

MP31 : Instabilités et phénomènes non-linéaires

B.Brun, S.Vaupre

24 mars 2010

[09] : Eviter un choix trop ambitieux de manipulations non maîtrisées.

Biblio

- [1] Quaranta I
- [2] Krob

Table des matières

1	Du linéaire au non-linéaire [1]	2
1.1	Linéarité du capteur	2
1.2	Perte d'isochronisme	2
1.3	Portrait de phase	2
2	Les points fixes stables et instables [Manip créée pour l'occasion]	3
3	Etude d'un oscillateur de Van der Pol [2]	4
3.1	Composant non-linéaire	4
3.2	Oscillateur	4

Intro

Souvent des systèmes linéaires? En fait souvent des approx... Certains systèmes sont régis par équations non-linéaires. On trouve pas souvent de solution analytique, mais on peut faire beaucoup de choses quand même, notamment avec un *puissant outil d'investigation* [®] : le portrait de phase.

1 Du linéaire au non-linéaire [1]

Etude du pendule en grandes oscillations

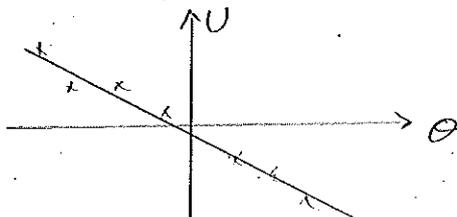
$$J\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad (1)$$

Le régime linéaire est une approximation du système pour les petites oscillations : $\sin \theta \sim \theta$.
On va décrire le comportement du système pour les grandes oscillations.

1.1 Linéarité du capteur

Indispensable pour interpréter correctement la non-linéarité. Vérifier que la tension donnée par le capteur est proportionnelle à l'angle.

Problème pratique : précision sur lecture de l'angle... On accroche une petite tige sur le pendule pour lire l'angle au mieux.



$$U = \underline{\underline{a}}\theta + b$$

1.2 Perte d'isochronisme

Dans l'approx linéaire, la période ne dépend que des paramètres du système.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

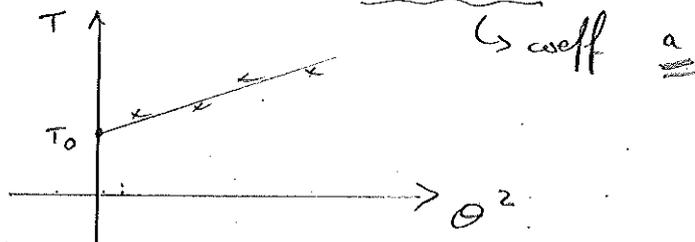
C'est une approximation. En fait pour les grandes amplitudes, la période va dépendre de l'amplitude!
On peut faire un développement à un ordre supérieur du sinus dans l'équation (1). On montre alors :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} \right) \quad (2)$$

Rq : On peut encore pousser le calcul plus loin si besoin.

Manip : Pour différentes valeurs de θ_0 , repérées par l'étalonnage du capteur, i.e. par une tension, on mesure la période sur plusieurs oscillations. Mais pas trop pour garder une amplitude constante.

Graph : Tracer T en fonction de θ^2 (tension convertie en radians) \Rightarrow droite affine.



1.3 Portrait de phase

On introduit la notion de portrait de phase, très utilisée dans l'étude des instabilités (pour la suite).
Sur les axes on porte deux paramètres indépendants du problème, dans cet exemple ce sera θ et $\dot{\theta}$

Petit interlude : C'est là que mon poly a pris feu sur ma table..... Les bougies ça ne réchauffe pas que les sentiments... et tous les conseils de Bibi sont partis en fumée... VDM

Bon donc, on fait une MB[®] sur les acquisitions pour tracer le diagramme de phase sur Synchronie (2003) :

- Acquisition \rightarrow EAO.

- Copier la variable → *toto*
- lisser *toto* → *totaliss*
- dériver *totaliss*
- lisser la dériver → *tata*

Dans la feuille de calcul, après avoir sauvé l'acquisition, ça donne :

```

alisse=LISSAGE(toto,20)          %% 20 = ordre du lissage, entre 1 et 20
caglisse=DERIV(alisse,T)
dlisse=LISSAGE(caglisse,20)

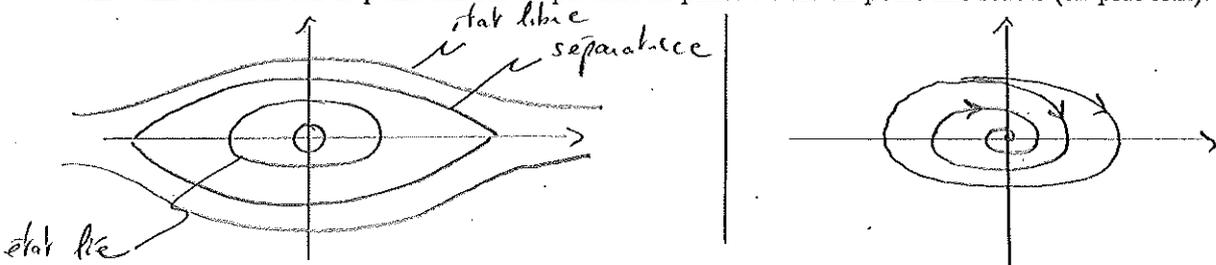
```

Puis tracer $dlisse = f(alisse)$: trajectoire dans l'espace de phase pour une amplitude donnée.

Synchronie est un logiciel magnifique (...), et faut pas espérer faire de la belle programmation. En particulier, faire toutes ces opérations en une seule ligne, ça marche pas...

Manip : répéter ça pour plusieurs amplitudes de départ et tout superposer. Pour les petites oscillations, c'est un cercle, puis on forme des ellipses de plus en plus déformées. Enfin il existe une trajectoire critique au delà de laquelle les trajectoires ne sont plus fermées. (pas faisable, le capteur ne compte pas les angles continûment... Matlab my love, I miss you so.) Pour cette trajectoire critique, en l'absence de dissipation, on devrait observer un **ralentissement critique**. **GOULOT D'ETRANGLEMENT**

Remarque : On a négligé la dissipation, et si on attend suffisamment longtemps toutes les trajectoires vont venir s'écraser sur le point central du portrait de phase : c'est un point fixe stable (cf. plus loin).



2 Les points fixes stables et instables [Manip créée pour l'occasion]

On vient d'introduire la notion de point fixe stable.

Pour le pendule, si on le fait tourner autour d'un axe vertical, on montre que le point fixe stable devient instable à partir d'une vitesse de rotation critique ω_c . En tenant compte de l'accélération d'entraînement, on obtient :

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{mgl}{I} \right) \quad (3)$$

Un point fixe donne $\ddot{\theta} = 0$: à partir d'un certain ω_c , il existe deux solutions différentes de 0 et la position 0 est instable (on montre pour cela $\ddot{\theta} > 0$ en 0.)

Pour jouer, on a donc monté une nouvelle manip, merci à Hervé pour son aide précieuse lors de la réalisation.

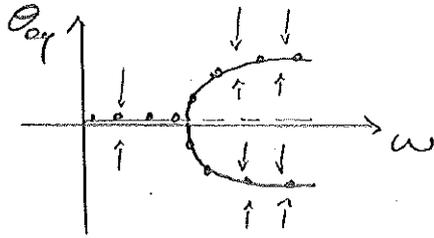


Manip : cf. le nouvel engin SVP.... Avec un générateur continu assez puissant, on fait tourner le moteur, et on mesure la vitesse de rotation avec un tachymètre. à l'aide d'un stroboscope, on relève l'angle de la position d'équilibre correspondante. Il existe deux θ symétriques, faire donc en sorte d'avoir accès aux deux positions (pour cela, relancer plusieurs fois la rotation.. Statistiquement, chaque position est atteinte une fois sur deux.)

Bifurcation fourche supercritique

Graph : On trace $\theta_{\text{équilibre}}$ en fonction de ω . On obtient un truc magnifique...

Rq : bifurcation *supercritique* : au-dessus d'une valeur critique, le point fixe stable devient instable et se sépare en deux nouveaux points stables symétriques. Au vu du problème, on est limité à $\theta = \pi/2$. La limitation provient d'une non-linéarité du système.



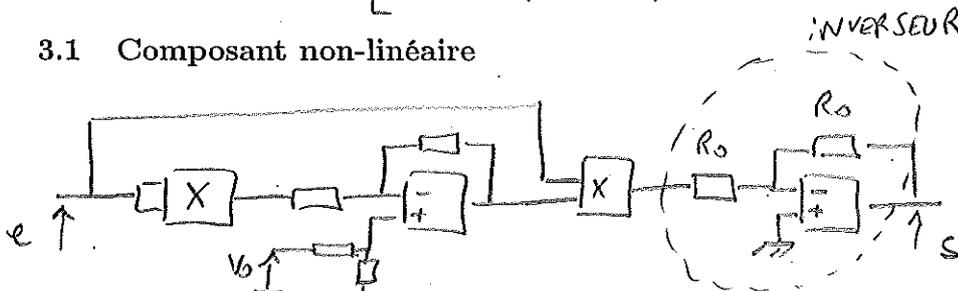
3 Etude d'un oscillateur de Van der Pol [2]

L'essence même du Van der Pol repose sur une instabilité du point fixe en-dessous d'une valeur critique d'un paramètre ajustable, et sur une non-linéarité de par un composant ouvertement non-linéaire.

Van der Pol est un matheux, un oscillateur de VdP est n'importe quel oscillateur vérifiant l'équation de VdP :

$$\left[\ddot{s} - \epsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0} \right)^2 \right) \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \right] \quad (4)$$

3.1 Composant non-linéaire



Un multiplieur pour obtenir e^2 , un ampli pour obtenir $a * e^2 + b$ et un nouveau multiplieur pour avoir $-s = -\alpha e - \beta e^3$.

ATTENTION Dans le Krob : faute, il faut ajouter un inverseur en bout du composant!!
On obtient finalement :

$$s = \alpha e + \beta e^3, \text{ avec } \alpha < 0$$

Manip : Tracé de caractéristique à l'oscillo, influence qualitative de V_0 et e .

3.2 Oscillateur

Condition d'oscillation

$$R_{NL} \leq -\alpha R_{CS}$$

Circuit : intégrateur, inverseur, intégrateur, bouclé... On ajoute deux résistances, dont une sera le paramètre ajustable, et le composant non linéaire, en parallèle de la capa du premier intégrateur..

ATTENTION au sens de branchement du composant NL, primordial!

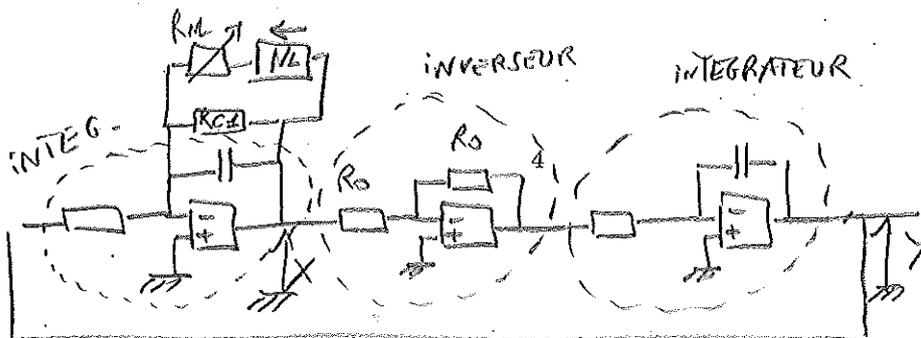
Point fixe

Manip : Pour une résistance dans les choux (on appellera une résistance dans les choux un choix de valeur de R tel que l'on n'ait pas d'oscillations), on montre le point fixe : c'est le point au milieu du portrait de phase. Si on court-circuite le premier intégrateur, on force le système dans un état loin de ce point fixe et on montre qu'en libérant le système, la trajectoire vient s'écraser sur le point fixe (définition d'un point fixe stable)

on peut
(5) déterminer
et avec
 R_{NL} unique
ou l'expression
détalée
de (5).

$$\alpha_{\text{exp}} = 0,83$$

$$\alpha_{\text{calc}} = 0,873$$



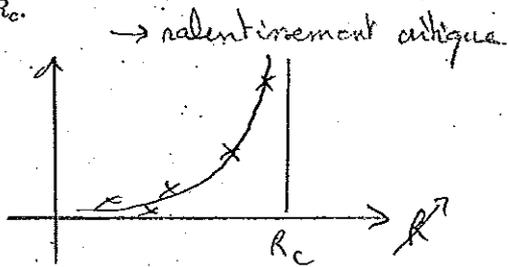
+ discussion à partir de l'équation (4)

Bifurcation de Hopf

On va caractériser la dynamique du système. Pour une résistance bien choisie (oscillations), le théorème de Poicarré-Bendixon nous assure de l'existence de cycles limites. Un cycle limite, c'est très différent des ellipses du portrait de phase du pendule!! Toutes les trajectoires vont venir s'écraser sur le cycle limite.

Manip : Partir du point fixe instable (grâce à un interrupteur bien placé) et se planter sur le cycle limite. Puis partir de l'extérieur (court circuit intégrateur), et s'éclater sur le cycle limite. Ensuite, déterminer la valeur critique du paramètre pour la transition, et remarquer que plus on s'en approche, plus le temps d'établissement du cycle est long : ça se voit dans la densité de la spirale dans le cycle.

Graph : On mesure le temps d'établissement en fonction de la résistance variable. Pas de loi à vérifier, pourtant on était à ça de forcer Regressi à fiter... Mais il a pas voulu... On observe une divergence vers R_c .



$$\text{Rayon} = \sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_c}}$$

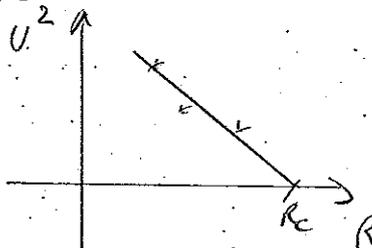
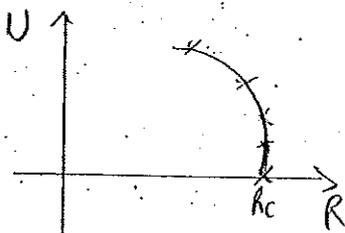
(KROB)
p 174

Rayon du cercle limite

Manip On mesure l'amplitude des oscillations en fonction de R . C'est une loi en racine.

Graph On trace l'amplitude au carré en fonction de R , et bim! ça fait une droite... qui permet de remonter aux paramètres α et β du composant NL.

Au passage, on pourra remarquer que si on baisse trop R , on déforme complètement les cycles, et on change aussi la fréquence du fondamental, qui restait constante sur une bonne plage de valeurs de R .

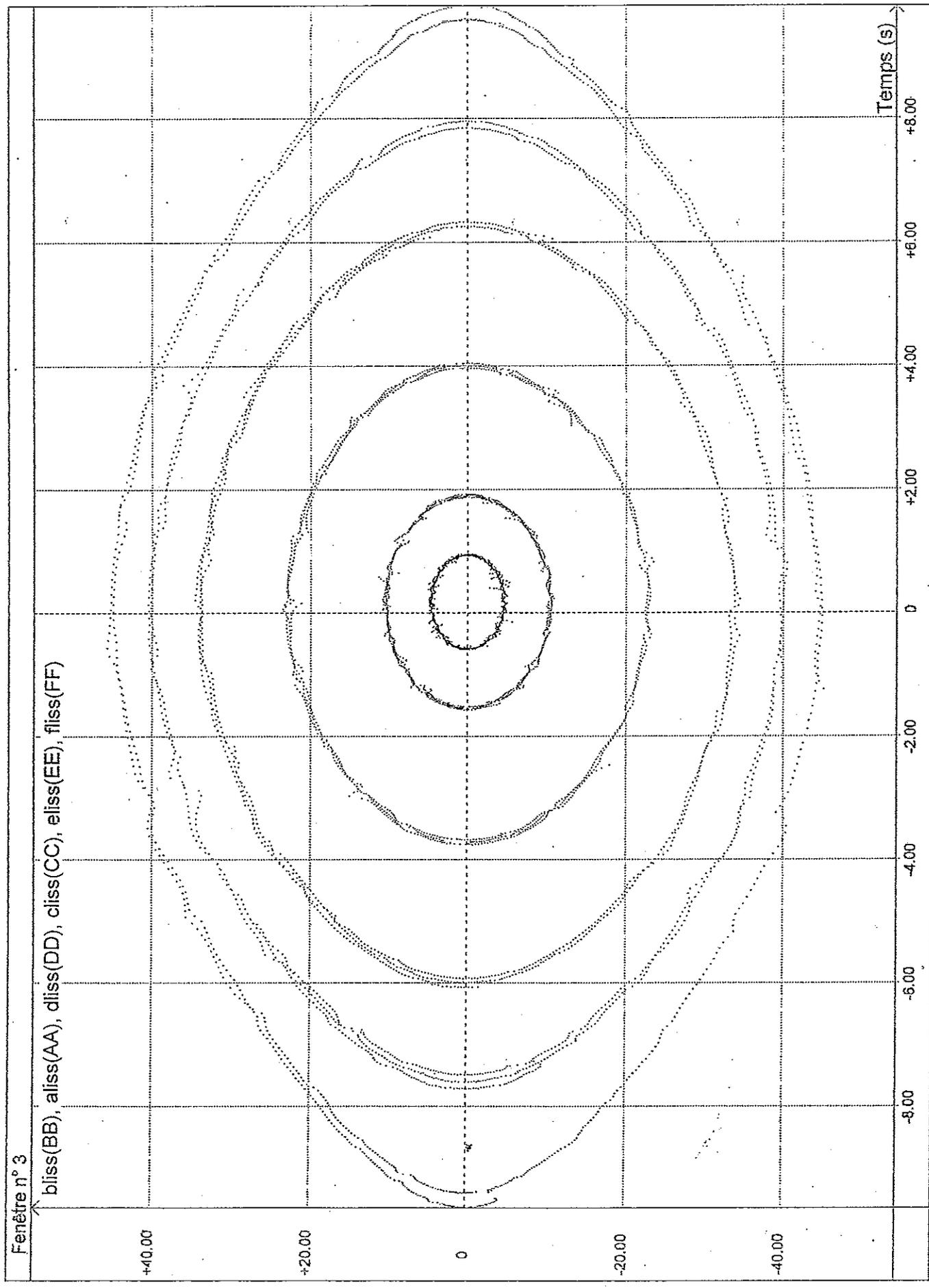


comportement très non-linéaire sur la base de la caractéristique

Conclusion

$$\Rightarrow \left| \frac{\alpha}{\exp 2} \right|$$

Ouverture sur d'autres instabilités ou non-linéarités (AO et oscillateurs : départ sur instabilité, limitations par non-linéarités, méca flotte, oscillateurs anharmoniques), sur d'autres bifurcations ...



omega theta Omega

