

# MP28 : INSTABILITÉS ET PHÉNOMÈNES NON-LINÉAIRES

22 février 2017

Lucien Causse & Corentin Gourichon

*"J'ai une énigme pour vous ! Comment obtenir 30 centimes avec 2 pièces, alors qu'une d'elle n'est pas une pièce de 10 centimes."*

ÉNIGME D'UN CÉLÈBRE DOCTEUR AMÉRICAIN

## Remarque du jury

Il s'agit de bien illustrer quelques caractéristiques des systèmes non linéaires, de préférence dans différents domaines de la physique. Selon le (ou les) système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage, on peut penser à la pluralité des positions d'équilibre, au phénomène de bifurcation, à l'enrichissement spectral, au ralentissement critique..

## Bibliographie

- ⚡ *Électronique expérimentale*, Michel Krob
- ⚡ *Le Bup, physique chimie*, N891, Février 2007

## Expériences

- ☞ Le pendule non linéaire
- ☞ L'oscillateur de Van der Pol

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Système mécanique : le pendule non linéaire</b>	<b>1</b>
1.1	Calibration du capteur d'angle . . . . .	1
1.2	Formule de Borda . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Système électronique : l'oscillateur de Van der Pol</b>	<b>2</b>
2.1	L'élément non linéaire . . . . .	2
2.2	Notion de bifurcation . . . . .	3
2.3	Oscillations de relaxation . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Pendule pesant avec deux aimants</b>	<b>4</b>

## 1 Système mécanique : le pendule non linéaire

### 1.1 Calibration du capteur d'angle

**Calibration du capteur d'angle**

⚡ Référence ⌚ 5 minutes

Matériel

- Pendule
- Multimètre

On va chercher à démontrer la relation linéaire entre tension et angle du pendule.

### 1.2 Formule de Borda

### Formule de Borda

⚡ BUP 891

⌚ 10 minutes

Matériel

- Pendule
- Carte d'acquisition
- Ordinateur

Un pendule simple en absence de frottement est mécaniquement isolé. L'énergie mécanique se conserve. La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps conduit directement à l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \tag{1}$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Dans l'approximation des petits angles on a l'équation linéaire suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \tag{2}$$

avec  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Cependant si  $\theta$  devient grand l'approximation n'est plus pertinente, il faut pousser le développement plus loin pour obtenir une meilleure description de l'énergie potentielle. On a l'équation non linéaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \tag{3}$$

L'équation différentielle est connue sous le nom d'équation de Duffing.

On utilise une méthode dite perturbative pour trouver l'expression de la période. Soit :

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta^2}{16} \right) \tag{4}$$

## 2 Système électronique : l'oscillateur de Van der Pol

### 2.1 L'élément non linéaire

#### Etude de l'élément non linéaire

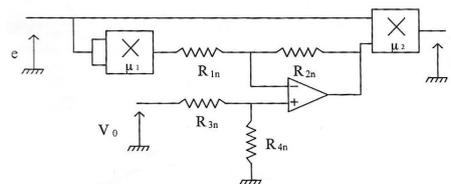
⚡ Krob

⌚ 10 minutes

Matériel

- Élément non linéaire (+ alimentation)
- Deux GBF
- Un oscilloscope

On considère le circuit suivant :



Pour l'analyse de ce circuit, nous supposons que l'amplificateur opérationnel est idéal ainsi que les multiplieurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . On note  $x_1$  et  $x_2$  les tensions appliquées sur les entrées de l'un des deux multiplieurs et  $y$  la tension qu'il délivre en sortie. Le multiplieur  $\mu_2$  est câblé de sorte qu'il présente la relation entrée-sortie suivante :

$$y = -Kx_1x_2 \tag{5}$$

avec les tensions appliquées  $x_1 = e$  et  $x_2 = \frac{R_{4n}}{R_{4n}+R_{3n}} \frac{R_{1n}+R_{2n}}{R_{1n}} V_0 - \frac{KR_{2n}}{R_{1n}} e^2$ . Ainsi sous ces hypothèses, l'expression théorique de la caractéristique entrée-sortie du montage est la suivante :

$$y = \left(-\frac{R_{4n}}{R_{4n} + R_{3n}} \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{1n}} KV_0\right)e + \left(\frac{K^2 R_{2n}}{R_{1n}}\right)e^3 \tag{6}$$

Il s'agit bien d'une caractéristique polynomiale cubique que nous noterons :

$$s = \alpha e + \beta e^3 \tag{7}$$

Nous identifions les paramètres de la non-linéarité par une mesure de la pente de la caractéristique à l'origine : elle nous permet d'estimer  $\alpha$ . Ensuite on détermine la valeur de  $\beta$  par la mesure expérimentale des éros non nuls  $e_1, e_2$  de la caractéristique. Nous avons :

$$\alpha = \tag{8}$$

et

$$\beta = \frac{-\alpha}{e_1^2} = \tag{9}$$

## 2.2 Notion de bifurcation

### Notion de bifurcation

✎ Krob

⊖ 10 minutes

Matériel

- Un GBF
- Élément non linéaire (+ alimentation)
- Oscillateur de Van der Pol (+ alimentation)
- Un oscilloscope
- Deux résistances variables

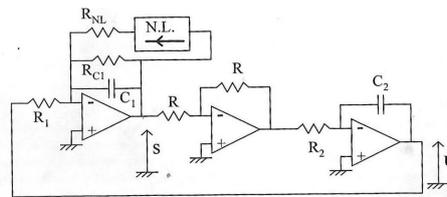
Il s'agit d'un oscillateur qui est non-linéaire par son amortissement ; il est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \epsilon\omega_0\left(1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \tag{10}$$

où  $\omega_0$  et  $s_0$  désignent des constantes positives et  $\epsilon$  désigne un paramètre variable positif.

L'intérêt d'une telle modélisation est qu'elle permet d'expliquer le démarrage et la stabilisation en amplitude d'une oscillation ; la clef de ce comportement résulte du signe, variable en fonction de la valeur instantanée de  $s$ , de l'amortissement  $-\epsilon\omega_0\left(1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right)$ . Ainsi, qualitativement, on peut dire que si  $s(t)$  est plus petit que  $s_0$  (par exemple quasi-nul comme le bruit de fond sur lequel démarre en pratique les oscillateurs), l'amortissement est négatif et  $s(t)$  tend à croître, alors que si  $s(t)$  dépasse  $s_0$ , l'amortissement devient positif et  $s(t)$  tend à décroître. On conçoit l'existence d'une oscillation permanente dont l'amplitude doit être voisine de  $s_0$ .

On considère le circuit suivant :



Pour simplifier son analyse, omettons tout d'abord les résistances  $R_{NL}, R_{C1}$  et le circuit non-linéaire : ce circuit est un simple oscillateur harmonique non amorti décrit par :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} s = 0 \tag{11}$$

Le fait de rajouter une résistance  $R_{C1}$  conduit à rajouter un terme d'amortissement dans le système :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{R_{C1}C_1} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} s = 0 \quad (12)$$

Enfin, le rajout de  $R_{NL}$  et du circuit non-linéaire de caractéristique  $s = \alpha e + \beta e^3$  le transforme en oscillateur de Van der Pol :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_{C1}} + \frac{\alpha}{R_{NL}} \right) \left( 1 + \frac{s^2}{\frac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{3\beta R_{C1}}} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} s = 0 \quad (13)$$

on identifie :

$$\epsilon = -\sqrt{\frac{R_1R_2C_2}{C_1} \frac{R_{NL} + \alpha R_{C1}}{R_{NL}R_{C1}}} \quad (14)$$

Le paramètre expérimental qui nous permet de faire varier  $\epsilon$  est  $R_{NL}$ . On note que la variation de  $R_{NL}$  entraîne celle de  $s_0$  (donc celle de l'amplitude des oscillations). Enfin, le système est le siège d'oscillations dès que  $\epsilon > 0$ . Ainsi la condition de démarrage des oscillations s'écrit ici :

$$R_{NL} < -\alpha R_{C1} \quad (15)$$

Le démarrage des oscillations à partir du repos à lieu pour une valeur de

$$R_{NL} = \quad (16)$$

ce qui est en accord avec la modélisation du circuit non-linéaire que nous avons faite dans le paragraphe précédent où nous avons mesuré  $\alpha$ .

## 2.3 Oscillations de relaxation

On peut essayer de vérifier la croissance de la période  $T$  des oscillations de relaxation en fonction de  $\epsilon$ . On peut tout d'abord observer le spectre à une résistance avoisinant les centaines de ohm. Le spectre est très riche en harmonique et la fréquence du fondamentale est devenue plus petite.

On note la période en fonction de la résistance. On constate que  $T$  est fonction de  $\epsilon$ .

Lorsqu' $\epsilon$  est supérieur à 1, (physiquement, la durée de transition entre les deux états entre lesquels l'oscillateur bascule, doit être négligeable devant sa période), il y a relation de proportionnalité entre  $\omega_0 T$  et  $\epsilon$ .

## 3 Pendule pesant avec deux aimants

### Pendule pesant avec deux aimants

➤ Référence

⊖ 5 minutes

Matériel

- Pendule
- Carte d'acquisition
- Ordinateur
- Deux aimants avec support

On modifie les positions d'équilibre grâce aux aimants. L'illustrer manuellement avec des petites perturbations. En déduire le potentiel. On peut compléter l'étude en traçant le portrait de phase.

MP 28: Instabilités et phénomènes non linéaires

I Système mécanique: le pendule non linéaire

A) Calibration du capteur d'angle



On a  $U = \Theta$   
avec  $a =$

B) Formule de Borda

Etude d'un pendule donne

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\Theta = 0$$

On ne considère plus des petits angles, on a:

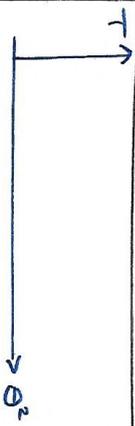
$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \omega_0^2 \left(\Theta - \frac{\Theta^3}{6}\right) = 0$$

avec  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Soit

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\Theta^2}{16}\right)$$

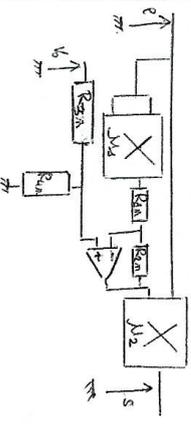
On a :



On a  $T = a + b\Theta^2$   
avec  $a =$   
 $b =$   
Or  $T_{exp} =$

II Système électronique: l'oscillateur de Van der Pol

A) L'élément non linéaire

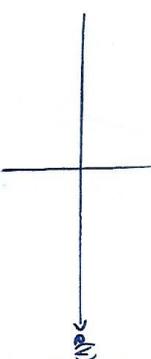


On a la relation:

$$b = \alpha e + \beta e^3$$

avec  $\alpha = -\frac{R_{14} R_{15} R_{16} R_{17} R_{18} R_{19} R_{20} R_{21} R_{22} R_{23} R_{24} R_{25} R_{26} R_{27} R_{28} R_{29} R_{30} R_{31} R_{32} R_{33} R_{34} R_{35} R_{36} R_{37} R_{38} R_{39} R_{40} R_{41} R_{42} R_{43} R_{44} R_{45} R_{46} R_{47} R_{48} R_{49} R_{50} R_{51} R_{52} R_{53} R_{54} R_{55} R_{56} R_{57} R_{58} R_{59} R_{60} R_{61} R_{62} R_{63} R_{64} R_{65} R_{66} R_{67} R_{68} R_{69} R_{70} R_{71} R_{72} R_{73} R_{74} R_{75} R_{76} R_{77} R_{78} R_{79} R_{80} R_{81} R_{82} R_{83} R_{84} R_{85} R_{86} R_{87} R_{88} R_{89} R_{90} R_{91} R_{92} R_{93} R_{94} R_{95} R_{96} R_{97} R_{98} R_{99} R_{100}}$

Soit



On a

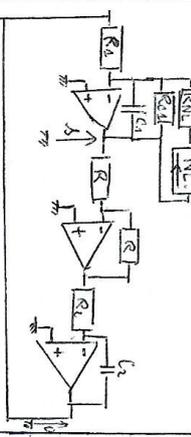
$$\alpha = \frac{\Delta V(0)}{\Delta V}$$

B) Notion de bifurcation

Oscillateur non linéaire induit par son amortissement, décrit par l'équation:

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \epsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right) \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

On a le circuit suivant:



On identifie les paramètres:

$$\epsilon = -\frac{R_1 R_2 C_1}{C_2} \frac{\alpha R_3 + R_{NL}}{R_{NL} R_4 C_1}$$

Oscillation dès que:

$$\epsilon > 0 \Rightarrow R_{NL} < \alpha R_3$$

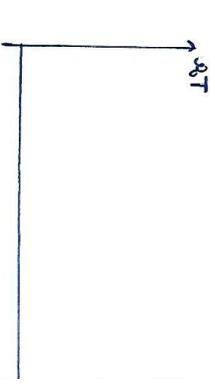
On mesure

$$R_{NL_{lim}} =$$

C) Oscillations de relaxation

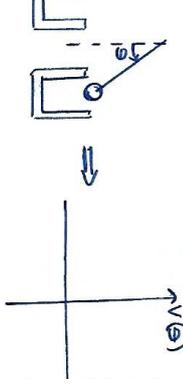
Quand  $R_{NL}$  diminue:  $\Rightarrow$  envahissement spectral

Evolution de la période en fonction de  $\epsilon$

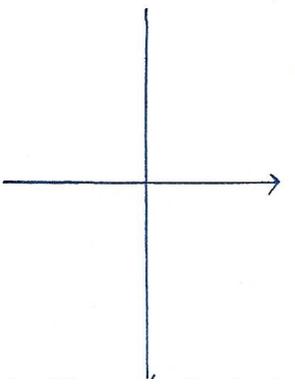


avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$

III Pendule passant avec deux aimants symétriques



On peut dresser la phase de phase



## Remarques, questions