

MP28 Instabilités et phénomènes non linéaires

Bertrand Firpo & Bruno Pagani

“Je crée un déséquilibre interne volontairement
afin que le côté Yang soit le dominant”
[l'école du micro d'Argent](#), Shurik'N de IAM

“Oublie l'équilibre équitale, pour que les uns soient libres
faut que les autres soient stables”
[16 pieces](#), Hocus Pocus feat. Oxmo Puchino

Niveau : CPGE

Commentaires du jury

2014 : Il s'agit de bien d'illustrer quelques caractéristiques des systèmes non-linéaires, de préférence dans différents domaines de la physique. Selon le (ou les) système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage, on peut penser à la pluralité des positions d'équilibre, au phénomène de bifurcation, à l'enrichissement spectral, au ralentissement critique ...

2010, 2013 : Il s'agit de bien illustrer quelques caractéristiques des systèmes non linéaires : pluralité des positions d'équilibre, bifurcation, caractérisation des non linéarités, enrichissement spectral, doublement de période, ralentissement critique..., en fonction du ou des système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage.

2011 : Les candidats doivent prendre en compte les deux aspects de l'intitulé du montage. Cette année, les présentations se sont trop souvent limitées aux aspects non-linéaires.

Bibliographie

- Electronique expérimentale, Krob (p167) -> Pour toute la partie II
- L'ordre dans le chaos, Bergé, Vidal et Pomeau -> M'a beaucoup aidé à découvrir les systèmes dynamiques
- Fiche TP “Pendule non linéaire” en BU, Jean-Yo et al -> Pour la partie I

Prérequis

- Mécanique classique
- Electrocinétique

Table des matières

- 1. Pendule non linéaire**
 - 1.1. Calibration du capteur d'angle**
 - 1.2. Perte d'isochronisme**
- 2. Oscillateur de Van der Pol**
 - 2.1. Présentation du dispositif**
 - 2.2. Etude de l'élément non linéaire**
 - 2.3. Notion de bifurcation**
 - 2.4. Oscillations quasi-sinusoïdales**
 - 2.5. Oscillations de relaxation**

Introduction

Avant-Propos du Bergé

Un système dynamique est un système dont l'évolution varie au cours du temps. Cette évolution peut être décrite par un ensemble fini d'équations de formes diverses. Ce montage est l'occasion d'étudier différentes caractéristiques des systèmes dynamiques : mécanique dans un premier temps avec le pendule non linéaire et électrique dans un second temps avec l'oscillateur de Van der Pol.

1. Pendule non linéaire *Fiche TP BU “Pendule non-linéaire”*

1.1. Calibration du capteur d'angle

On se propose de réaliser l'étude d'un pendule pensant dont l'équation d'évolution est :

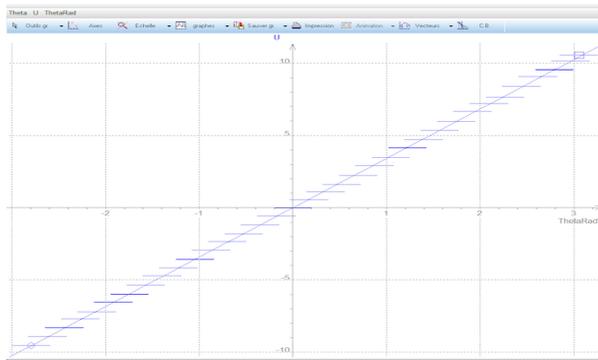
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta(t) = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{mg}{lJ}$$

Le pendule possède 2 points d'équilibre : l'un en $\theta = 0$ l'autre en $\theta = \pi$. Cependant seul l'équilibre en 0 est stable.

Cette équation non-linéaire devient celle d'un oscillateur harmonique aux petits angles :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta(t) = 0$$

L'objectif est dans un premier temps de pouvoir obtenir l'angle que fait le pendule avec la verticale à chaque instant pour en étudier son évolution.



Le pendule non linéaire est équipé d'un capteur d'angle qu'il faut avant tout calibrer. Il faut non seulement régler le zéro du capteur mais aussi relever la tension donnée par ce dernier en fonction de l'angle θ mesuré. Le circuit électrique associé au module permet de régler le gain afin d'avoir une valeur de tension maximale pour la valeur d'angle la plus grande que l'on souhaite mesurée, ceci dans le but de réduire les incertitudes.

La mesure de la tension en fonction de l'angle θ donne :

$$U(\theta) = a \cdot \theta + b \quad \text{avec} \quad a = 3,42 \pm 0,01 \text{ V}^{-1}$$

Rmq : Mettre les angles en radian.

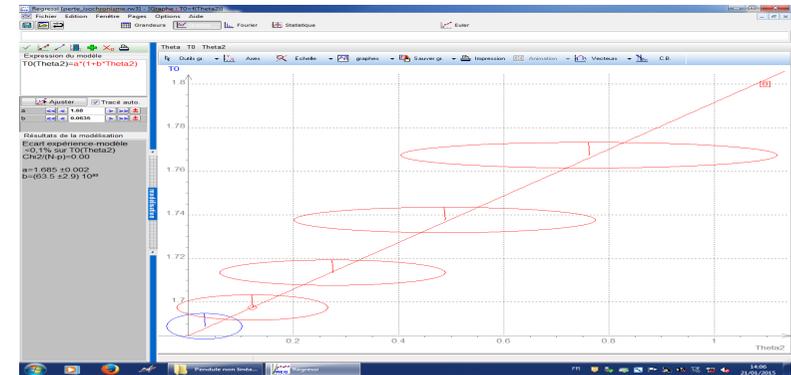
Transition : Cette opération de calibration nous pouvons désormais acquérir des angles.

1.2. Perte d'isochronisme

Travailler à la limite des petits angles permet de faire un développement limité du terme non linéaire en sinus de l'équation du mouvement du pendule et d'obtenir l'équation de l'oscillateur harmonique. Dans cette limites on dit qu'il y a isochronisme des oscillations c'est-à-dire que la période des oscillations ne dépend pas de l'amplitude initiale à laquelle est lâchée le pendule.

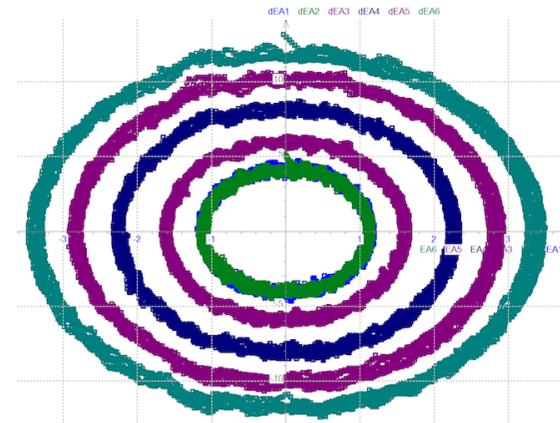
Plus on augmente la valeur de l'angle initial plus il y a perte d'isochronisme. Notre but ici est de pouvoir vérifier la formule de Borda, caractérisant la non-linéaire, donnant la période en fonction de l'amplitude initiale : $T(\theta) = T_0 \cdot (1 + \frac{1}{16} \theta^2)$

Pour ce faire, on lâche le pendule à différentes valeurs d'angle et on acquiert le signal sur plusieurs périodes avec le capteur d'angle calibré. On extrait la période à l'aide d'une modélisation par des oscillations par une sinusoïde puis on trace $T(\theta)$:



$$T(\theta) = a \cdot (1 + b \cdot \theta^2) \quad \text{avec} \quad a = 1,685 \pm 0,003 \text{ s} \quad \text{et} \quad b = 0,0635 \pm 0,0049$$

On peut également voir l'effet de la non-linéarité dans l'espace des phases avec la déformations des ellipses aux grands angles (peu remarquable ici, travailler au delà de 50°) :



Transition : Après avoir étudié un exemple de phénomène non linéaire dans le domaine de la mécanique intéressons nous à d'autres aspects dans un montage d'électronique.

2. Oscillateur de Van der Pol

2.1. Présentation du dispositif

But : Expliquer le démarrage et la stabilisation en amplitude d'un oscillateur.

L'objectif est de présenter l'oscillateur de Van der Pol électronique. Un oscillateur de Van der Pol est un système dynamique dont l'équation d'évolution est :

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \varepsilon \cdot \omega_0 \left(1 - \frac{s^2}{s_0^2}\right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

$$\text{où : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \varepsilon = -\sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{C_1}} \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{\alpha}{R_{NL}}\right) \quad s_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} + \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}}$$

ω_0 , s_0 désignent des constantes positives et ε désigne un paramètre variable positif.

L'intérêt d'une telle modélisation est qu'elle permet d'expliquer le démarrage et la stabilisation en amplitude d'une oscillation. La clef de ce comportement résulte du signe, variable en fonction de la valeur instantanée de s , de l'amortissement $-\varepsilon\omega_0\left(1 - \left(\frac{s(t)}{s_0}\right)^2\right)$:

1) au démarrage $s(t)$ est quasi-nul (bruit de fond) : $s(t) < s_0$.

Ainsi $-\varepsilon\omega_0\left(1 - \left(\frac{s(t)}{s_0}\right)^2\right) < 0$. L'amortissement est négatif et $s(t)$ tend à croître.

2) si $s(t) > s_0$ alors $-\varepsilon\omega_0\left(1 - \left(\frac{s(t)}{s_0}\right)^2\right) > 0$. L'amortissement est positif et $s(t)$ tend à décroître.

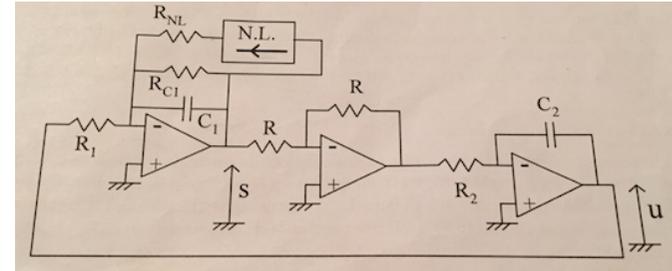
3) si $s(t) = s_0$ alors $-\varepsilon\omega_0\left(1 - \left(\frac{s(t)}{s_0}\right)^2\right) = 0$. On conçoit l'existence d'oscillations permanentes car l'équation d'évolution devient celle de l'oscillateur harmonique.

La valeur de ε a également une influence sur la nature des oscillations au sein du circuit :

1) pour des valeurs de ε très proches de 0, l'influence de la non-linéarité est très faible. On peut alors chercher une solution sinusoïdale sous la forme $s(t) = a \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ dont l'amplitude a est à préciser.

2) pour des valeurs plus importantes de ε , le circuit devient le siège d'oscillations de plus en plus anharmoniques de type oscillations de relaxation.

Le circuit réalisé est le suivant :



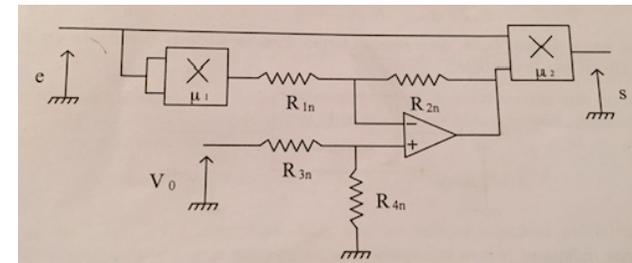
Le paramètre expérimental qui nous permet de faire varier le plus facilement ε est la résistance R_{NL} . Elle entraîne aussi les variations de s_0 .

Transition : La non-linéarité est responsable de l'instabilité de l'oscillateur. Etudions dans un premier temps sa caractéristiques.

2.2. Etude de l'élément non linéaire

But : Montrer comment réaliser l'élément non linéaire et tracer sa caractéristique.

L'élément non-linéaire inclus dans l'oscillateur de Van der Pol est de la forme suivante :



Composé de 2 multiplieurs dont les relations entrée-sortie sont respectivement :

$$y_1 = K \cdot e(t) \cdot e(t)$$

$$y_2 = -K \cdot \left(\frac{R_{4a}(R_{1a}+R_{2a})}{(R_{4a}+R_{3a})R_{1a}} \right) V_0 - K \cdot \frac{R_{2a}}{R_{1a}} \cdot e^2(t) \cdot e(t)$$

L'expression de la caractéristique entrée-sortie de l'élément non linéaire est de la forme :

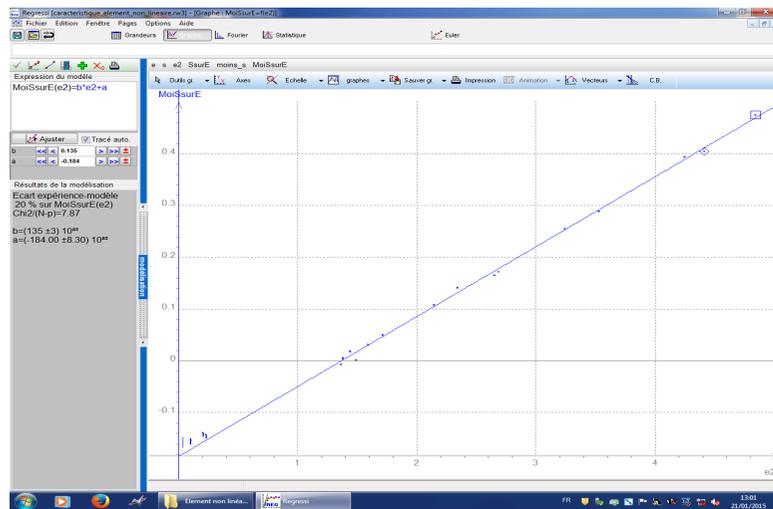
$$s(t) = \alpha \cdot e(t) + \beta \cdot e^3(t) \quad \text{où} \quad \alpha = \left(-\frac{R_{4a}(R_{1a}+R_{2a})}{(R_{4a}+R_{3a})R_{1a}} \right) K V_0 \quad \text{et} \quad \beta = K^2 \cdot \frac{R_{2a}}{R_{1a}}$$

$$s(t) = \left(-\frac{R_{4a}(R_{1a}+R_{2a})}{(R_{4a}+R_{3a})R_{1a}} K V_0 \right) \cdot e(t) + K^2 \cdot \frac{R_{2a}}{R_{1a}} \cdot e^3(t)$$

Les valeurs des composants choisis (plaquette ENS-Lyon) nous donnent : $\alpha_{calculée} = -0,176$ et $\beta_{calculée} = 0,132 \text{ V}^{-2}$.

Expérimentalement $e(t)$ est une sinusoïde de fréquence 100 Hz (afin de travailler en basse fréquence pour que les multiplicateurs et les AO présentent des comportements idéaux).

Afin de vérifier l'exactitude de la forme de la caractéristique nous traçons donc $s/e = f(e^2(t))$. On obtient ainsi la droite suivante :



Les valeurs des coefficients trouvées par régression linéaire sont :

$$\alpha_{mesurée} = -0,184 \pm 0,008 \quad \text{et} \quad \beta_{mesurée} = 0,135 \pm 0,003 \text{ V}^{-2}$$

Nous avons donc caractérisé l'élément non linéaire du montage. Ces coefficients nous permettent de calculer ε et s_0 .

Rmq : On peut également effectuer une FFT de la tension de sortie du montage et observer que l'on a bien 2 pics. Un correspondant au fondamental à ω et un harmonique à 3ω .

Transition : Ainsi la non-linéarité est vérifiée aux incertitudes près et nous pouvons donc insérer cet élément dans l'oscillateur de Van der Pol.

Rmq : J'ai essayé de monter tout l'oscillateur de A à Z mais plus on multiplie les composants (et les fils) plus les sources d'erreur sont importantes. Je recommande donc chaudement l'utilisation de l'élément non linéaire de la plaquette ENS-Lyon pour tous ceux qui ne sont pas sereins en élec comme moi...

2.3. Notion de bifurcation

But : Remonter à la valeur critique du paramètre R_{NL} et observer la transition oscillation quasi-sinusoïdale et oscillation de relaxation.

$$\text{Le paramètre expérimental faisant varier facilement } \varepsilon \text{ est } R_{NL} : \varepsilon = -\sqrt{\frac{R_1 R_2 C_1}{C_1}} \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{a}{R_{NL}} \right)$$

La condition d'oscillation est que $\varepsilon > 0$: $R_{NL} \leq -a R_{C1}$

On observe à l'oscilloscope qualitativement cette transition en mode XY en faisant varier la valeur de la résistance R_{NL} . Cette valeur vaut : $R_{NL \text{ critique}} = -\alpha_{calculée} \cdot R_{C1} = 17,5 \text{ k}\Omega$

Nous mettons en évidence le phénomène de bifurcation. En effet, la valeur critique d'un certain paramètre engendre 2 catégories de solutions pour cet oscillateur. Lorsque $R_{NL} > R_{NL \text{ critique}}$ on a des oscillations instables qui s'atténuent et tendent vers l'origine dans l'espace des phases. Dès que $R_{NL} < R_{NL \text{ critique}}$ on assiste à l'apparition d'oscillations quasi-sinusoïdales stables tendant vers un cycle limite. C'est ce changement d'attracteur qui met en évidence la notion de bifurcation des solutions de l'équation de Van der Pol.

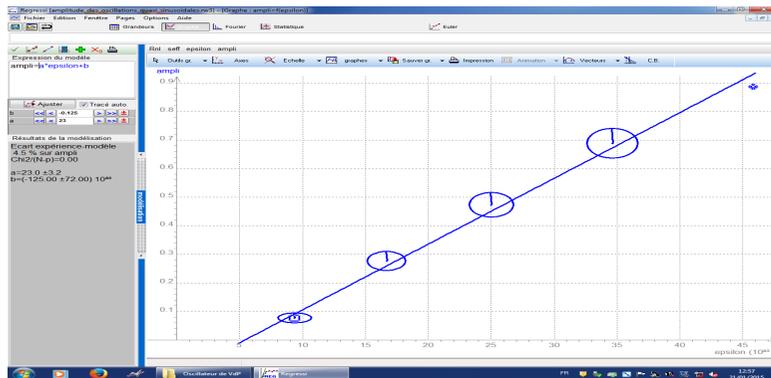
Expérimentalement cette valeur est du bon ordre de grandeur : $R_{NL \text{ critique mesurée}} = 16,3 \text{ k}\Omega$

Transition : Cette bifurcation possède deux propriétés que nous allons mettre en évidence.

2.4. Oscillations quasi-sinusoïales

But : Montrer que l'amplitude des oscillations quasi-sinusoïales croît en $\sqrt{\varepsilon}$.

L'objectif désormais est de pouvoir caractériser les oscillations que l'on peut observer dans le cas où $R_{NL} \leq R_{NL,critique}$.



Si le paramètre ε reste à des valeurs proches de 0 alors on peut montrer que l'amplitude des oscillations quasi-sinusoïales varie comme $2\sqrt{\varepsilon}$ (Bergé p29). Pour cela nous mesurons au voltmètre l'amplitude des oscillations pour différentes valeurs de R_{NL} . Nous traçons alors $4s^2_{efficace}(t)$ en fonction de ε et nous obtenons :

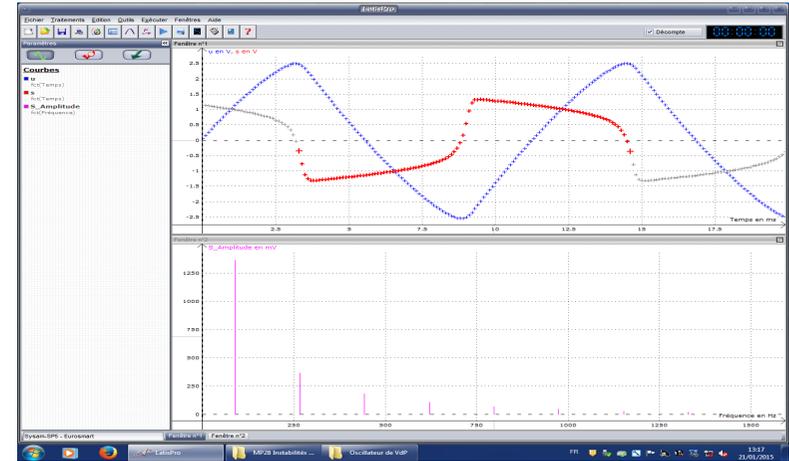
$$4s^2_{efficace} = a \cdot \varepsilon + b \quad \text{avec} \quad a = 22,9 \pm 2,6 \quad \text{et} \quad b = -0,121 \pm 0,0663$$

Transition : Etudions désormais le cas où ε est grand, c'est le cas des oscillations de relaxation.

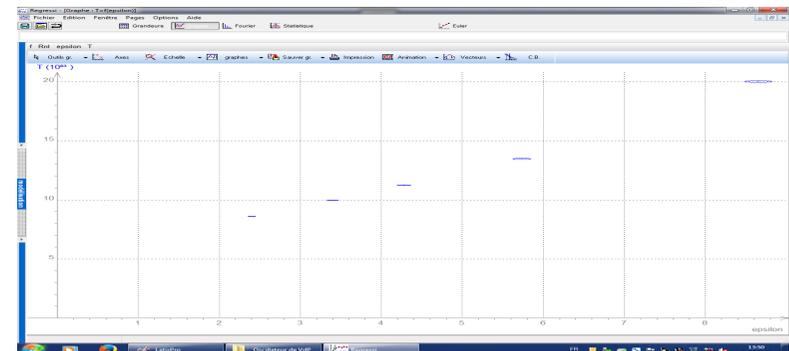
2.5. Oscillations de relaxation

But : Observer les oscillations de relaxation et montrer que la période des oscillations croît avec ε .

Après s'être intéressé au cas des solutions avec ε proche de 0 on peut analyser le comportement de l'oscillateur de Van der Pol pour de plus grande valeur de ce paramètre.



On observe d'une part que les oscillations deviennent de moins en moins sinusoïales. L'oscillateur a un profil presque rectangulaire, ce sont des oscillations de relaxation. En effet si l'on réalise une FFT du signal $s(t)$ on peut voir l'apparition d'harmoniques constituant ainsi la preuve de l'apparition de non-linéarité. Si l'on regarde désormais l'évolution de la période des oscillations en fonction de ε on observe que la période croît avec le paramètre ε .



Conclusion

Nous avons tenté d'observer différentes caractéristiques de 2 systèmes dynamiques différents : l'apparition de non-linéaire (naturellement présente dans le pendule non-linéaire aux grands angles et induite par l'élément non-linéaire dans l'oscillateur de Van der Pol), la stabilité de certains points et la notion de bifurcation. Ces comportements peuvent se retrouver dans les différentes trajectoires de phase des systèmes considérés. L'espace de phase est donc un outil adapté à l'étude des systèmes dynamiques.