augmenter le coefficient d'amortissement et réduire les dépassements dans la réponse indicielle, tout en conservant  $B_m$  c'est-à-dire conservant le même comportement vis-à-vis des perturbations.

Pour réaliser le correcteur, il suffit de placer des condensateurs en parallèles sur  $R_1$  et  $R_2$  :

On peut donc calculer la fonction de transfert :

$$A'_v(p) = A_v(p)C(p) = -\frac{R_2 R_1 C_1 p + 1}{R_1 R_2 C_2 p + 1}$$

on retrouve donc que  $\tau_1 = R_1 C_1$  et  $\tau_2 = R_2 C_2$ . Le coefficient réduit d'amortissement  $m'$  s'écrit de manière similaire à  $m$  et donc :

$$\frac{m'}{m} = \sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_2}}$$

Il reste donc à choisir les valeurs des capacités  $C_1$  et  $C_2$  des condensateurs pour avoir  $\tau_1 = \tau_m$  et  $m' > m$  (*nous avons pris les valeurs suivantes :  $\tau_m$  est la constante de temps électromécanique qui est évaluée dans le Duffait (p 336) mais qui dépend du système utilisé...dans ce montage on n'a pas le temps de la caractériser donc on choisit en fait des valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  "qui vont bien"*).

**A FAIRE** : il ne reste plus qu'à constater l'effet du correcteur : les dépassements sont réduits et le système est plus rapide (temps de montée plus faible). Si on a le temps, on peut faire des mesures quantitatives comme l'on a fait sans correcteur.

### Conclusion

Dans ce montage, nous avons tout d'abord caractériser l'influence de la rétro-action sur l'amplificateur opérationnel. Le bouclage permet de diminuer le gain tout en augmentant la bande passante : on évite la saturation de l'ampli op (qui est utilisée tout le temps en boucle fermée). Puis, nous avons étudié un asservissement de position en regardant l'effet de certains paramètres sur des temps caractéristiques qui permettent de caractériser un système bouclé.