

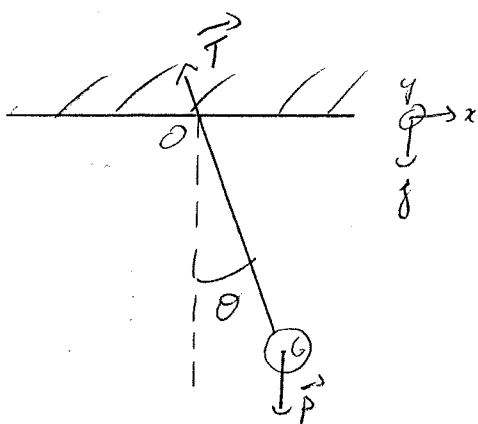
Baptiste
Paul

MP 31: Instabilité et phénomènes non linéaires.

Biblio: BCP 891 [1]
Ruffat électronique [2]
Guyon Hydro [3]
Berge L'ordre dans le chaos [4]

Intro: On s'intéresse souvent en physique à des systèmes linéaires (filtres...); cependant de nombreux phénomènes physiques sont régis par des équations non linéaires. Nous allons présenter ici des exemples de phénomènes non linéaires, voir certaines de leurs caractéristiques et montrer que lorsque la résolution analytique est impossible, on peut quand même étudier la solution grâce aux portraits de phase.

I Le pendule pesant [1]



$$l = \|\vec{OG}\|$$

m : masse du pendule

TMC au pendule : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\Gamma}$

$$\rightarrow I \ddot{\theta} + l m g \sin \theta = 0$$

avec I : moment d'inertie total du pendule

L'équation du mouvement est non linéaire du fait de la présence du sinus.

• Dans l'approximation des petits angles, on s'en tient à l'ordre 1 :
eq. linéaire.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{l m g}{I}}$ donc $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{l m g}}$

La solution est de la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Dans ce cas les oscillations sont isochrones, leur période est indépendante de l'amplitude.

• Si θ devient plus grand, on pousse le développement à l'ordre 3

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \quad \text{eq non linéaire.}$$

On applique alors une méthode perturbative ; on cherche une solution du type $\theta(t) = \theta_0 [\sin \omega t + \varepsilon \sin 3\omega t]$, on aboutit à :

$$\sin(\omega t) \left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{24} \omega_0^2 \theta_0^2 \right] + \sin 3\omega t \left[\varepsilon (\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{24} \right] = 0 + O(\varepsilon^2)$$

D'où $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$

Les effets non linéaires se manifestent doublement : l'inharmonicité du potentiel engendre des harmoniques supplémentaires et le non-isochronisme des oscillations.

1. Linéarité du capteur

Avant d'étudier les non linéarités du pendule, il faut s'assurer que le capteur a une réponse linéaire.

On relève donc la tension pour différents angles et on montre que le tracé de la tension en fonction de l'angle est une droite.

$$V = a\theta + b.$$

Passe d'un nouveau point en direct.

En préparation : $a = 103,5 \pm 1 \text{ mV/}^\circ$

$$b = 73,6 \pm 5 \text{ mV}$$

voir ANNEXE 1

Discussion des incertitudes sur V et θ .

(Rq) Cet étalonnage nous servira aussi pour les prochaines mesures, au lieu de repérer l'angle précisément (difficile) on calculera l'angle via la mesure de l'amplitude du signal.

2. Petits angles : isochronisme

(de l'angle initial)

On vérifie que la période ne dépend pas de l'amplitude V pour des angles $\leq 10^\circ$. (critère à 10° car pour $\theta \leq 10^\circ$, la variation relative de la période est inférieure à la précision de mesure).

Résolution expérimentale : On pourrait envisager trois méthodes pour obtenir la période :

- Faire la TF du signal $\rightarrow$ inadapté car les oscillations sont amorties donc il faudrait se limiter à quelques périodes or l'incertitude sur la fréquence est égale à l'inverse du temps d'acquisition.

- Mesurer plusieurs périodes avec le curseur $\rightarrow$ PEU PRÉCIS

- On préférera donc ajuster un modèle sinusoïdal pour déterminer la période (on sélectionne seulement 3 périodes pour fiter, sinon c'est amorti).

On modélise donc par : $y = V_0 + V_m \sin(2\pi f t + \varphi)$

Mesure pour différents petits angles : $f = \omega_0 = 0.538 \text{ Hz}$.

Preise d'un point en direct.

$$T_0 = 1,86 \Delta$$

3. Grands angles : perte d'isochronisme

On veut vérifier $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

Le problème qui se pose est la faible variation relative de la période (2% pour $\theta_0 = 30^\circ$) $\rightarrow$ il faut donc pouvoir mesurer la période avec une grande précision.

En pratique, on a une incertitude de 10^{-3} Hz avec une fréquence proche de $0,5 \text{ Hz}$. $\rightarrow$ précision de 0,2% $\rightarrow$ OK.

On réalise des mesures pour différents angles (à partir de l'amplitude du signal on obtient l'angle cf I. 1.). On modélise toujours par le sinus sur trois périodes. Reprendre un point en direct.

$\rightarrow$ On trace alors $\frac{T}{T_0}$ en fonction de θ^2 .

$\rightarrow$ On modélise par une droite et on compare avec la courbe

"théorique" $\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\theta^2}{16}$.

voir ANNEXE 2

On constate que l'accord expérience - théorie est vérifié jusqu'à

$$\theta = \theta_{\max}$$

L'écart entre les deux droites pour $\theta > \theta_{\max}$ s'explique par le fait que l'on s'est limité à l'ordre 2 pour la formule de la période. On a idéalisé $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} + a\theta^4 + b\theta^6 + \dots \right)$
par $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} \right)$

$\Rightarrow$ valeurs "théoriques" plus faibles que valeurs expérimentales pour les grands angles.

Quantitativement pour $\theta = 60^\circ$ $\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_{\text{exp}} - T_{\text{th}}}{T_{\text{th}}} = \quad \%$

Pour conclure, on a montré la perte d'isochronisme cara du non-linéaire

(Rq) On aurait pu réaliser une étude sur les harmoniques (1 seul pic à f_0 pour petits angles, f_0 et $3f_0$ pour grands angles).

4. Portrait de phase (si tps)

On trace $\dot{\theta} = f(\theta)$ en direct pour un grand angle

On observe une ellipse

Si l'on attend assez longtemps, on constate qu'on tend vers le point stable $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$ à cause de l'amortissement.

II Oscillateur de Van der Pol [2] [4]

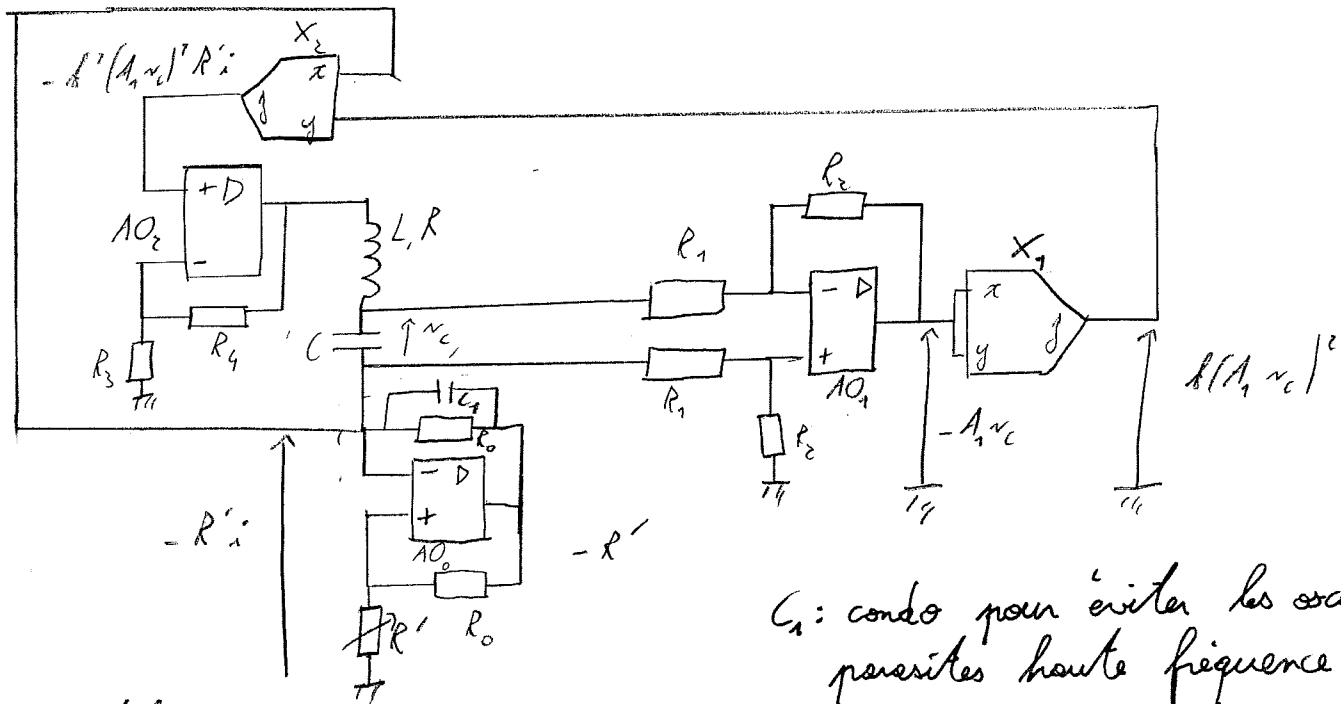
On veut obtenir des oscillations auto-entretenues à partir d'un RLC série, pour cela il faut fournir de l'énergie au circuit grâce à une action extérieure qui doit s'opposer au terme d'amortissement et fixer l'amplitude des oscillations.

→ On part d'un RLC série auquel on ajoute une résistance négative $-R'$ et on élève le terme non linéaire $v_c = \frac{dv_c}{dt}$ grâce à deux multiplieurs. Ainsi on obtient l'équation :

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 2\left(\lambda - \lambda' \left(1 - \frac{v_c^2}{V_0^2}\right)\right) \frac{dv_c}{dt} + \omega_0^2 v_c = 0$$

car on a :

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(R - R' \left(1 - k^2 A_1^2 A_2 \frac{v_c^2}{V_0^2}\right) \right) \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC} v_c = 0.$$



C_1 : condensateur pour éviter les oscillations parasites haute fréquence.

$$R_0 = 1 \text{ k}\Omega$$

Les blocs A_1 et A_2 fixent V_0 à une valeur convenable sans qu'il y ait saturation des AO.

$$R_1 = 390 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 1 \text{ M}\Omega$$

$$A_1 = 2,56$$

$$R_3 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 40 \text{ k}\Omega$$

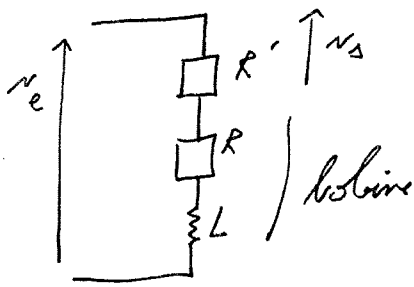
$$A_2 = 5.$$

$$L = 0,1 \text{ H}$$

$$C = 0,22 \mu\text{F}$$

! Avec $A_1 = 10$ c'est un peu suffisant car on entre avec $V > 10\text{V}$ dans le multiplieur 6

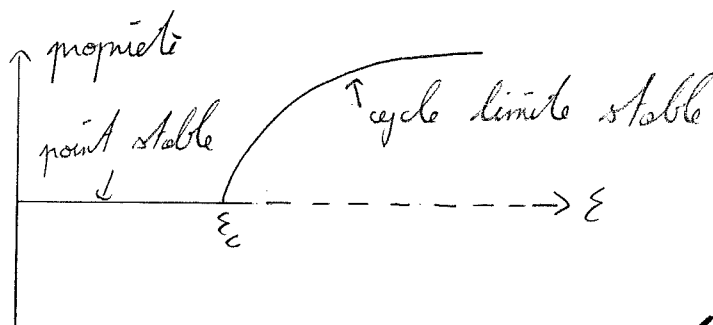
Pour déterminer la R de la bobine à une certaine fréquence, il faut l'étudier en régime sinusoïdal forcé.



$$G = \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{R'}{R(\omega)} \right)^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R(\omega)^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Etude expérimentale: On étudie v_c (on se place à la sortie du bloc AO_1 , sinon il faut se placer en mode différentiel).

- On part de $R' = 0 \Omega \rightarrow$ on observe aucune oscillation.
- On $\uparrow R'$ et qd $R' = 57 \Omega$, on observe le démarrage des oscillations à 1070 Hz .
Pour cette valeur, la résistance négative compense celle de la bobine, d'où l'apparition des oscillations (R_q): on avait déterminé $R(1070 \text{ Hz}) = 61 \Omega$, ce qui est en bon accord.
- Le démarrage des oscillations correspond à une bifurcation de Hopf (passage d'un point stable à un cycle limite stable).



Dans notre cas, le paramètre de contrôle ε est R' . ($R'_c = 57 \Omega$).

On mesure l'amplitude du signal A en fonction de différentes valeurs de $R' > R'_c$, l'amplitude doit varier en $|R' - R'_c|^{\frac{1}{2}}$ si l'on a une bifurcation de Hopf.

$\rightarrow$ Vérification: on trace la courbe: $A = A_1 V_c \times \frac{1}{A_1} \times \frac{1}{2}$
en fonction de R' .

et on fite par $(R'-R_c)^{\frac{1}{2}}$ pour vérifier la validité.

voir ANNEXE 3

- Ensuite on se place à $R' = 100 \Omega$ et on compare l'amplitude et la pulsation des oscillations aux valeurs théoriques.

Expérimentalement : $\omega_{exp} = 2\pi \times 1070 = \underline{6723 \pm 6 \text{ rad.s}^{-1}}$

$$A_{exp} = 12,2 \times \frac{1}{2,56} \times \frac{1}{2} = \underline{2,38 \pm 0,02 \text{ V}}$$

Théoriquement : $A_{th} = 2 \times \frac{1}{A_1 A_2} \sqrt{\frac{R'-R}{R}} = \underline{2,31 \text{ V}}$

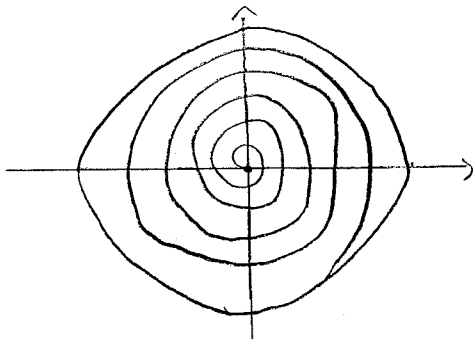
$$\omega_{th} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{R'}{2L} - \frac{R}{2L}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} \right)^2 \right) = \underline{6740 \text{ rad.s}^{-1}}$$

- (Si tps) : On réalise la TF du signal et on observe la présence d'un harmonique d'ordre 3 dû au terme $v_c^2 \frac{dv_c}{dt}$
→ si on intercale un passe bas entre X_1 et X_2
($R = 10 k\Omega$, $C = 1 \mu F$) on élimine cet harmonique d'ordre 3
ainsi que la distorsion du signal (prendre $R' > 100 \Omega$ pour mieux la voir).

- Observation des trajectoires de phase :

On observe alors v_c et i (aux bornes du bloc à R négative) et on regarde la naissance des oscillations dans le plan de phase.

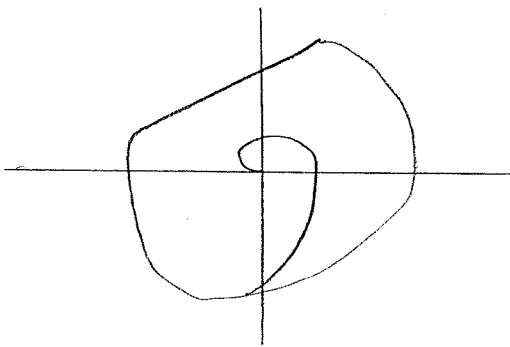
- Pour $R' = 100 \Omega$: on part du point (0,0) qui est instable et on tend vers le cycle limite.



on retrouve les caractéristiques de la bifurcation de Hopf vue précédemment.

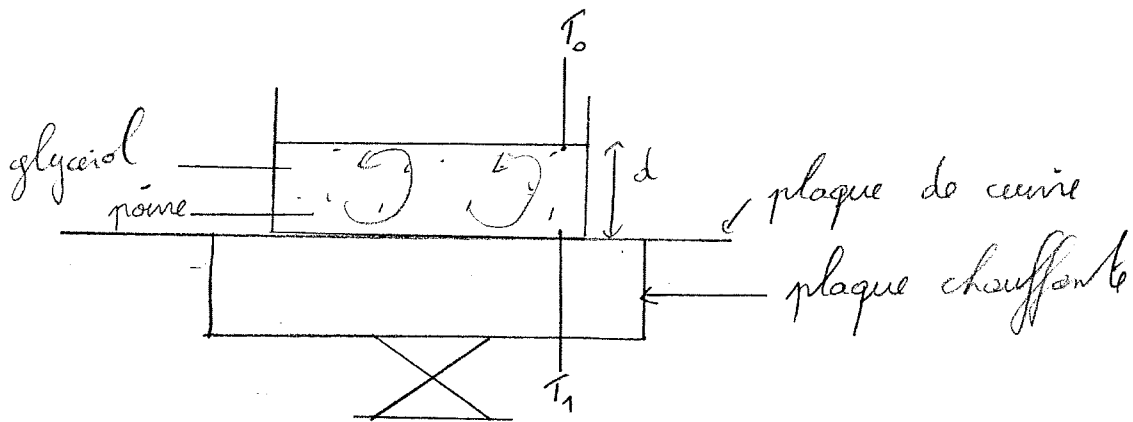
voir ANNEXE 4

- Pour $R' = 2k\Omega$: quand on augmente R' , le cycle limite n'est plus un ellipse mais se déforme, la valeur de l'amplitude est restée constante mais la période a augmenté. L'écart à l'harmonicité est plus important $\rightarrow$ déformation



on part toujours du point $(0,0)$ instable et on va vers le cycle limite stable.

III Instabilité de Rayleigh Bénard [3]



Tant que $T_1 - T_0$ (mesuré par des thermocouples) est inférieure à une valeur critique ΔT_c , les échanges de chaleur sont purement diffusifs

A $\Delta T \geq \Delta T_c$, la diffus° ne peut plus homogénéiser la T ;
mise en mot du fluide : des rouleaux de convection
apparaissent.

La condition d'instabilité est régie par le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\nu K}$$

α : compressibilité thermique
 K : diffusivité
 ν : viscosité cinématique.

Si $Ra > Ra_c = 1708 \rightarrow$ convection.

Pour le glycérol, avec $d = 2 \text{ cm}$, $\Delta T_c = 7,5 \text{ K}$.

$\rightarrow$ Vérif expérimentale.

(Rq) On a intérêt à prendre d faible pour avoir ΔT_c le plus
grand possible

Ccl: Nous avons montré plusieurs manifestations caractéristiques
de la physique non linéaire : perte d'isochronisme.
allure particulière des portraits de phase, bifurcations. . . .

$$\text{rapport} = b \cdot \text{thetacar} + c$$

ens

$$\text{thetam} = Vm \cdot 3.14 / (a \cdot 180)$$

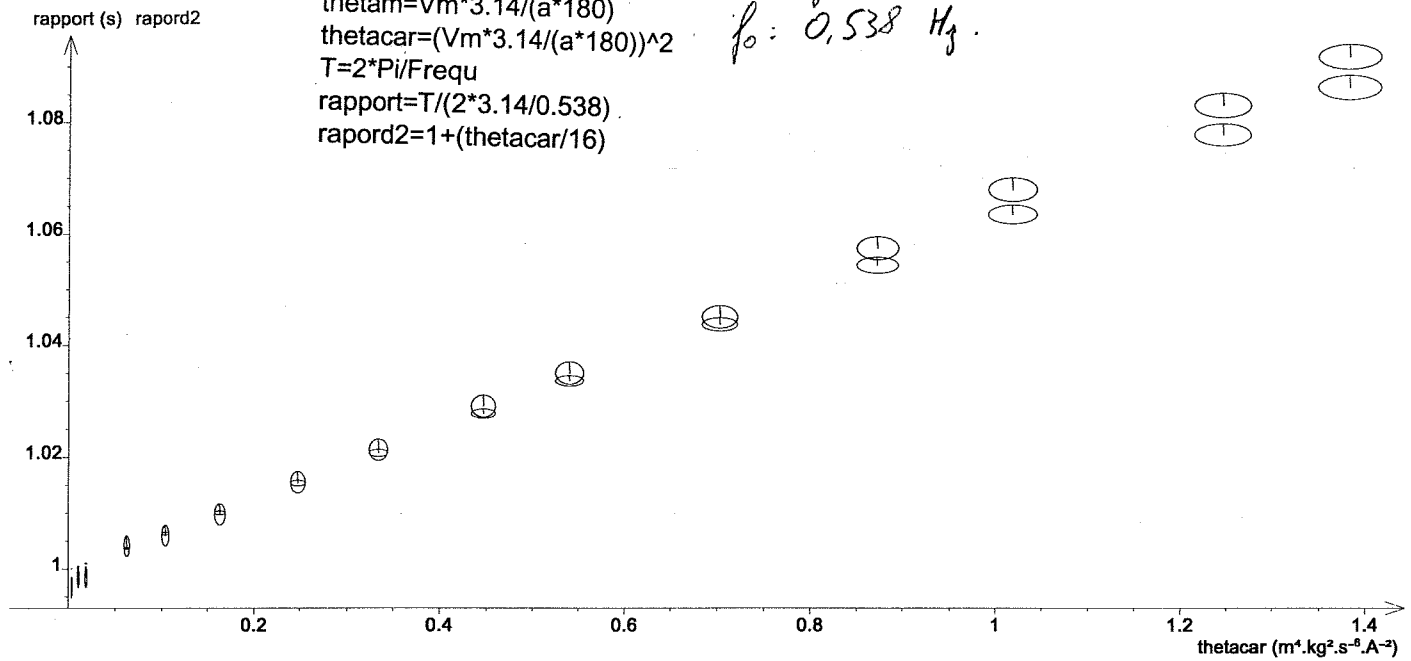
$$\text{thetacar} = (Vm \cdot 3.14 / (a \cdot 180))^2$$

$$T = 2 \cdot \pi / \text{Freque}$$

$$\text{rapport} = T / (2 \cdot 3.14 / 0.538)$$

$$\text{rapord2} = 1 + (\text{thetacar} / 16)$$

a: coef déterminé au I1.
f₀ = 0,538 Hz.



Ecart relatif rapport = < 0,1%

Ecart quad. rapport = 691.8 μs

Coeff. corrélation = 0.99978

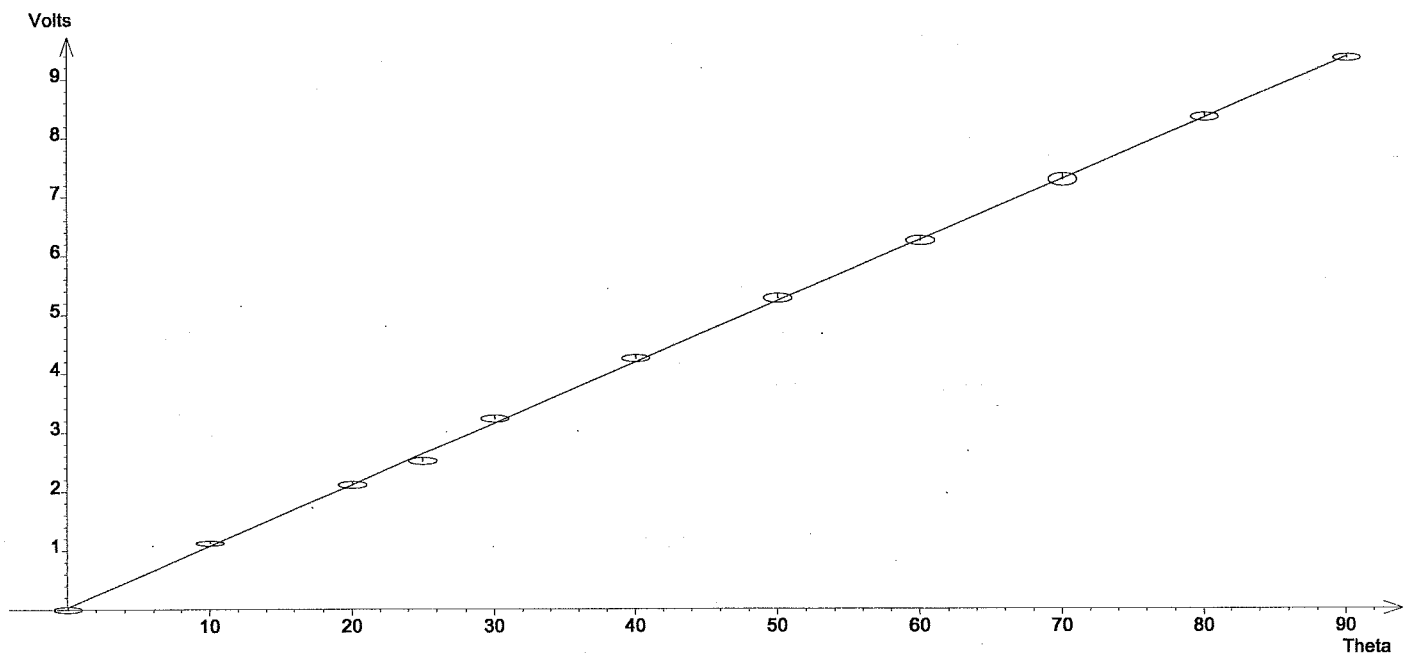
$b = 67.6 \pm 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ s}^7 \cdot \text{A}^2 \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{kg}^{-2}$

$c = 998.7 \pm 0.6 \text{ ms}$

ANNEXE 2

Modélisation

$$\text{moy1} = a \cdot \text{Thetapos} + b$$



[moy1() 100 Ech.X= 0.0078/ 9.359 Ech.Y= -9.01/ 99]

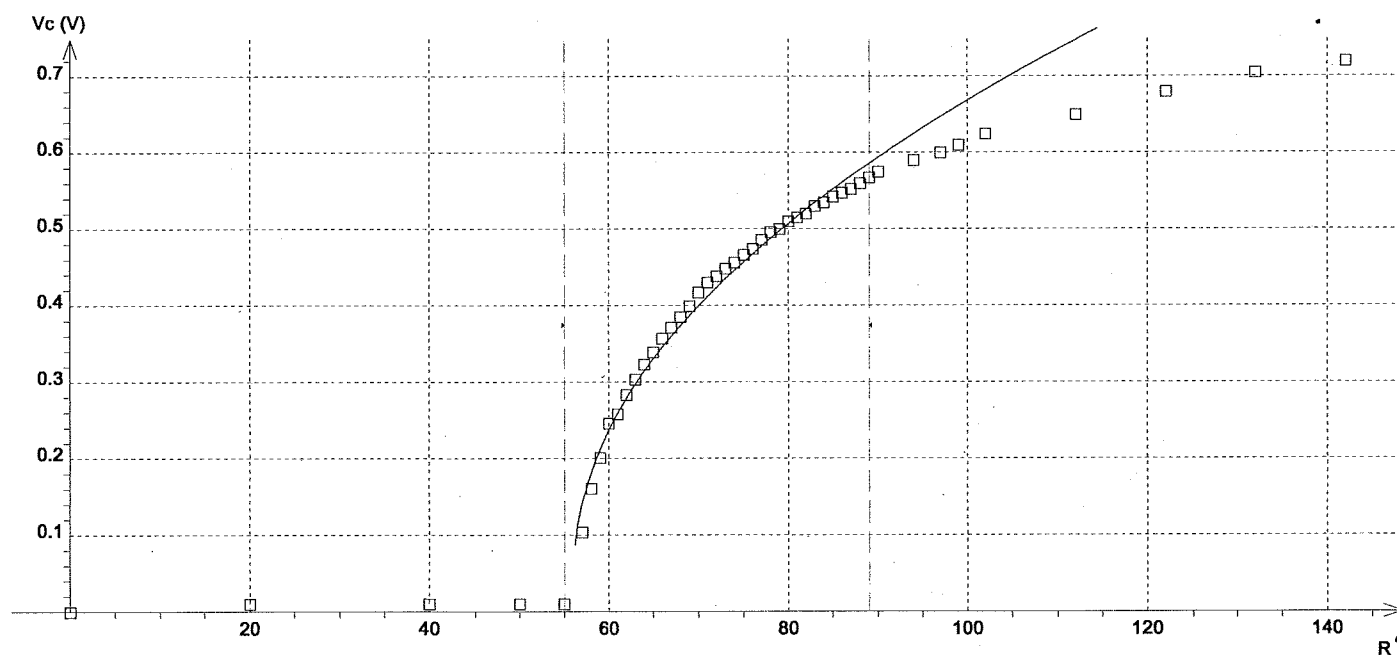
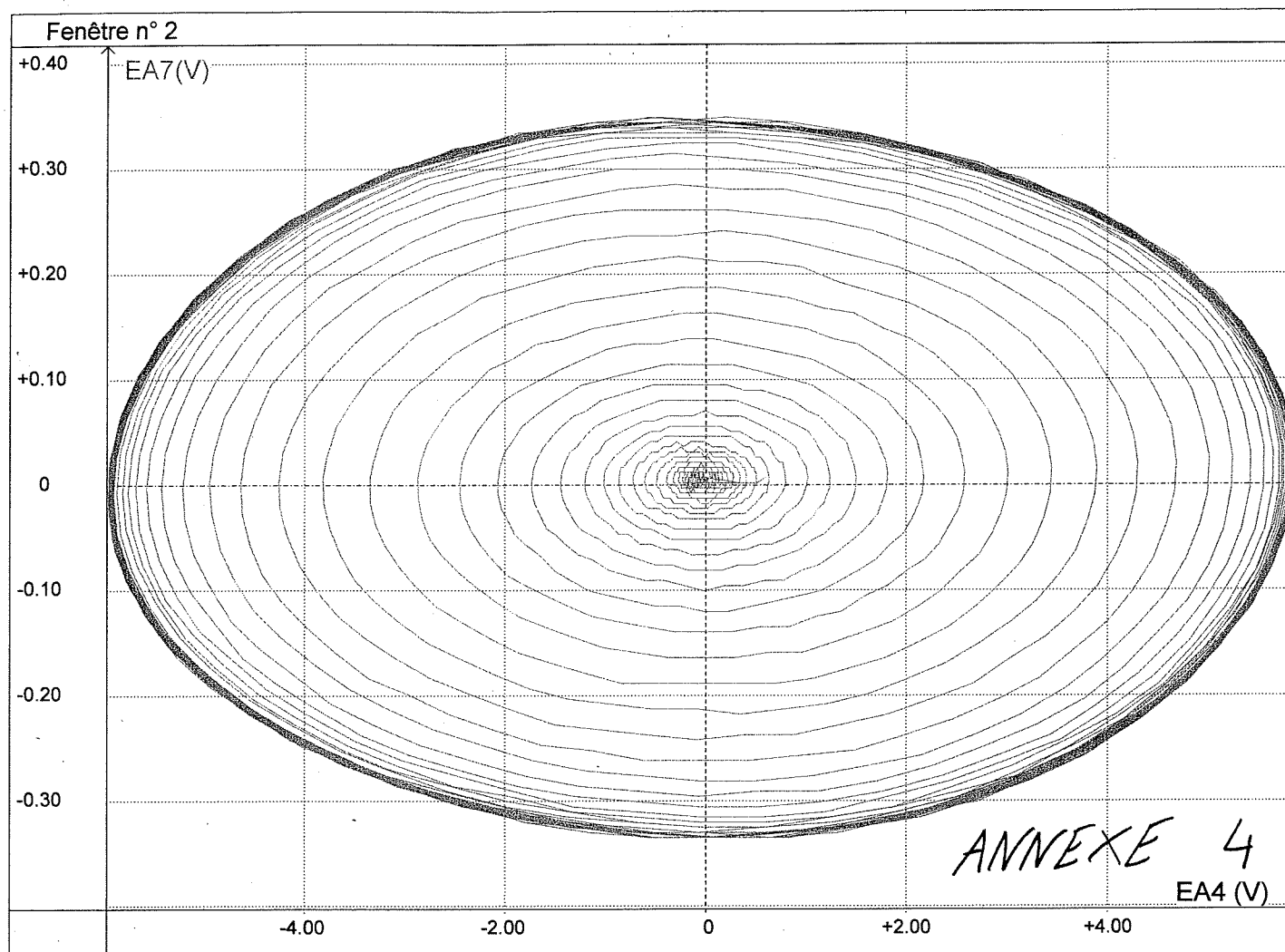
Ecart relatif moy1 = 0.99 %

$\chi^2 / (N-p) = 0.4930$

$a = 104 \pm 1 \cdot 10^{-3}$

$b = 0.0496167 ??$

ANNEXE 1



Ecart relatif Vc= 3.1 %

Ecart quad. Vc=13.43 mV

Coeff. corrélation=0.94583

Un point non pris en compte : n°5

a=93.1 ±3.6 mV

b=51.7 ±15.0 mV

ANNEXE 3