

MP 28 - INSTABILITÉS ET PHÉNOMÈNES NON-LINÉAIRES

23 février 2018

Mieux vaut un temps d'été stable qu'un temps détestable

Bastien Gili-tos & Pierre Comelli

CLAUDE FRISONI

Commentaires du jury

2017 : Ce montage ne peut pas se limiter à étudier le non isochronisme des oscillations du pendule pesant.

mix 2010-2016 : Il s'agit de bien d'illustrer quelques caractéristiques des systèmes non-linéaires, de préférence dans différents domaines de la physique. Selon le (ou les) système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage, on peut penser à la pluralité des positions d'équilibre, au phénomène de bifurcation, à l'enrichissement spectral, au ralentissement critique, caractérisation des non-linéarités, doublement des périodes ...

2011 : Les candidats doivent prendre en compte les deux aspects de l'intitulé du montage. Cette année, les présentations se sont trop souvent limitées aux aspects non-linéaires.

Bibliographie

- ♣ *Physique expérimentale* [1], **Jolidon** → Pour les manip sur le pendule pesant grand angle et le pendule pesant à deux puits de potentiel
- ♣ *Synchronisation de deux oscillateurs couplés — BUP 815* [2], **Flieller, Magoni** → Pour la manip sur la synchronisation d'oscillateurs à relaxation
- ♣ *poly MP28 2010 - section 2* [3], **Brun Vaupre** → Pour la manip qui n'a pas marché, celle des points fixes stables et instables d'un pendule pesant tournant

Expériences

- ♣ Non-linéarité du pendule pesant grand angle
- ♣ synchronisation de deux oscillateurs à relaxation - étude de la fréquence et de la stabilité
- ♣ pendule pesant à double-puits de potentiel - étude de la bifurcation fourche

Table des matières

1	Pendule pesant grand angle	2
1.1	Modèle et dispositif	2
1.2	Vérification de la formule de Borda	2
1.3	Portrait de phase et modification du spectre	3
2	Synchronisation de deux oscillateurs à relaxation	4
2.1	Présentation de l'oscillateur à relaxation	4
2.2	Synchronisation - étude de la fréquence - non exploité	6
2.3	Synchronisation - étude de la stabilité	8
3	Pendule pesant à deux puits de potentiel	13
4	Pendule paramétrique tournant - à moitié concluant	13
5	Tableau proposé	16

Introduction

1 Pendule pesant grand angle

1.1 Modèle et dispositif

On s'intéresse dans un premier temps à un système mécanique, à savoir un pendule pesant sans frottements, dont on connaît bien l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

Le pendule possède deux positions d'équilibre, en $\theta = 0$ et π et bien sur seule la position $\theta = 0$ est stable. On connaît bien le résultat pour de faibles amplitudes : on peut alors linéariser le sinus, on trouve ainsi une période T_0 indépendante de l'amplitude initiale à laquelle est lâché le pendule, c'est l'*isochronisme* des oscillations.

Le dispositif dont on dispose comprend un capteur de position (potentiomètre relié à un circuit électrique) qui délivre une tension proportionnelle à l'angle : il nous faut donc le calibrer.



Calibrage capteur d'angle

⚡ Jolidon

⊖ qq minutes

Matériel :

pendule pesant grand angle P.79.14

multimètre

Relever les tensions pour des angles allant de -110 à $+110$. Mettre les angles en radians.
Gérer les incertitudes (liées à la lecture de l'angle pour θ et au multimètre pour la tension U). Pour l'incertitude du multimètre, celle de la variation de la valeur affichée (car il est difficile de garder le pendule parfaitement immobile) sera certainement plus grande que l'incertitude liée au multimètre même.
On trace enfin $\theta = f(U)$ et on vérifie le modèle linéaire.

1.2 Vérification de la formule de Borda

L'étude aux petits angles ne nous intéresse pas vraiment ici, on part du principe qu'on connaît bien ça et on étudie le système directement à des angles plus grands. Si l'on n'arrête pas le développement du sinus à l'ordre 1 en θ mais à l'ordre suivant non nul (donc l'ordre 3), on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \quad (2)$$

Il est alors possible (voir même conseillé) de se rendre compte que, pour une solution oscillant à ω , ce terme non linéaire va créer une vibration à la pulsation 3ω . Ainsi, grâce à une méthode perturbative non détaillée ici (pour ça voir LP correspondante), on peut finalement arriver sur une nouvelle expression de la période, ou *Formule de Borda* pour les intimes :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} \right) \quad (3)$$

Si on va plus loin dans les développements, on obtient :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} + \frac{11 * \theta^4}{3072} \right) = T_0 (1 + a\theta^2 + b\theta^4) \quad (4)$$

Cette formule traduit donc de manière totalement non subtile la perte d'isochronisme puisque T dépend explicitement de l'angle initial auquel est lâché le pendule θ_m . Et ben allez, Feu ! On va vérifier tout ça.



Formule de Borda

🔧 Jolidon

⌚ qq minutes

Matériel

pendule pesant grand angle P79.14

oscilloscope

Pour cela il existe 2 méthodes, soit on utilise une seule acquisition et on tire profit de la perte d'énergie causée par les frottements (voir Jolidon, encore et toujours), soit on lâche le pendule à différentes valeurs d'angle et on mesure la période du signal sur quelques oscillations, à l'oscillo par exemple.

On ne fait l'étude que sur quelques périodes pour limiter l'influence des frottements.

On a choisit la deuxième méthode car elle est plus précise, et permet ainsi de remonter à un terme supplémentaire dans la formule de Borda (en θ_m^4). Par contre elle est plus longue, mais on pourra alors tirer profit des techniciens le jour J! On trace donc $T = f(\theta_m)$ sur Régressi, dans lequel on a rentré les incertitudes types, incertitudes qu'on justifie (intervalles de confiance toussatoussa), et normalement ça marche bien!

On obtient :

$a_{exp} =$

$b_{exp} =$

Pour commenter, ne pas oublier que la formule de Borda n'est valable que sur un certain domaine. Ne pas oublier également que les frottements provoquent un écart par rapport au modèle.

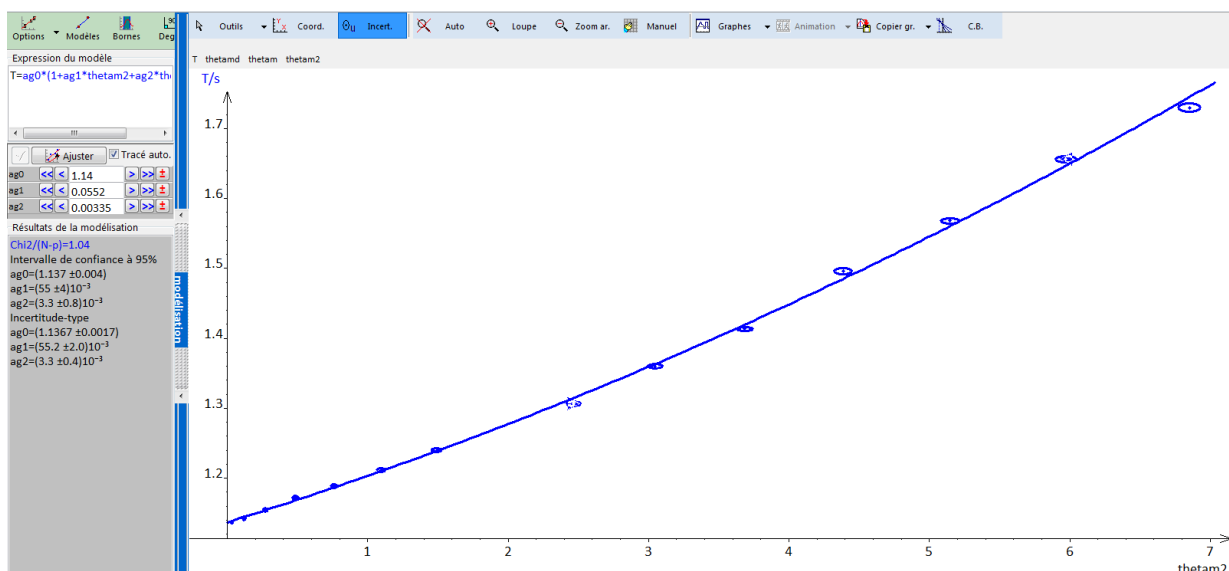


FIGURE 1 – Vérification Borda

1.3 Portrait de phase et modification du spectre

Après acquisition du signal par Latis-Pro, on peut constater la modification du spectre, via transformée de Fourier :

- Décalage de la fréquence fondamentale
- Apparition d'une fréquence à 3ω

Et finalement, la dernière chose qu'on peut regarder c'est le portrait de phase, et constater qu'aux grands angles les ellipses (caractéristiques d'un oscillateur linéaire) sont déformées car le mouvement n'est plus sinusoidal :

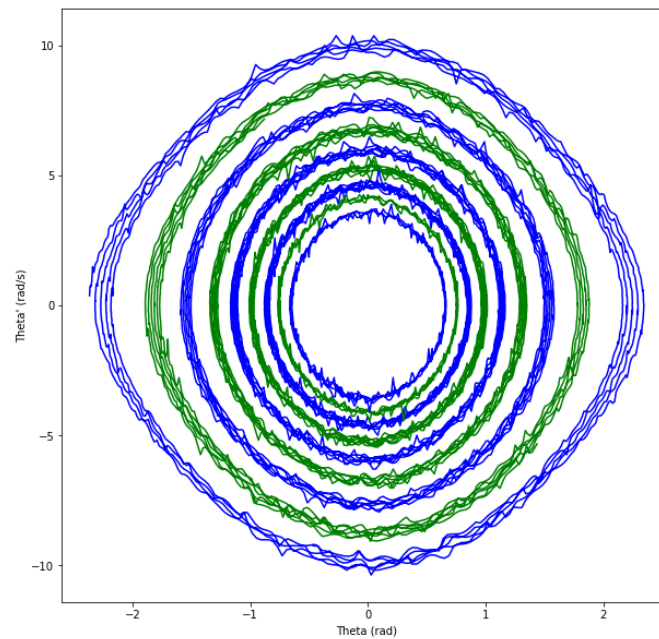


FIGURE 2 – Portrait de phase

On a déjà illustré pas mal de propriétés liées aux non-linéarités sur ce système mécanique (perte isochronisme, enrichissement spectral...). On va donc maintenant voir ce qu'il se passe du point de vue de la stabilité, et ce sur un système électronique.

2 Synchronisation de deux oscillateurs à relaxation

➤ [2] p.65, figures tirées de ce livre

Les oscillateurs à relaxation sont fortement non-linéaires. Tous les systèmes non-linéaires fonctionnant à fréquence variable peuvent se synchroniser sur un signal extérieur.

remarque

Une manipulation introductive peut être celle de la synchronisation de deux métronomes posés sur une même tablette elle-même posée sur deux canettes. Pour réussir cette manip', il faut mettre les métronomes à des fréquences élevées (mais différentes entre elles).

Cette manipulation est analogue à celle de Huygens (1665) qui avait observé la synchronisation des balanciers d'horloges couplées.

2.1 Présentation de l'oscillateur à relaxation

On a le montage suivant :

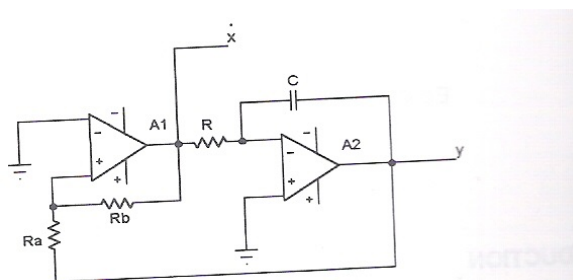


FIGURE 3 – Oscillateur à relaxation

L'oscillateur à relaxation est constitué d'un amplificateur opérationnel (AO) (appellation correcte aujourd'hui : amplificateur linéaire, même si ici il ne fonctionnera pas en régime linéaire...) monté en comparateur à hystérésis et d'un AO monté en intégrateur inverseur.

La tension de saturation est $\pm V_{sat}$ et on notera $k = \frac{R_a}{R_b}$.

La fréquence des oscillations est $f_1^0 = \frac{1}{2R_1 C \ln(1+2k)}$. Si $k \ll 1$, la fréquence devient $f_1^0 = \frac{1}{4kR_1 C}$.

On notera X l'intégrale au cours du temps de x .

On a alors $y = \frac{-X}{R_1 C}$

On obtient l'équation de comportement de l'oscillateur :

$$x = V_{sat} * \text{sign}(x - 4f_1^0 X) \quad (5)$$

Cette équation montre que l'oscillateur est non-linéaire.



Exp 3.1-A - mise en place d'un oscillateur à relaxation

🔧 [1]



Matériel :

1 résistance $R_1 = 8208 \pm 4 \Omega$

1 résistance $R_a = 1k\Omega$

1 résistance $R_b = 10k\Omega$

1 condensateur $C = 1\mu F$

1 AO à alimentation via câble extérieur P41.4

1 AO à alimentation via broches P41.5

1 oscilloscope P36.7

1 RLC-mètre P69.33

1 multimètre P69.38

En préparation, bien faire le zéro sur les *offsets* des AO. C'est-à-dire relier à la masse les entrées + et - de l'AO, et faire varier la molette de *l'offset* jusqu'à avoir un signal nul en sortie.

Observer le signal en x et y . Remarquer que l'on a bien un signal carré pour x , triangulaire pour y , et que leurs fréquences correspondent bien à celle prévue.

On doit avoir un rapport cyclique de 0.5. Si ce n'est pas le cas, c'est que l'offset est mal réglé.

Mesurer précisément la valeur de R_1 . Vérifier rapidement les valeurs des autres composants.



Exp 3.1-B - mise en place d'un deuxième oscillateur à relaxation

🔧 [1]



Matériel :

1 résistance $R_2 = 6330 \pm 4 \Omega$

1 résistance $R_a = 1k\Omega$

1 résistance $R_b = 10k\Omega$

1 condensateur $C = 1\mu F$

1 AO à alimentation via câble extérieur P41.4

1 AO à alimentation via broches P41.5

L'intérêt ici est de construire un deuxième oscillateur identique au premier si ce n'est $R_2 \neq R_1$ (mais proche tout de même). On aura ainsi deux oscillateurs non-linéaires de fréquences différentes. Mesurer précisément la valeur de R_2 . Vérifier que les autres composants ont des valeurs identiques à celles de l'oscillateur 1. Vérifier que l'oscillateur 2 à une fréquence plus élevée que celle de l'oscillateur 1.

2.2 Synchronisation - étude de la fréquence - non exploité

L'intérêt ici est, à partir de deux oscillateurs de fréquences différentes, d'obtenir un système où les oscillateurs basculent à la même fréquence, fréquence différente de celles de départ. On a alors synchronisation des oscillateurs. On va mettre en évidence le comportement de cette synchronisation, dont la fréquence dépend des résistances mises en jeu.

Attention, le BUP présente bien les calculs qui permettent de déterminer cette plage. Par contre, il ne donne presque aucune explication physique au phénomène.

On a le montage suivant :

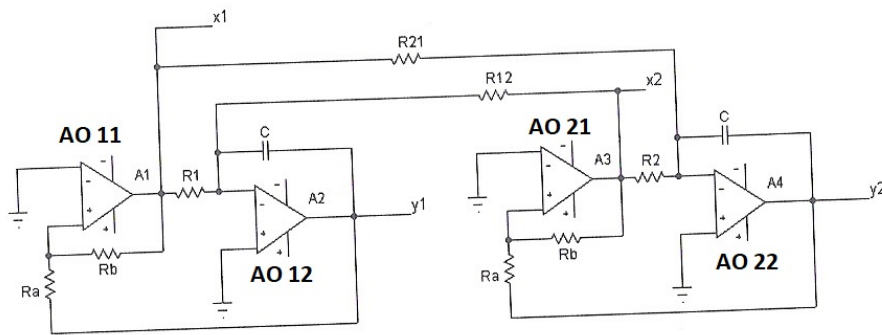


FIGURE 4 – Couplage de deux oscillateurs à relaxation

On fait une loi des mailles pour obtenir les équations de comportement, avec $i, j = 1, 2$:

$$y_i = -\left(\frac{X_i}{R_i C} + \frac{X_j}{R_{ij} C}\right) \quad (6)$$

$$x_i = V_{sat} * \text{sign}\left[x_i - 4f_i^0\left(X_i + \frac{R_i}{R_{ij}}X_j\right)\right] \quad (7)$$

On peut remarquer que le terme de couplage, présent dans un $\text{sign}(\dots)$, n'est pas linéaire.

Surtout on peut voir qu'il y a synchronisation des deux oscillateurs, avec l'un en avance par rapport à l'autre. Cette synchronisation est propre aux systèmes non-linéaires.

L'allure de la synchronisation est :

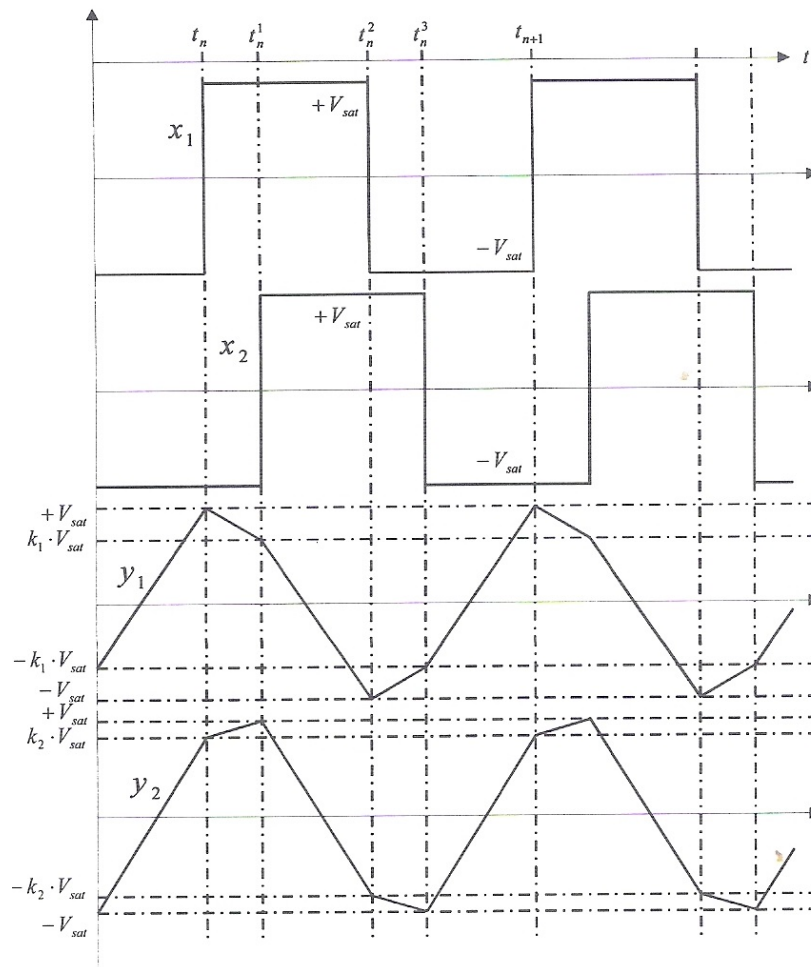


FIGURE 5 – Synchronisation des oscillateurs

En fait, si auparavant l'AO₂₂ — y_2 — n'intégrait que la sortie de l'AO₂₁ — x_2 — via R_2 , il intègre dorénavant également la sortie de l'AO₁₁ — x_1 — via R_{21} . Ainsi, sur la partie gauche de graphique ??, quand l'AO₁₁ bascule de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$, la pente de y_2 diminue et le basculement de x_2 est retardé.

Après étude analytique, la fréquence de synchronisation est donnée par (attention, il y a une erreur dans le BUP : ils ont oublié le k) :

$$f_s = \frac{R_{21}}{4k * (R_{21} - R_{12})} * \frac{1}{R_2} - \frac{R_{12}}{4k * (R_{21} - R_{12})} * \frac{1}{R_1} = a * \frac{1}{R_2} + b \quad (8)$$



Exp 3.2 - couplage non-linéaire de deux oscillateurs à relaxation - étude de la fréquence

☞ [1]



Matériel :

- celui de 3.1-A et 3.1-B +
- remplacer R2 par une résistance à décade P56.14
- 2 résistances à décades R_{12} et R_{21} P56.14
- 1 fréquencemètre P69.6

Réaliser le montage de la figure

Se placer à R_{21} et R_{12} fixés, par exemple 30kΩ et 6kΩ. Mesurer leurs valeurs précises au multimètre. Brancher le fréquencemètre à la sortie de l'AO 11.

Pour différentes valeurs de R2, relever la fréquence, tout en vérifiant à l'oscilloscope que l'on a toujours un signal stable — pour cela, faire varier R2 entre 5 et 21kΩ de manière à rester dans les domaines de stabilité, domaines que

l'on étudiera ci-après.

$$\text{Tracer } f_s = a * \frac{1}{R_2} - b$$

L'incertitude sur R_2 , une boîte à décade, est de $1/100$. On pourrait être plus précis en mesurant en enlevant la résistance du circuit et en relevant sa valeur au multimètre à chaque point de mesure.

$$R_{12} = 6055 \pm 4\Omega; \quad R_{21} = 29530 \pm 40\Omega$$

$$a_{att} = (3138 \pm 2)10^3 Hz\Omega^{-1}; \quad a_{exp} = (3160 \pm 30)10^3 Hz\Omega^{-1}$$

$$b_{att} = -77.9 \pm 0.2 Hz; \quad b_{exp} = -80 \pm 2 Hz$$

On retrouve bien le comportement attendu.

Courbes obtenues :

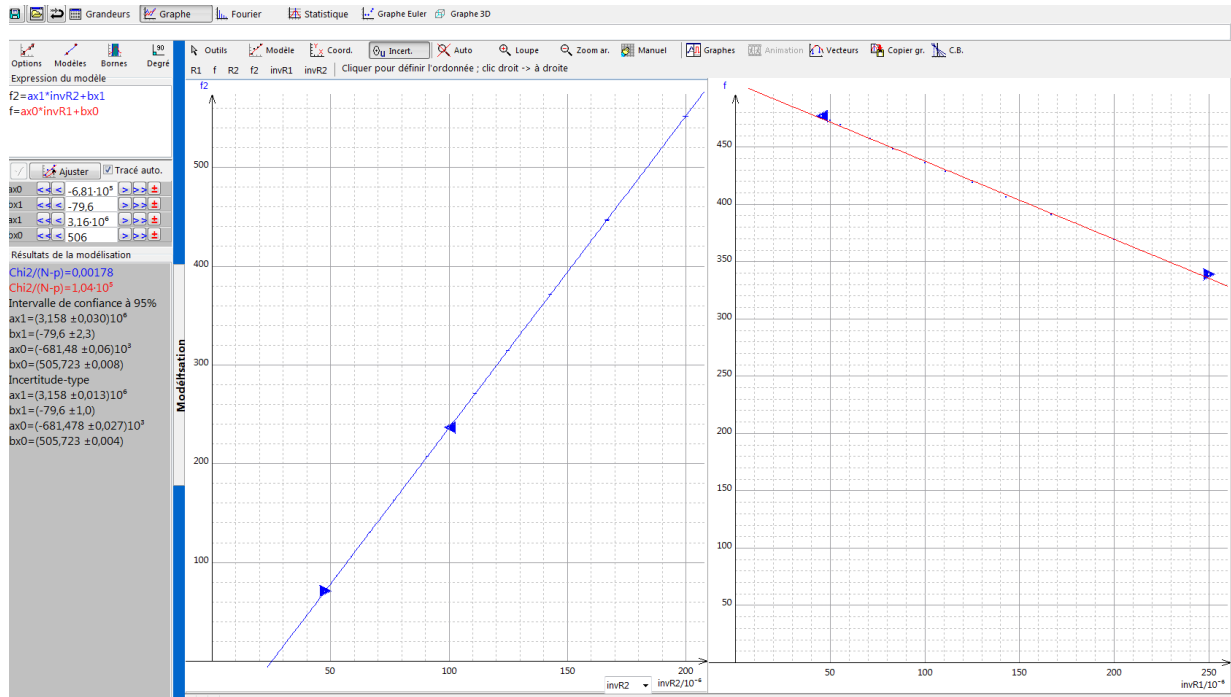


FIGURE 6 – Fréquences en fonction de $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$

2.3 Synchronisation - étude de la stabilité

On remarque que l'on a une synchronisation stable que pour certaines valeurs de couplages. Dans d'autres cas, on a un des oscillateurs qui n'oscille plus ou alors on a les deux oscillateurs qui se mettent à avoir des fréquences variables. On va donc étudier les plages de stabilité.

Une étude analytique détaillée nous donne les plages suivantes en fonction des résistances de couplage R_{21} et R_{12} :

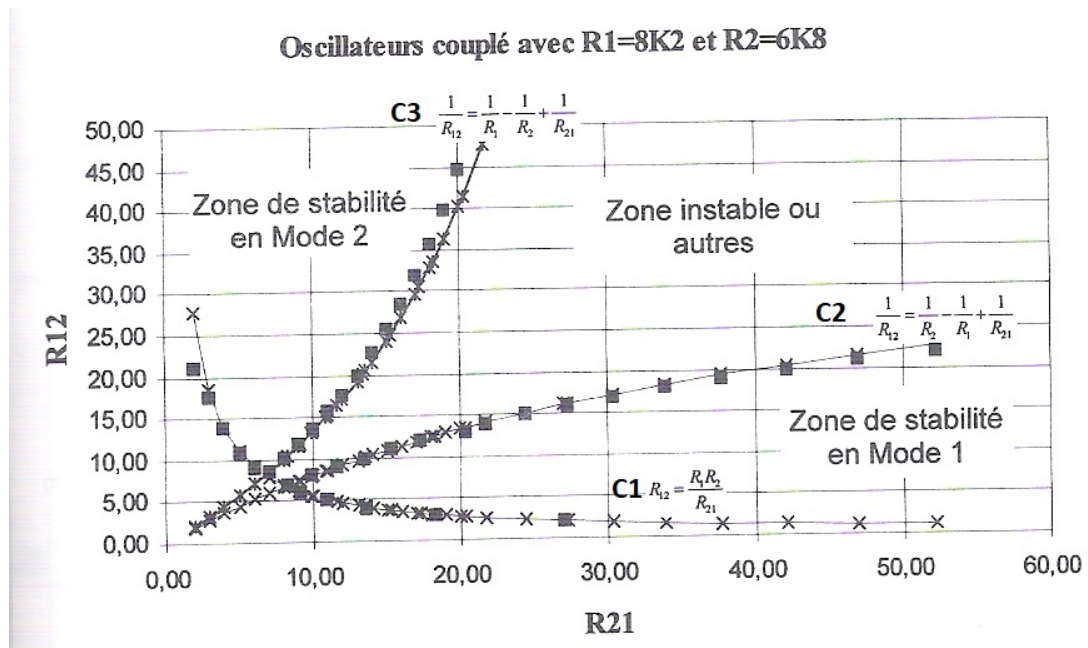


FIGURE 7 – Plages de stabilité

Avec le mode 1 correspondant à x_1 en avance sur x_2 , et le mode 2 à x_1 en retard sur x_2 . Entre les courbes C1 et C2 et C2 et C3, on a les plages de synchronisation stable.

Sous C1, on a perte de la synchronisation et de l'oscillation d'un des deux oscillateurs :

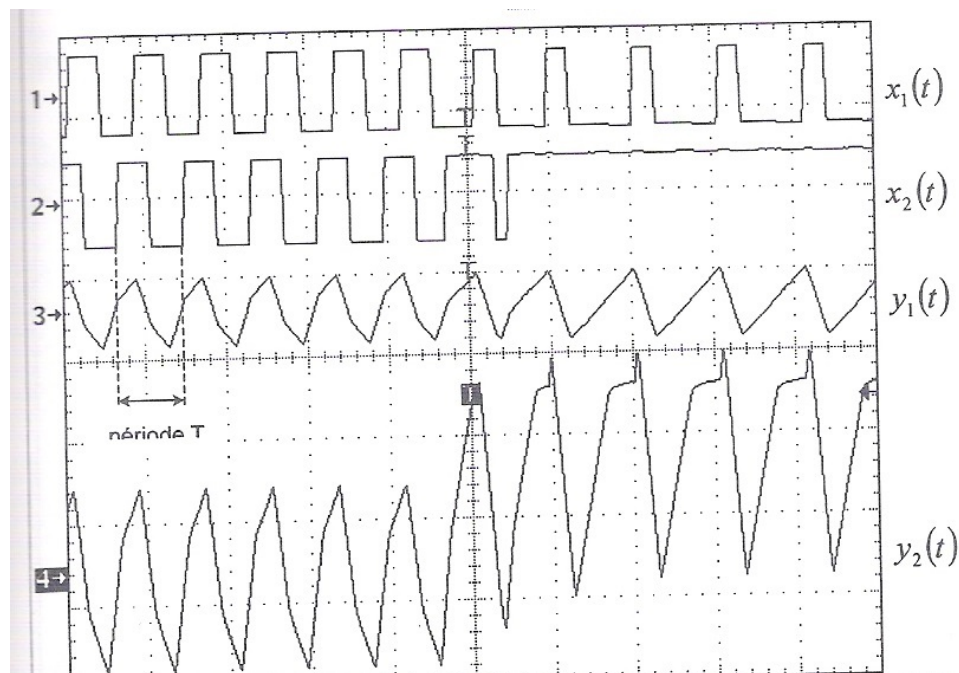


FIGURE 8 – Perte de synchronisation

En fait, dans l'exemple ci-dessus, les résistances de couplage sont telles que l' $AO_{11} - x_1$ bascule trop rapidement pour que l' $AO_{22} - y_2$ puisse avoir le temps d'atteindre $-V_{sat}$. Résultat, l' $AO_{21} - x_1$ n'a pas l'opportunité de basculer et reste à la valeur $+V_{sat}$.

Entre C2 et C3, on a perte de la stabilité des oscillations :

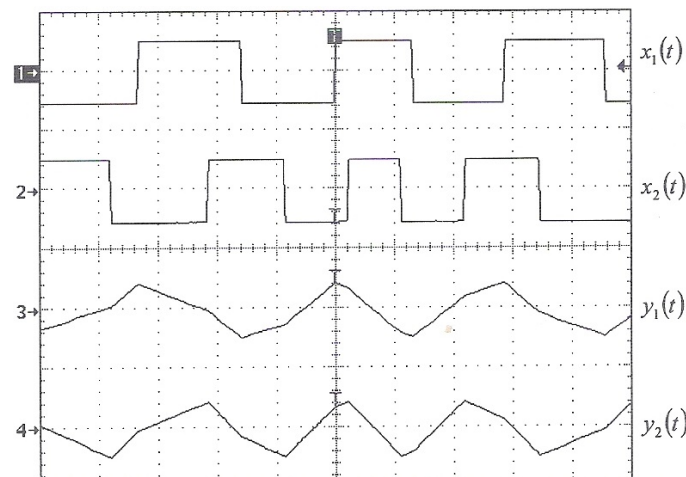


FIGURE 9 – Instabilité

Les résistances de couplage sont telles que un coup l'AO11 bascule avant l'AO12, un coup après.

Remarque, si $R_1=R_2$, cette plage d'instabilité n'existe pas. On passe directement du mode 1 au mode 2 sans perte de la synchronisation. En effet, dans ce cas, les courbes C2 et C3 sont identiques.



Exp 3.3 - couplage non-linéaire de deux oscillateurs à relaxation - étude de la stabilité

🔗 [1]



Matériel :

celui de 3.2

remettre $R_2=6800\Omega$

Observer à l'oscilloscope les sorties des quatre AO.

A R_{21} fixé, faire varier R_{12} jusqu'à atteindre les limites de stabilité de la synchronisation.

Tant que vous serez à gauche du mode 1, c'est-à-dire pour R_{21} petit, vous ne trouverez qu'une limite inférieure, correspondant à la courbe C1 ou C3. Pour R_{21} suffisamment grand, vous trouverez trois limites correspondant aux courbes C1, C2 et C3.

Recommencer les mesures en faisant varier R_{21} .

Il y a deux incertitudes ici présentes : celle de la boîte à décade et celle du choix de la résistance comme valeur limite. Celle des boîtes à décade est de 1/100 et est largement majoritaire devant celle du choix de la valeur limite. On pourrait limiter l'incertitude des boîtes à décade en les enlevant du circuit à chaque fois et en mesurant leur valeur au multimètre, mais cela ralentit assez largement la prise de mesure, et cela donnerait une précision sans doute inutile ici. En effet, on ne fait pas de la métrologie, on cherche juste à vérifier une relation analytique.

Tracer les courbes $R_{C1} = a1 * \frac{1}{R_{21}}$; $\frac{1}{R_{C2}} = a2 * \frac{1}{R_{21}} + b2$; $\frac{1}{R_{C3}} = a3 * \frac{1}{R_{21}} + b3$

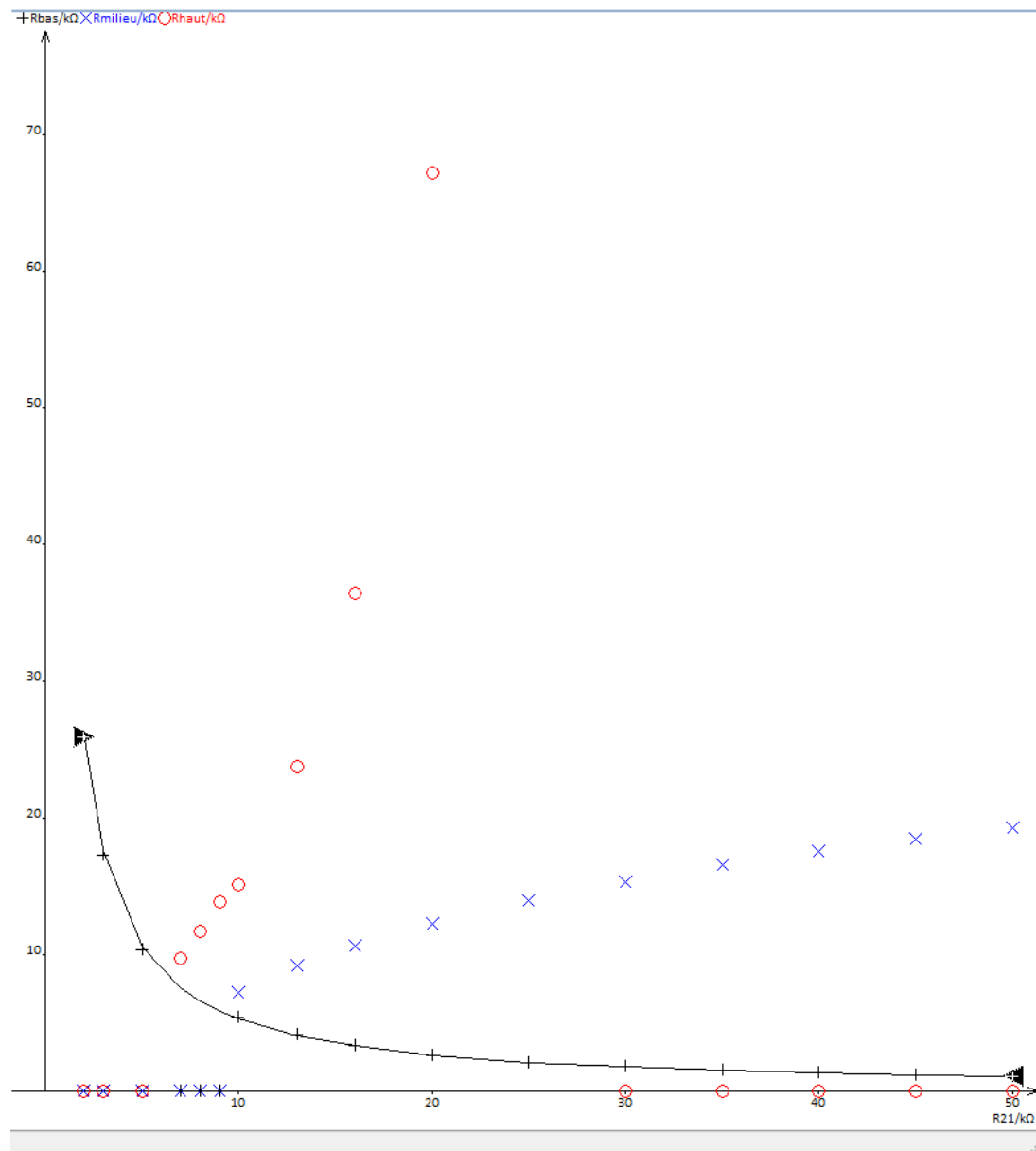


FIGURE 10 – Limites de stabilité

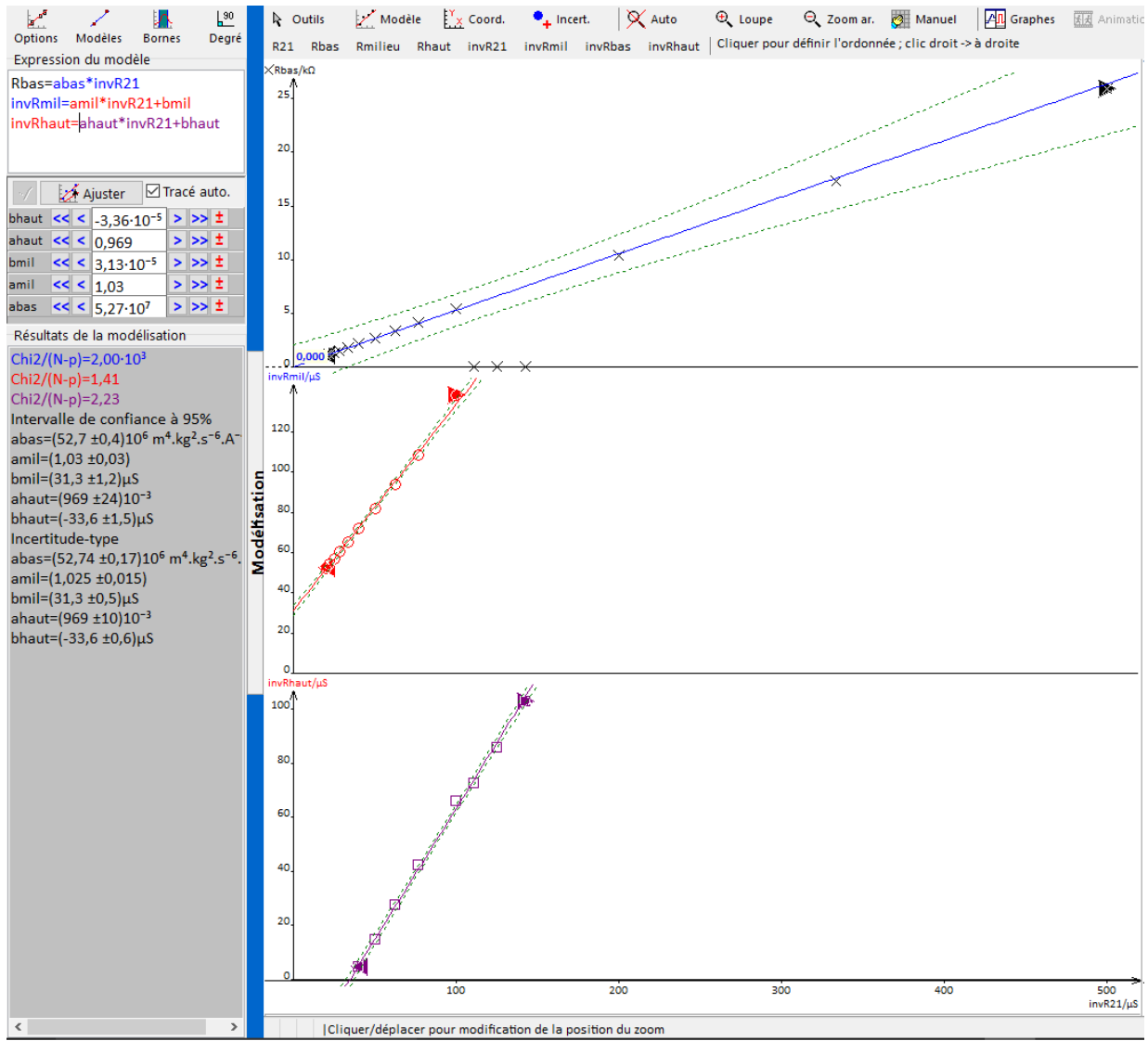


FIGURE 11 – Modélisation des limites de stabilité

- $a_{1att} = 51960 \pm 40k\Omega^2$; $a_{1exp} = 52740 \pm 400k\Omega^2$
- $a_{2att} = 1$; $a_{2exp} = 1.03 \pm 0.03$
- $b_{2att} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = 36,15 \pm 0.05\mu\Omega^{-1}$; $b_{2exp} = 31,4^{\pm 0.6}\mu\Omega^{-1}$
- $a_{3att} = 1$; $a_{3exp} = 0.97^{\pm 0.03}$
- $b_{3att} = -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = -36,15 \pm 0.05\mu\Omega^{-1}$; $b_{3exp} = -33.6 \pm 1.5\mu\Omega^{-1}$

On peut remarquer que l'on obtient les bonnes pentes de 1 pour $\frac{1}{R_{C2}}$ et $\frac{1}{R_{C3}}$.

On peut remarquer que l'on trouve systématiquement des résistances légèrement plus élevées que celles attendues. On est légèrement à côté de la barre d'erreur. Ceci est sûrement dû au fait que le modèle suppose un circuit parfait, hors l'offset des AO pas parfaitement nul créé décalage. Il y a également probablement un écart dû au fait que les résistances R_a , R_b et les condensateurs C ne sont pas rigoureusement identiques entre chaque oscillateur, créant un autre décalage avec le modèle.

Mais d'une manière globale, les lois de comportement analytiques ont bien été vérifiées.

On a vu l'existence de domaines de stabilité d'un système non-linéaire. Cependant, ici, le système était entièrement caractérisé par les paramètres de contrôle, paramètres qui étaient ici les résistances de couplage. On va maintenant voir qu'accompagnant la caractérisation des limites de stabilité, on peut avoir une incertitude sur la caractérisation du système.

3 Pendule pesant à deux puits de potentiel

On revient sur le pendule : il évoluait jusqu'ici dans un puit de potentiel unique autour de $\theta = 0$. Grâce à deux aimants, on peut créer un double puit de potentiel. Ainsi la position $\theta = 0$ devient une position d'équilibre instable, mais on a donc créé deux nouvelles positions d'équilibre stables. Ceci correspond à une bifurcation fourche supercritique.

Pendule double puit

🔗 Jolidon

⌚ qq minutes

Montrer que l'ancienne position d'équilibre stable est devenue instable.

Faire plusieurs acquisitions et voir que le pendule est piégé à l'état final à l'une ou l'autre des nouvelles positions d'équilibre stable.

Tracer le portrait de phase sur un temps d'acquisition long.

4 Pendule paramétrique tournant - à moitié concluant

🔗 [[3]]

Cette partie avait pour but d'étudier la bifurcation en remplacement de la partie 3.

Le principe de l'expérience :

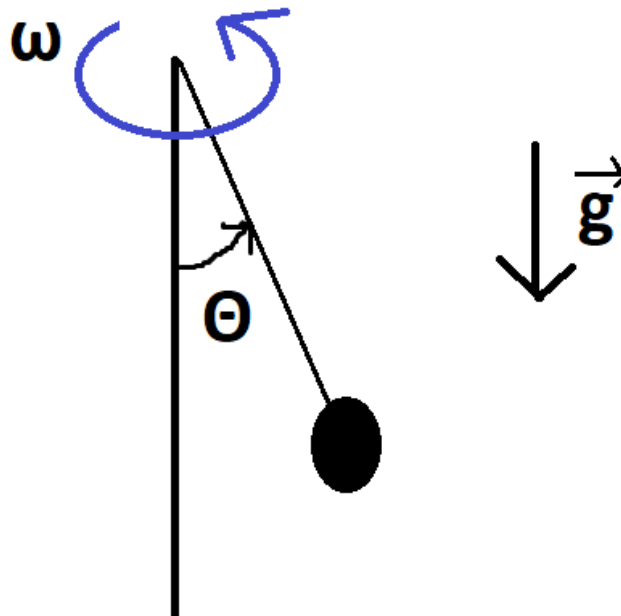


FIGURE 12 – Pendule pesant tournant

On a un pendule pesant au repos. On le fait tourner selon l'axe vertical. En dessous d'une certaine vitesse, la position d'équilibre du pendule reste celle de départ, c'est-à-dire la position verticale, soit $\theta = 0$.

Puis à partir d'une certaine vitesse de rotation critique, on va avoir deux puits de potentiel et deux positions d'équilibre stables différentes de celle de départ. Le pendule prendra alors une des deux positions, $+\theta_{eq}$ ou $-\theta_{eq}$. La position d'équilibre de départ est, elle, devenue instable.

Exp 4 - Pendule paramétrique tournant - étude de la bifurcation

⚙ [3]

⊖

Matériel :

pendule paramétrique P99.27
 moteur à commande électronique P95.22
 réducteur de vitesse 0 à 300 tr/min P95.37
 tachymètre P96.2
 un rapporteur ou assimilé
 potences et noix
 niveau à bulle

A l'aide d'une potence, mettre le moteur de façon à avoir son axe vertical. Branchez sur son embout l'adaptateur de vitesse. Connecter l'oscillateur paramétrique sur l'embout de l'adaptateur. Vérifier la verticalité des axes de rotation avec un niveau à bulle, ainsi que leur alignement. Placer le rapporteur de façon à mesurer l'angle de rotation du pendule. Disymétriser le pendule en coloriant avec des feutres de couleurs différentes les deux faces du pendule. Mettre le moteur en rotation. Mesurer sa vitesse de rotation à l'aide du tachymètre en mode optique — une pastille réfléchissante est sur l'axe du moteur.

Mesurer l'angle de rotation θ du pendule. A l'aide des couleurs, identifier si le pendule a tourné dans le sens direct ou indirect. Dans le poly de 2010, ils disent d'employer un stroboscope pour cela, mais c'est inutile, on voit très bien à l'œil nu en conditions normales.

Recommencer la mesure pour différentes vitesses de rotation et observer la bifurcation.

Vérifier qu'à une vitesse donnée, le pendule part un coup sur deux dans le sens direct ou indirect.

Il me paraît par contre compliqué de vérifier la loi de comportement du pendule, étant donné que la répartition des masses semble assez obscure. Disons que l'on sera dans le grand approximatif.

D'un point de vue incertitude, celle de la mesure du tachymètre est négligeable devant les variations de rotation du moteur. La mesure de l'angle de rotation est quant à elle guère précise, au moins de ± 5 . Il faut bien mettre l'œil de façon à avoir le même angle à gauche et à droite de l'axe du rapporteur.

Voilà le schéma du montage :

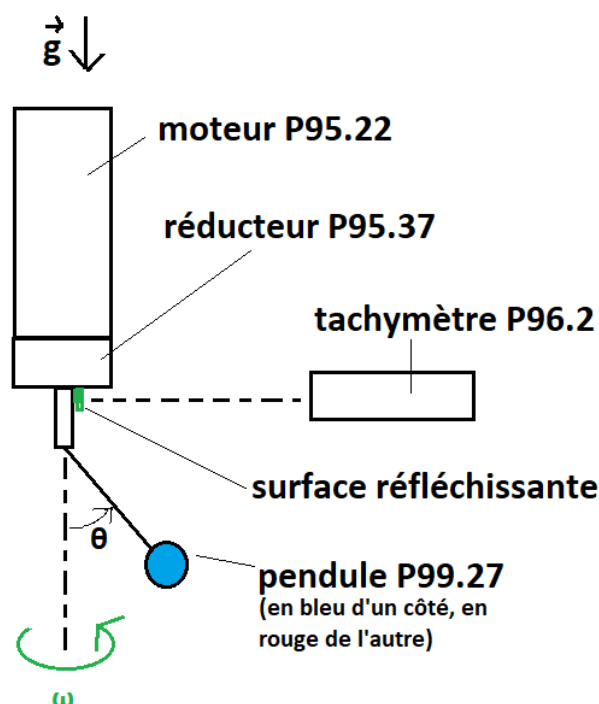


FIGURE 13 – Montage

Voici le résultat que l'on est censé avoir et qu'ils ont eu en 2010 :

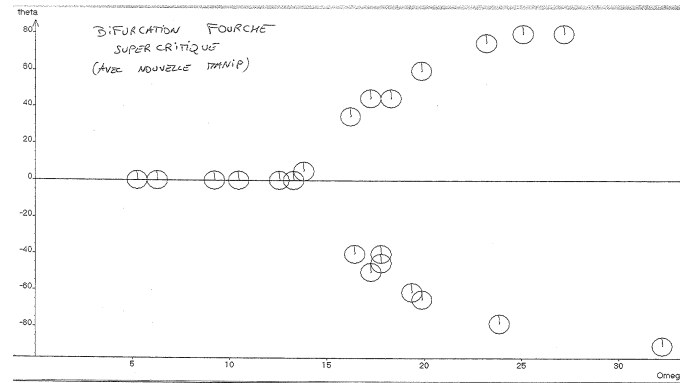


FIGURE 14 – Bifurcation pendule paramétrique

De notre côté, on a bien observé le changement de position d'équilibre du pendule selon la vitesse.

Le problème est que l'on n'a pas réellement observé la bifurcation fourche. En effet, si le pendule est censé partir dans le sens direct ou indirect avec une probabilité 50/50, de notre côté cette probabilité était plutôt de 95/5. On avait une fourche édentée.

Même en essayant d'être rigoureux sur l'alignement vertical pour bien symétriser le problème, on avait ce biais de répartition. Le souci vient sûrement de l'oscillateur paramétrique P99.27/1 qui n'est probablement pas symétrique. Il doit avoir plus de frottement dans un sens que dans l'autre. Ce qui est dommage, c'est que l'oscillateur P99.27/2, peut-être plus fonctionnel, a lui disparu...

Bref, peut-être qu'en donnant un coup de jeune à P99.27/1, on aura la possibilité d'avoir une manip' sympa.

5 Tableau proposé

MP28: Instabilités et phénomènes non-linéaires

I) Pendule ressort grand angle

I.1) Équilibre

$U = a \times \theta$
 $a = (\pm) V_{rad}$

I.2) Formule de Berce

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta$; $T = T_0(1 + \alpha \theta^2 + \beta \theta^4 + \gamma \theta^6)$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

$\alpha_{Berce} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ s.m.s}^{-2}$; $\beta_{Berce} = \frac{1}{256} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.m.s}^{-2}$; $\gamma_{Berce} = \frac{1}{2048} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ s.m.s}^{-2}$

• Soit de phase, particulièrement spectral

II) Synthèse d'un de oscillation à relaxation

Sans compléxe
 $y_1 = -\frac{X_1}{RC}$; $f_1 = \frac{1}{2\pi RC}$

Avec compléxe
 $y_1 = -(\frac{X_1}{R_1C} + \frac{X_2}{R_1R_2})$

III) Pendule ressort à 2 points

Stabilité

Stable; ω_1 en avant ω_2 en arrière

Stable; ω_1 en avant ω_2 en arrière

$\alpha_{1st} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ s.m.s}^{-2}$; $\beta_{1st} = \frac{1}{256} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.m.s}^{-2}$; $\gamma_{1st} = \frac{1}{2048} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ s.m.s}^{-2}$

$\alpha_{2nd} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ s.m.s}^{-2}$; $\beta_{2nd} = \frac{1}{256} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.m.s}^{-2}$; $\gamma_{2nd} = \frac{1}{2048} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ s.m.s}^{-2}$

$\alpha_{3rd} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ s.m.s}^{-2}$; $\beta_{3rd} = \frac{1}{256} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.m.s}^{-2}$; $\gamma_{3rd} = \frac{1}{2048} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ s.m.s}^{-2}$

IV) Pendule paramétrique

Stabilité

Stable; ω_1 en avant ω_2 en arrière

Stable; ω_1 en avant ω_2 en arrière

$\alpha_{1st} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ s.m.s}^{-2}$; $\beta_{1st} = \frac{1}{256} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.m.s}^{-2}$; $\gamma_{1st} = \frac{1}{2048} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ s.m.s}^{-2}$

$\alpha_{2nd} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ s.m.s}^{-2}$; $\beta_{2nd} = \frac{1}{256} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.m.s}^{-2}$; $\gamma_{2nd} = \frac{1}{2048} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ s.m.s}^{-2}$

$\alpha_{3rd} = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ s.m.s}^{-2}$; $\beta_{3rd} = \frac{1}{256} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.m.s}^{-2}$; $\gamma_{3rd} = \frac{1}{2048} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ s.m.s}^{-2}$

Questions, commentaires,