

MP28 : Instabilités et Phénomènes non linéaires

Gauthier Rousseau, Diane Micard

13 mars 2014

Bibliographie :

- BUP : 891/867
- Grécias PCSI Physique
- La physique des objets du quotidien
- Krob électronique

Table des matières

I	Du Linéaire au Non-linéaire	1
I.1	Isochronisme sur le pendule pesant[Bup 891]	1
I.2	Formule de Borda	2
II	Modélisation électronique	3
II.1	Élément non linéaire	3
II.2	Fonctionnement dans l'oscillateur de Van der Pol	4
III	Instabilités	4
III.1	Bifurcation dans un cristal liquide	4
III.2	Oscillateur double puits	4
III.3	Mouvement chaotique d'une balle de ping pong BUP 741	5

Introduction

Jusqu'à présent nous avons étudié des systèmes linéaires : les équations différentielles décrivant les systèmes étaient linéaires. Cette linéarité très pratique pour l'étude des systèmes est en réalité souvent une approximation, qui ne décrit plus parfaitement le système dès que l'on s'éloigne du point d'équilibre stable : par exemple on constate à la résonance dans un RLC que l'amplitude des oscillations n'est pas infinie comme le prédit le calcul linéaire. En effet les équations linéaires sont souvent obtenues par DL à l'ordre 2 des équations plus générales. En s'éloignant du point d'équilibre il faut rajouter des termes d'ordre supérieur dans le DL. Les équations perdent alors leur linéarité. C'est ce que nous allons étudier dans la première partie avec un oscillateur mécanique.

Nous modéliserons ensuite un système non-linéaire en électronique grâce à l'oscillateur de Van der Pol. Puis nous transformerons cet oscillateur pour mettre en avant l'apparition d'instabilité lorsque les points fixes deviennent instables.

I Du Linéaire au Non-linéaire

I.1 Isochronisme sur le pendule pesant[Bup 891]

Mise en équation On considère un pendule de masse m et de longueur l oscillant dans un champ de gravité g , et θ représente l'angle que fait le pendule avec la verticale.

On note $l = \dots \pm \dots$

$$\begin{aligned}E_p &= mgl(1 - \cos(\theta)) \\E_c &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \\E_p(0) &= 0\end{aligned}$$

La conservation de l'énergie donne : $\dot{E}_{tot} = 0$ soit $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Le point d'équilibre du pendule est $\theta = 0$, pour θ petit on peut alors réaliser un DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle.

$$E_p(\theta) = E_p(0) + \frac{dE_p}{d\theta}\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\theta^2 + \dots \quad (1)$$

Ce qui donne $E_p = mgl \frac{\theta^2}{2}$

L'ordre 1 du développement est nul car E_p est minimale en 0, on a donc $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec une période d'oscillation $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Regardons ce qu'il en ait du portrait de phase dans cette approximation : $E_{tot} = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl \frac{\theta^2}{2}$, il s'agit de l'équation d'une ellipse centrée sur 0 dans l'espace $(\theta, \dot{\theta})$

Vérifications expérimentales

- Manip 1 : Tracer la relation angle tension du pendule à l'aide d'un voltmètre. Ceci permet de s'assurer de la linéarité du capteur et de connaître la relation liant l'amplitude du signal à l'angle.
- Manip 2 : acquérir le signal pour différents angles avec un temps d'acquisition suffisamment court pour ne pas voir l'amortissement, mesurer les périodes à la main (TF pas assez précise pour un faible temps d'acquisition).
- Tracer le portrait de phase pour θ faible
- tracer $T = f(\theta_0)$
- Tracer le portrait de phase pour un angle assez grand

Interprétation

- Aux petits angles l'isochronisme est respecté. On peut retrouver la valeur de ω_0 en réalisant une acquisition longue et une transformée de fourier. Application numérique : $f = 0.956 \pm \frac{1}{T_{acquisition}}$
Théoriquement on aurait pour $l = 23.4 \pm 0.2cm$ et $g = 9.81$ une fréquence $f = 1.03Hz$ avec $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta l}{2l}$. On note aussi que le portrait de phase est elliptique.
- Aux grands angles on observe une dépendance de la période en l'angle initial θ_0 essayons désormais de voir d'où vient cette dépendance.

I.2 Formule de Borda

Expérience : Traçons alors le portrait de phase de l'oscillateur pour des angles plus important. Nous pouvons alors voir en réalisant l'ajustement d'un modèle d'ellipse sur la courbe expérimentale que les écarts au modèle sont importants. On observe une déformation du portrait de phase : aux grands angles ce n'est plus une ellipse!

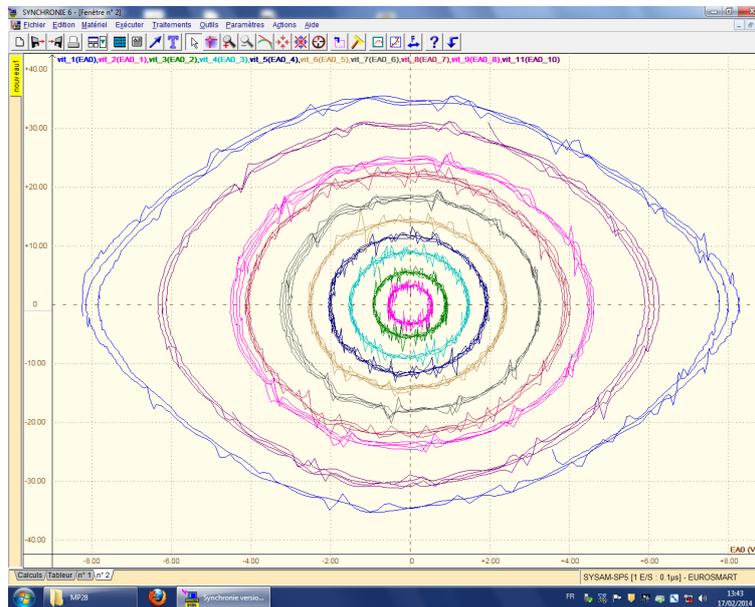


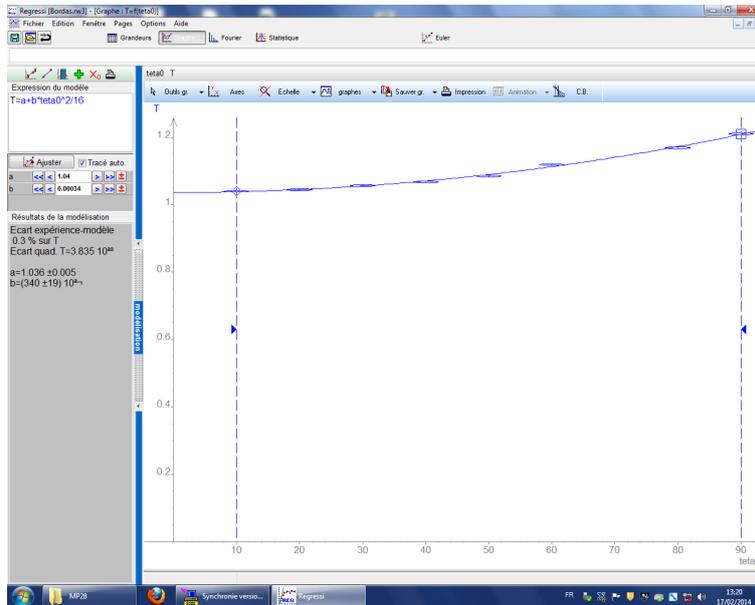
FIGURE 1 – Portrait de phase pour différents angles de départ

étude non linéaire Le développement limité fait précédemment n'est plus valable pour de tels angles. Regardons si en ajoutant un terme d'ordre supérieur dans le Dl de l'énergie potentielle. Il s'agit alors de prendre en compte l'harmonique 4 du développement limité (harmonique 3 étant nulle par symétrie du problème).

On prend désormais : $E_p = mgl(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24})$ soit $\ddot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \frac{\theta^3}{16}) = 0$

Ce qui donne $T = T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16})$

Comparons alors ce modèle avec les données expérimentales : on trouve un écart au modèle de!



Enrichissement spectral La dépendance en θ_0 de la période des oscillations est loin d'être la première caractéristique d'un système non-linéaire. Il est important de regarder un autre phénomène : l'enrichissement spectral du signal et donc apparition d'anharmonicité.
 Reprendre une acquisition sur 15s et réaliser une transformée de Fourier

II Modélisation électronique

II.1 Élément non linéaire

Soit e la tension à l'entrée de l'élément non linéaire et s sa sortie, les deux grandeurs sont reliées de la façon suivante :

$$s = \left(-\frac{R_{4n}}{R_{4n} + R_{3n}} \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{1n}} KV_0 \right) e + \frac{K^2 R_{2n}}{R_{1n}} e^3 \quad (2)$$

Soit $s = \alpha e + \beta e^3$

Les coefficients α et β sont très importants pour la suite de l'étude, nous allons donc mesurer ces coefficients en réalisant une modélisation à partir des résultats expérimentaux.

Manip : Mesure des caractéristiques de l'élément



FIGURE 2 – Caractéristique de l'élément non linéaire

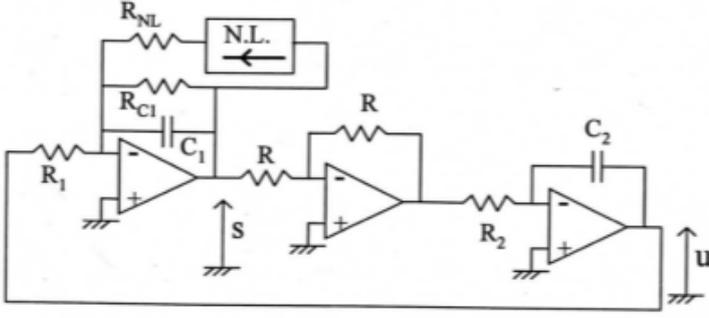


FIGURE 3 – Van der Pol

II.2 Fonctionnement dans l'oscillateur de Van der Pol

Cet élément est introduit dans un oscillateur pour former l'oscillateur de Van Der Pol. L'équation du montage est la suivante :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \epsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 = 0 \quad (3)$$

- $\epsilon = -\sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{C_1}} \frac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{R_{NL} R_{C1}}$ en faisant varier R_{NL} on fait varier ϵ
- A $t = 0$ Le signe de $-\epsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right)$ influe sur le comportement total de l'oscillateur : s'il est positif on obtiendra un régime amorti et les oscillations ne se développeront pas (à $t = 0$, $s \approx 0$ et le terme devant la dérivée première du signal (noté B) est environs égal à $-\epsilon \omega_0$. A l'inverse s'il est négatif les oscillations vont croître et on obtiendra un oscillateur auto-entretenu.
- A $t \geq 0$ B va osciller autour de la position $B =$ entre les deux régimes, dirigé par $\left(\frac{s}{s_0}\right)^2$.

α étant négatif on obtient les conditions de démarrage des oscillations suivantes : $\begin{cases} \frac{s}{s_0} \geq 1 \\ R_{NL} \leq -\alpha R_{C1} \end{cases}$ Calculons alors la résistance critique

$R_{NLc} = \dots$

Vérifications expérimentale : il suffit de tracer l'amplitude des oscillations en fonction de R_{NL} . On obtient alors un diagramme de bifurcation.

On rappelle qu'une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système. Il est bon de remarquer que plus on s'éloigne de R_{NLc} en diminuant cette résistance plus les oscillations sont déformées : plus les non linéarités sont influentes et donc plus grand est l'enrichissement spectral!

Cette bifurcation met en lumière l'instabilité du système aux faibles valeurs de R_{NL} où une légère perturbation (bruit thermique) entraîne l'apparition d'oscillations. C'est ce phénomène d'instabilité que nous allons étudier dans la suite en étudiant différentes bifurcations.

III Instabilités

III.1 Bifurcation dans un cristal liquide

Les premiers dispositifs d'affichage à cristaux liquides comportaient des cellules de cristaux liquides correspondant à un pixel.

Une cellule non soumise à un champ électrique se présente une phase nématique biréfringente : observée entre deux polariseurs croisés elle permet le passage de la lumière. On rappelle qu'une phase nématique est une phase qui présente une symétrie axiale, chaque molécule étant caractérisée par un angle θ par rapport à cet axe. Le milieu est alors uniaxe. L'orientation de l'axe est défini par un traitement de surface du milieu qui contient le cristal liquide

Lorsqu'un champ E supérieur à une valeur seuil est appliqué, on observe une transition de phase vers une phase smectique qui agit alors comme un polariseur. En effet la phase smectique s'organise en plan : la symétrie axiale est brisée et transformée en symétrie cristalline. L'industriel fait en sorte que l'axe du polariseur formé soit confondu avec l'axe de l'un des deux autres polariseurs afin que ces pixels apparaissent noir. C'est ce qu'on observe sur l'écran d'une calculette.

Principe : voir figure 4 et 5

III.2 Oscillateur double puits

En modifiant légèrement le montage du Van der Pol on obtient un oscillateur non-linéaire dont le portrait de phase possède deux attracteurs lorsqu'il est le siège d'oscillations. On obtient alors une bifurcation dite fourche.

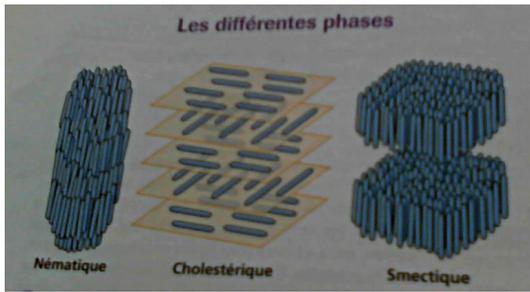


FIGURE 4 – Différentes phases possibles

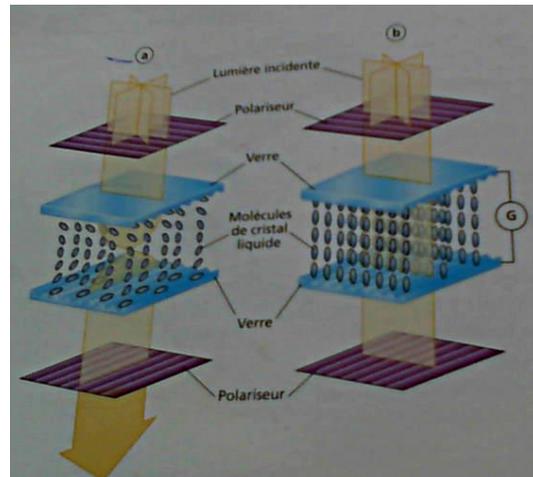


FIGURE 5 – Effet du cristal sur la polarisation

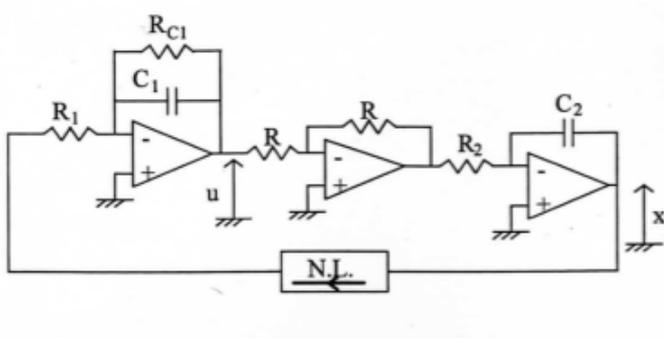


FIGURE 6 – Montage électronique pour le double puits

Expérience : Monter le double puits en utilisant des AO et en veillant à ce que les valeurs des condensateurs soient les mêmes (ce qui n'est pas possible, le système n'est donc jamais vraiment symétrique et retombe toujours vers le même attracteur, on joue alors un peu sur les valeurs des capa pour montrer la bifurcation fourche)

III.3 Mouvement chaotique d'une balle de ping pong BUP 741

Il s'agit de faire rebondir une balle de ping pong sur un plateau animé d'un mouvement vertical sinusoïdal.

$$Z(t) = A_0 * \cos(\omega t)$$

Le système répond donc à l'intersection d'une parabole avec une sinusoïde en introduisant un coefficient de restitution tel que :

L'équation est du type :

$$V_{in} - V(t_n) = -\mu(V_{fin} - V(t_n))$$

ou μ est le coefficient de restitution. $V(t_n)$ est la vitesse du plateau à l'instant t_n et V_{in} est la vitesse initiale.

Intuitivement on pourrait penser que la balle va adopter un régime qui va suivre le rythme du plateau. Ce régime existe mais on observe expérimentalement qu'il est observé uniquement pour des faibles valeurs de A_0 . *Audeld'une certaine valeur de A_0 de termes*

Le point important est que cette cascade de bifurcation a un caractère tout à fait universelle. C'est un façon de passer de l'ordre au chaos que l'on peut retrouver dans de nombreux phénomènes physiques.

Conclusion

Nous avons pu voir dans ce montage que les non-linéarités étaient présentes dans tous les domaines de la physique, leur influence se fait plus ou moins sentir en fonction du problème considéré. Les instabilités quant à elles ne sont pas présentes tout le temps et ne sont pas liées à la linéarité du système. Elles apparaissent à parfois quand plusieurs points métastables sont possibles et peuvent conduire à un mouvement chaotique comme le montre la dernière expérience.