

MP28 – INSTABILITÉS ET PHÉNOMÈNES NON-LINÉAIRES

24 mars 2016

Pierre Soulard & Lucile Favreau

‘La théorie, c’est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c’est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi!’

ALBERT EINSTEIN

Commentaires du jury

2014, 2015 : Il s’agit de bien d’illustrer quelques caractéristiques des systèmes non-linéaires, de préférence dans différents domaines de la physique. Selon le (ou les) système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage, on peut penser à la pluralité des positions d’équilibre, au phénomène de bifurcation, à l’enrichissement spectral, au ralentissement critique...

2010, 2013 : Il s’agit de bien illustrer quelques caractéristiques des systèmes non linéaires : pluralité des positions d’équilibre, bifurcation, caractérisation des non linéarités, enrichissement spectral, doublement de période, ralentissement critique..., en fonction du ou des système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage.

2011 : Les candidats doivent prendre en compte les deux aspects de l’intitulé du montage. Cette année, les présentations se sont trop souvent limitées aux aspects non-linéaires.

Bibliographie

- ✦ *BUP 867*
- ✦ *Fiches de Manip, BU Agreg, Pendule NL*
- ✦ *Electronique expérimentale, Krob*
- ✦ *Mécanique, Brasselet*
- ✦ *La physique par la pratique, Portelli*

Expériences

- ☞ Pendule pesant
- ☞ Oscillateur de Van der Pol

Table des matières

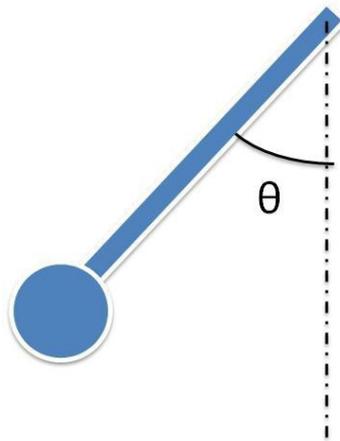
1	Le pendule pesant : du linéaire au non-linéaire	2
1.1	Dispositif et calibration	2
1.2	Période des oscillations et perte d’isochronisme	3
1.3	Portrait de phase	3
2	Instabilités non-linéaires : oscillateur de Van der Pol auto-entretenu	4
2.1	Élément non-linéaire	4
2.2	Démarrage des oscillations et cycle limite	4
2.3	Etude de la bifurcation	5
2.4	Autres effets de la non-linéarité	6
3	Oscillateur double-puits	6
3.1	Retour sur le pendule	6
3.2	Double-puits électronique	6

Introduction

Nous sommes entourés de nombreux systèmes oscillants à toutes les échelles, spatiale comme temporelle : les atomes d'un cristal vibrent à 10^{12} Hz sur 10^{-10} mètres, tandis que les océans oscillent à la surface de la Terre sur l'échelle de la journée. En effet, tout corps dans une situation stable oscille autour de sa position d'équilibre à la suite d'une perturbation de la part de son environnement. Cependant, même si on peut considérer un grand nombre de systèmes comme linéaires pour des faibles écarts à l'équilibre, ils vont présenter des non-linéarités pour des écarts plus importants. Nous allons mettre en évidence ces non-linéarités et certaines de leurs caractéristiques sur deux exemples.

1 Le pendule pesant : du linéaire au non-linéaire

1.1 Dispositif et calibration



On s'intéresse aux oscillations d'un pendule pesant, il est régi par l'équation suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (1)$$

C'est une équation non-linéaire en θ mais on connaît les positions d'équilibre pour ce système :

- $\theta=0$: équilibre stable
- $\theta=\pi$: équilibre instable

Lorsqu'on considère des faibles écarts par rapport à la position d'équilibre stable, on peut linéariser cette équation autour de $\theta=0$ et ainsi obtenir l'équation de l'oscillateur harmonique aux petits angles :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2)$$

On a donc une masse m qui évolue dans un puit de potentiel parabolique.

Grâce à l'expérience, on va pouvoir déceler la présence de non-linéarités et tenter de les quantifier. Ici, le dispositif comporte un capteur de position angulaire (potentiomètre associé à un circuit électrique simple et un amplificateur) dont le signal de sortie est lié à l'angle θ entre le pendule et la verticale. Nous allons commencer par calibrer le capteur pour connaître la relation exacte entre la tension de sortie U et la position angulaire θ .

Linéarité du capteur



- Vérifier le bon alignement des éléments pour éviter les frottements solides.
- On récupère la tension de sortie U sur Synchronie avec la carte d'acquisition, régler le zéro puis le gain de façon à éviter la saturation de U jusqu'à des angles de 110° environ pour le calibre le plus grand du logiciel soit $-10/+10V$.
- On lance l'acquisition et on place successivement le pendule aux différents angles pour obtenir la tension correspondante.
- Mettre les angles en radian !
- Evaluer les incertitudes, comme d'hab, tout ce qu'on aime.

On trace la courbe $U = f(\theta)$ sur LatisPro et on modélise par une fonction affine : $U = a\theta + b$. Le modèle affine correspond, on a donc un capteur qui a une réponse linéaire.

1.2 Période des oscillations et perte d'isochronisme

A partir de l'équation de l'oscillateur harmonique, on constate que la période des oscillations est constante. On lance le pendule avec un petit angle initial, et on constate que l'amplitude décroît (frottements fluides et solides). Par contre, on semble avoir isochronisme (la période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations).

Période des oscillations



- Acquisitions courtes pour plusieurs angles faibles.
- On mesure la période sur 3 oscillations.

Par contre, si on prend un angle initial plus grand, la période change au cours du mouvement oscillatoire. En fait, on peut faire un développement limité du $\sin\theta$ dans l'équation du pendule, on obtient alors avec le terme non-linéaire suivant non nul :

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0 \quad (3)$$

Par méthode perturbative, on cherche une solution sous la forme : $\theta(t) = \theta_o(\sin(\omega t) + \epsilon\sin(3\omega t))$. En injectant cette solution dans l'équation différentielle, on obtient la formule de Borda :

$$T = T_o\left(1 + \frac{\theta_o^2}{16}\right) \quad (4)$$

où T est la période d'oscillations du pendule et T_o la période propre de l'oscillateur harmonique correspondant. Ainsi, la période des oscillations dépend de l'amplitude initiale du mouvement. On a perte d'isochronisme. Sur une même acquisition, on va utiliser la perte d'énergie due aux phénomènes dissipatifs pour explorer une gamme d'amplitudes.

Formule de Borda



- Acquisition longue pour explorer une grande gamme d'amplitudes, départ d'une amplitude assez grande.
- On convertit U en angle θ avec les données de la calibration.
- Utiliser le code du BUP 867 sur le signal lissé : on récupère les amplitudes maximales (enveloppe) et les passages du signal à zéro pour mesurer les périodes.

On trace ensuite les périodes T_{exp} en fonction des angles au carré θ . On peut faire une modélisation affine, et tenter de retrouver le coefficient $\frac{1}{16}$.

1.3 Portrait de phase

On peut également tracer les portraits de phase du pendule pour différentes amplitudes pour observer la présence de phénomènes non-linéaires. En effet, pour un oscillateur linéaire, on a des trajectoires elliptiques dans le plan de phase. Pour des grandes amplitudes, on a une déformation des ellipses : le mouvement n'est plus sinusoïdal. On peut éventuellement montrer la transformée de Fourier pour voir l'enrichissement spectral. Malheureusement le capteur utilisé ne permet pas de voir le régime de fronde pour lequel le pendule fait un ou plusieurs tours complets.

Enrichissement spectral et portrait de phase



- Acquisitions courtes avec peu de points pour minimiser le bruit et avoir les portraits de phase plus propres.
- On fait une dérivée discrète de θ en fonction du temps et on lisse la dérivée.

On a vu ici des comportements non-linéaires : perte d'isochronisme, enrichissement spectral, déformation des trajectoires dans le plan de phase, et on a introduit des outils d'étude : transformée de fourier, spectre du signal, portrait de phase. Maintenant, comment ces non-linéarités peuvent conduire à l'instabilité ?

2 Instabilités non-linéaires : oscillateur de Van der Pol auto-entretenu

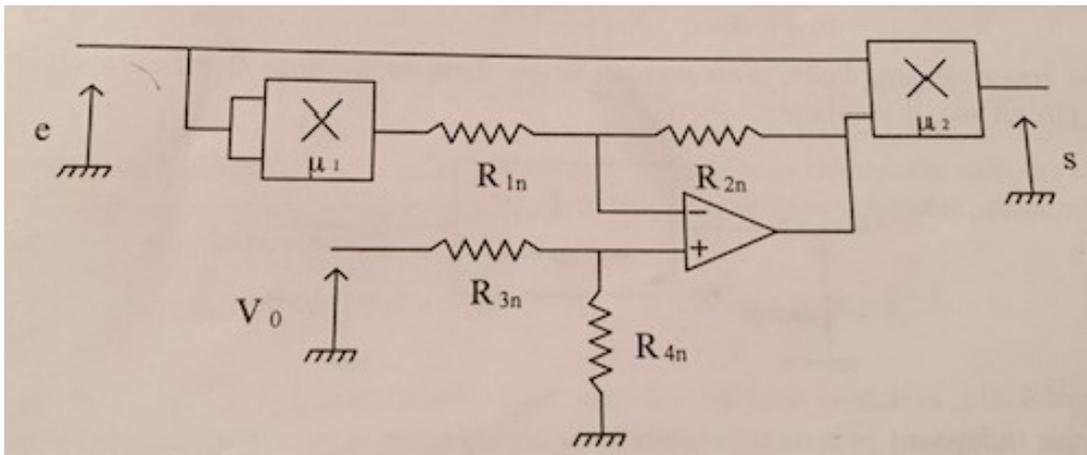
L'oscillateur de Van der Pol est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{s} - \epsilon\omega_o(1 - (\frac{s}{s_o})^2)\dot{s} + \omega_o^2s = 0 \tag{5}$$

Le préfacteur du terme \dot{s} est un terme d'amortissement non-linéaire. On peut dire que ϵ pilote la non-linéarité, et quand ce terme est nul, on retrouve l'oscillateur harmonique habituel. On va vouloir construire un circuit électrique modélisable par cette équation.

2.1 Élément non-linéaire

Nous allons utiliser un élément NL : la tension de sortie est une fonction non linéaire de la tension d'excitation. On a un boîtier qui correspond à l'élément suivant :



C'est un circuit résistance négative qui contient quatre résistances, un amplificateur opérationnel et deux multiplieurs. On l'alimente avec une tension V_o qui permet de modifier sa caractéristique. Théoriquement, on la caractéristique suivante :

$$s = \alpha e + \beta e^3 \tag{6}$$

où $\alpha = -\frac{R_{4n}}{R_{4n}+R_{3n}} \frac{R_{2n}+R_{1n}}{R_{1n}} K V_o$ (négatif) et $\beta = \frac{K^2 R_{2n}}{R_{1n}}$ (positif). Nous allons tout d'abord tracer cette caractéristique $s = f(e)$.

Caractéristique de l'élément non-linéaire

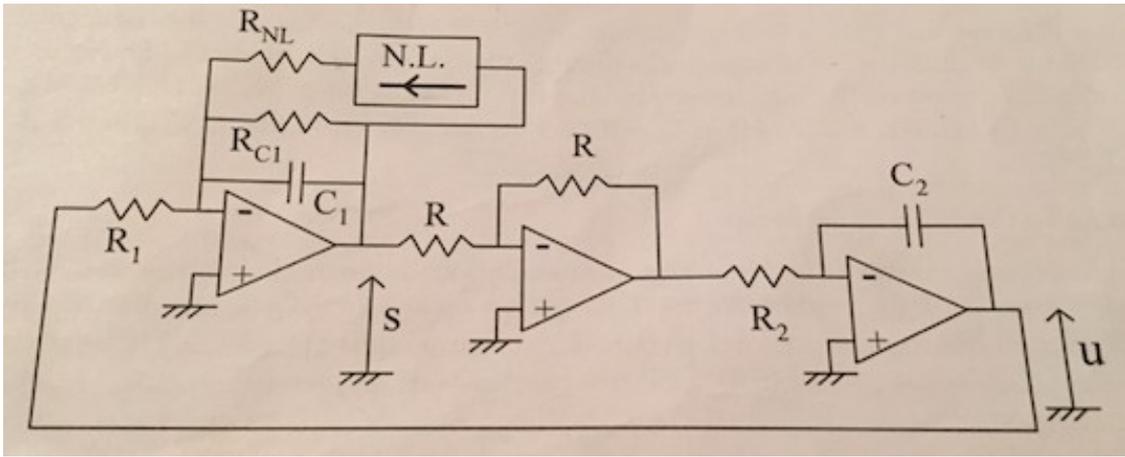
- On prend l'élément linéaire en boîtier (42.46) qu'on alimente avec une tension continue $V_o = 0,5V$, et un signal d'entrée e sinusoïdal d'amplitude 3V et de fréquence 100Hz.
- Sur LatisPro on fait l'acquisition de l'entrée e et de la sortie s . On trace $s = f(e)$.
- On peut montrer l'influence de V_o sur la caractéristique.

On retrouve bien la forme polynomiale cubique. On peut réaliser une modélisation pour retrouver α et β . Comparer aux valeurs théoriques calculées à partir de la notice du boîtier.

$$\begin{matrix} \alpha = ... \\ \beta = ...V^{-2} \end{matrix} \tag{7}$$

2.2 Démarrage des oscillations et cycle limite

On peut maintenant utiliser cet élément non-linéaire dans le circuit suivant :



C'est l'oscillateur de Van der Pol, il est composé de deux intégrateurs et un inverseur, auxquels on ajoute la partie NL. On peut réécrire l'équation différentielle en fonction des composants utilisés ici :

$$\ddot{s} + \frac{1}{C_1} \left(\frac{\alpha}{R_{NL}} + \frac{1}{R_{C1}} \right) \omega_o \left(1 - \left(\frac{s}{s_o} \right)^2 \right) \dot{s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} s = 0 \tag{8}$$

On peut identifier cette équation avec celle du Van der Pol avec :

$$\epsilon = - \sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{C_1} \frac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{R_{C1} R_{NL}}} \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \tag{9}$$

On voit que le paramètre expérimental qui nous permet de faire varier ϵ est R_{NL} . On aura amplification des oscillations quand le terme devant \dot{s} est négatif, donc lorsque ϵ est positif, soit quand $R_{NL} < -\alpha R_{C1}$ (sinon, le terme d'amortissement est positif donc on n'a plus d'oscillations!).

Visionnage des deux régimes et détermination de la valeur limite de R_{NL} .

- On monte le Van der Pol, attention au sens de l'élément NL. Pour les composants, on prend les valeurs du Krob p.172 et une boîte à décades pour R_{NL} .
- On montre sur l'oscilloscope les deux régimes, on cherche la valeur limite de R_{NL} pour laquelle les oscillations démarrent. (Autour de 20/25 kΩ).
- On peut aussi tracer en mode XY les cycles (plus ou moins déformés) dans le plan de phase.
- En ouvrant le circuit et en le fermant, on peut voir la convergence vers le cycle limite par des oscillations à l'intérieur ou à l'extérieur du cycle selon la condition limite (ouverture au niveau de la sortie ou de l'entrée inverseuse de l'intégrateur).

On a donc au passage de cette valeur limite, une bifurcation. On passe d'un régime avec un point fixe attracteur (0,0) non oscillant à un régime instable oscillant avec un cycle limite. On va essayer de caractériser un peu plus le passage de l'un à l'autre et ainsi la force de la non-linéarité.

2.3 Etude de la bifurcation

Pour ça, on va vérifier la relation théorique qui lie l'amplitude des oscillations s_o à R_{NL} pour une telle bifurcation (attention la formule p.174 du Krob est fautive) :

$$s_o = 2 \sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}} \tag{10}$$

Vérification de la relation théorique



- On fait varier R_{NL} (paramètre de contrôle) proche de la valeur limite. On relève la valeur efficace $s_{o,eff}$ au multimètre pour l'amplitude.
- On trace ensuite $s_o^2 = f(R_{NL})$ sur LatisPro, on fait une modélisation affine.
- N'oublions pas les incertitudes... :(

On a une bonne correspondance entre l'expérience et la théorie, on peut alors retrouver la valeur des coefficients α et β . On retrouve des valeurs proches de celles trouvées plus tôt. On peut également voir d'autres caractéristiques de ces phénomènes non-linéaires.

2.4 Autres effets de la non-linéarité

On retrouve ici un phénomène d'enrichissement spectral lorsqu'on est dans le régime non-linéaire. Pour des faibles valeurs de R_{NL} on n'a pas un signal sinusoïdal.

Enrichissement spectral



- Proche du seuil, on a un signal sinusoïdal.
- Loin du seuil, le signal n'est plus sinusoïdal : on a un enrichissement en harmoniques. On peut tracer la TF pour obtenir le spectre.

De plus, la période des oscillations n'est pas constante en fonction du paramètre de contrôle R_{NL} .

Augmentation de la période des oscillations



La période des oscillations augmente lorsque ϵ augmente, c'est à dire quand R_{NL} diminue.

On a vu ici des évolutions dans des potentiels paraboliques, mais on peut imaginer maintenant une autre forme de potentiel : un double puit.

3 Oscillateur double-puits

3.1 Retour sur le pendule

Jusqu'ici, le pendule évoluait dans un puit de potentiel, avec une seule position d'équilibre stable en $\theta=0$. En utilisant des aimants, on peut créer un double puit de potentiel. On aura alors deux nouvelles positions d'équilibre stable, et la position $\theta=0$ devient une position d'équilibre instable. Le dédoublement des points fixes n'est possible que grâce à la non-linéarité.

Double puit de potentiel

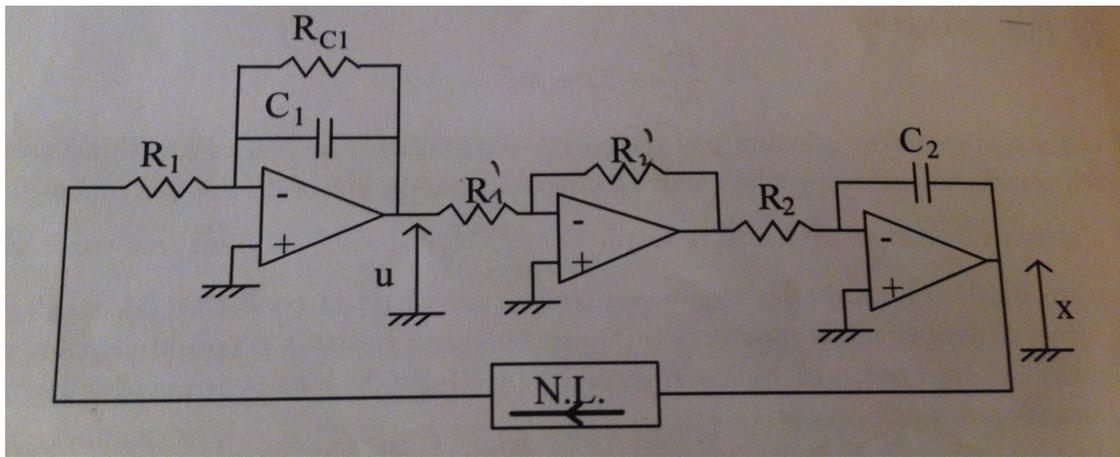


- Faire plusieurs acquisitions et voir que le pendule est piégé à l'état final à l'une ou l'autre des nouvelles positions d'équilibre stable.
- Tracer le portrait de phase sur un temps d'acquisition long.

Ici, on a une bifurcation (modification ou apparition de points d'équilibre) fourche supercritique. Selon les conditions initiales, le pendule va se retrouver piéger dans l'une ou l'autre des positions d'équilibre.

3.2 Double-puits électronique

On peut réaliser l'analogie en électronique en changeant la place de l'élément non-linéaire dans le circuit précédent. On place l'élément non-linéaire sur la boucle de rétro-action. Notons qu'ici nous n'avons plus de paramètre de contrôle.



Double puit électronique

- On change l'élément non-linéaire de place dans le circuit. On change la valeur des composants (Krob p.179).
- Sur LatisPro, on peut tracer le portrait de phase : on retrouve quelque chose qui ressemble beaucoup à celui du pendule non-linéaire.

Conclusion

Ce montage a été l'occasion d'introduire des méthodes pour étudier les systèmes non-linéaires dont les équations n'ont pas de solutions simples. Le portrait de phase permet de visualiser l'évolution du système sur plusieurs périodes, la présence de déformations des trajectoires ou de cycle limite permet de déceler l'existence de phénomènes non linéaires. Le spectre de Fourier permet de rendre compte du phénomène d'enrichissement spectral observé pour les systèmes NL. De plus, les diagrammes de bifurcation permettent de voir de façon claire l'évolution du système en fonction d'un paramètre de contrôle. Ils sont très utilisés pour l'étude des systèmes dynamiques afin de déterminer leur nature et la catégorie de points fixes qu'ils présentent. Il existe néanmoins d'autres types d'instabilités telles que le chaos.