

MP 31
Instabilités et phénomènes non-linéaires

Niveau requis :CPGE

Suites/perspectives à donner à la leçon :

Commentaires particuliers du Jury :

10 : Il s'agit de bien illustrer quelques caractéristiques typiques des systèmes non-linéaires : pluralité des positions d'équilibre, bifurcation, caractérisation des non-linéarités, ralentissement critique..., en fonction du ou des système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage

07 : Eviter un choix trop ambitieux de manipulations non maîtrisées

98 : Il ne suffit pas de montrer qq expériences sur le pendule simple ou sur du redressement du courant par des diodes ; il faut dégager en quoi les propriétés observées entrent dans le cadre plus général des phénomènes non-linéaires.

Bibliographie :

Electronique, Krob

BUP N°804, 722, 724, 785 (mots-clés : non linéaire, van der pol)

De l'ordre dans le Chaos, Bergé

PLAN :

Introduction

I- Pendule pesant : du linéaire au non-linéaire

- a) Linéarité du capteur
- b) Perte d'isochronisme
- c) Portrait de phase
- d) Points fixes

II- Oscillateur de Van der Pol

- a) Composant non-linéaire
- b) Cycles limites
- c) Bifurcation

III- Forçage et comportement chaotique

- a) Portrait de phase
- b) Section de Poincaré

Conclusion

Introduction

La plupart des phénomènes étudiés jusqu'ici, l'ont été dans le cadre des systèmes linéaires. L'utilisation du théorème de superposition et des transformées de Fourier nous ont permis de limiter notre étude à la réponse harmonique d'un système pour en déduire ses propriétés.

Pourtant cette linéarité est bien souvent une simple approximation et de nombreux systèmes réels sont intrinsèquement non-linéaires, l'équation de Navier-Stokes est un très bon exemple. Leur résolution peut devenir très complexe et rares sont les solutions analytiques à de telles équations.

Cette non-linéarité peut apparaître dans des termes diffusifs, dans les termes sources et il n'est pas possible de traiter en une leçon tous les aspects des phénomènes non-linéaires.

Nous allons tâcher de mettre en évidence quelques caractéristiques typiques des systèmes non-linéaires en nous limitant aux oscillateurs et en laissant de côté certaines non-linéarités, par exemple les cycles d'hystérésis.

I- Pendule pesant : du linéaire au non-linéaire

Nous allons commencer ce montage par un oscillateur bien connu : le pendule pesant. Dans l'approximation linéaire, que l'on a associée aux petits angles, le puits de potentiel est harmonique et la période d'oscillation du pendule est indépendante

de l'angle initial : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$. Nous allons voir ce qu'il en est à plus grand angle.

a) Linéarité du capteur

Avant cela, et afin de lever tout doute quant à l'origine de la non-linéarité qui va apparaître, nous allons étalonner le capteur utilisé, ici un potentiomètre qui délivre une tension fonction de l'angle pris par le pendule, pour pouvoir convertir la tension mesurée en un angle défini.

Pour cela, on balaye les angles de $+140^\circ$ à -140° (le point mort haut du potentiomètre est aux environs de $+145^\circ$), on relève la tension associée à l'oscilloscope et on trace les points sur Regressi.

Manip : prendre un point à un angle quelconque et discuter de la méthode de visée qui a défaut d'être précise introduit une erreur systématique dont on pourra ensuite se débarrasser.

Les points sont alignés, on effectue une régression linéaire et on discute d'une ordonnée à l'origine qui est une erreur systématique due au mauvais positionnement du cadran gradué qui indique $\approx -2^\circ$ pour la position de repos. Comme on a $U=0$ pour la position de repos, on ne tiendra pas compte de cette ordonnée à l'origine pour les calculs de θ dans la suite (on a bien $\theta=0$ pour $U=0$)

Le capteur est étalonné, il s'avère lui-même linéaire, et on peut passer à l'étude de l'oscillateur.

b) Perte d'isochronisme

Le TMC en projection sur l'axe du pendule, nous permet d'écrire :

$$J\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0$$

Un développement limité de la fonction sinus s'écrit : $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + o(\theta^7)$. Elle permet de réécrire la relation ci-dessus sous la forme :

$$J\ddot{\theta} + mgL\theta = mgL\left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{120} + o(\theta^7)\right)$$

Aux petits angles, c'est à dire $\theta < 50^\circ$ pour lequel $\sin\theta$ et θ sont égaux à 5% près, on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique, la période est donc indépendante de l'angle à partir duquel démarre l'oscillation.

Au-delà, un développement du sinus à l'ordre 3 est nécessaire mais ne reste valable que pour un angle inférieur à 83° . La non-linéarité apparaît ici comme un terme source qui prendra une valeur plus ou moins importante en fonction de l'angle pris par le pendule.

Dans le cadre d'un angle inférieur à 83° ,

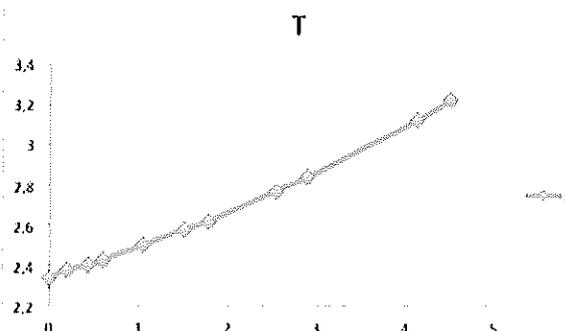
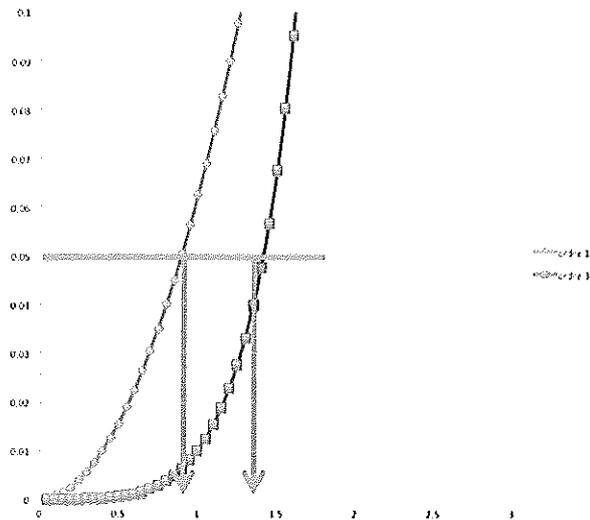
une recherche de solution comme combinaison de fonctions $\sin\omega t$ et $\sin 3\omega t$

nous permet de trouver la relation suivante pour la période : $T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$.

Cette relation ne tenant pas compte de la présence d'une éventuelle dissipation qui va irréversiblement diminuer l'amplitudes des oscillations au cours du temps, nous ne ferons l'acquisition du signal que sur une période, de façon à préserver la période mesurée. La précision de mesure de T et θ sera alors celle du positionnement des curseurs et de la différence entre les valeurs prises par θ_{\max} au cours de cette période.

Manip : Acquisition et mesure de T et $\Delta\theta$ sous Synchronie, ajout du point dans Regressi et régression linéaire de T en fonction de θ^2

Pour les angles inférieurs à 83° , on retrouve effectivement une droite dont les ordonnées à l'origine et la pente nous permettent de retrouver la pente de $T_0/16$ ainsi que la période à petits angles. Au delà, la dérive constatée est



à imputer aux termes d'ordre supérieur dans le développement limité de $\sin\theta$.

L'addition d'un terme source non-linéaire dans un oscillateur harmonique a donc pour conséquence la perte d'isochronisme des oscillations libres.

c) Portrait de phase

Lorsqu'il devient presque impossible de résoudre une équation différentielle 1D, on peut toujours se raccrocher à la notion de trajectoire de la mécanique classique et rechercher d'éventuels comportements limites en reportant sur une graphique 2D l'évolution de la vitesse (angulaire ici) en fonction de la position. On appelle ces graphes des portraits de phase. Il s'agit donc d'une représentation géométrique des trajectoires du système dans le plan de phase $(\dot{\theta}, \theta)$ dans lesquels, par exemple, les états périodiques se traduiront par des courbes fermées. Le portrait de phase se lit dans le sens horaire.

Pour un comportement linéaire du système physique, et donc un potentiel harmonique, les tracés obtenus pour divers angles vont donner des ellipses de demi-axes θ_0 et $\omega_0\theta_0$. Une ellipse étant difficile à distinguer visuellement d'une patatoïde, on va diviser les vitesses angulaires calculées par $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et tracer cette nouvelle valeur en fonction de θ .

Manip : lancer une acquisition sur une durée de l'ordre de la période la plus longue et la superposer aux autres. Le constat circulaire, non-circulaire ne permet pas d'établir une frontière nette, mais la différence de portrait de phase entre les petits angles et disons 90° est suffisamment nette.

En effectuant des acquisitions à divers angles initiaux, on constate plusieurs choses :

- Tant que la physique du système est linéaire avec une bonne approximation, on obtient des cercles concentriques.
- Au-delà de $\theta=20^\circ$, on constate que les formes s'étirent selon l'axe des θ ce qui est cohérent avec l'observation de la perte d'isochronisme $\frac{\dot{\theta}_{\max}^{\text{adim}}}{\theta_{\max}} = \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{1 + \frac{\theta_0^2}{16}}$
- L'angle de départ $\theta=180^\circ$, inaccessible avec le dispositif présenté sépare les états liés des états libres, ces derniers n'étant pas non plus traçables avec le capteur disponible (il ne compte pas les tours effectués).

d) Points fixes

Si, on revient sur le système réel, donc dissipatif, en lançant une acquisition plus longue, chaque tracé tend à rejoindre le point (0,0) quelque soit son angle de départ. Ce point du plan de phase est appelé un point fixe stable ou un attracteur. C'est le seul point fixe stable du système étudié.

Manip : lancer une acquisition plus longue que les précédentes sur une nouvelle feuille Synchronie

L'existence de plusieurs points fixes stables est un signe de non linéarité que révèle facilement un portrait de phase.

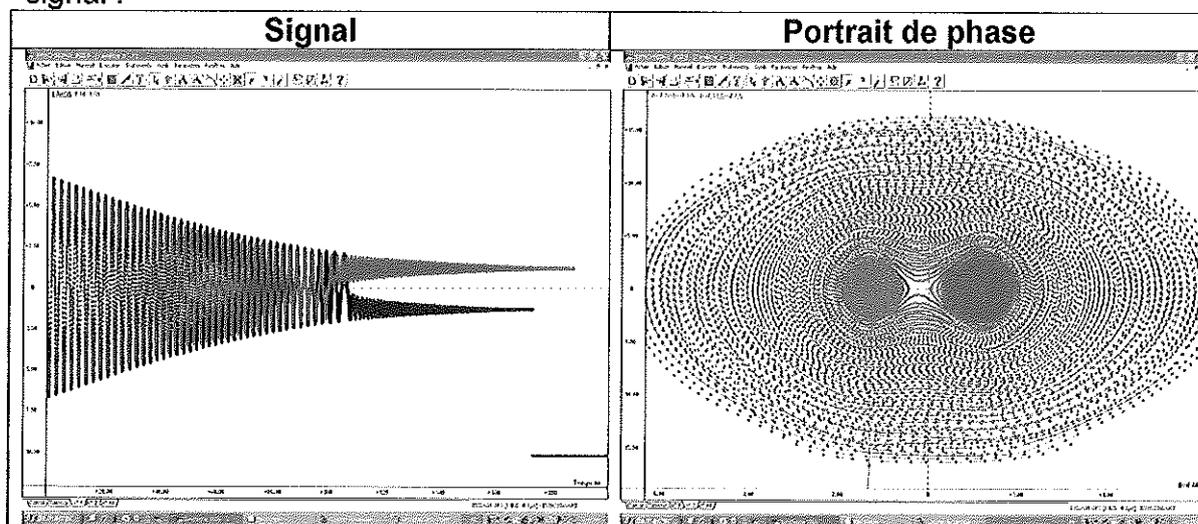
Pour créer un tel système à partir du pendule pesant, on dispose de part et d'autre de l'angle 0° deux aimants sensiblement identiques, n'entravant pas le mouvement du pendule et permettant de bloquer le pendule sur des positions d'équilibre à $\theta_{eq} \neq 0$.

On montre qualitativement, en déplaçant le pendule, que chacun de ces 2 angles sont des points d'équilibre stables, et que l'angle $\theta=0^\circ$ est devenu un point d'équilibre instable. En supposant une symétrie parfaite du système, l'expression de l'énergie potentielle associée à ce dispositif doit être paire. Par ailleurs, l'existence d'un point d'équilibre instable et deux points d'équilibre stables distincts, nous permet de dire que celle-ci à au moins admet un maximum et deux minima différents. Sans chercher à exprimer l'énergie potentielle du système, on peut la modéliser de la façon la plus simple possible via un polynôme. Le polynôme le plus simple qui satisfait les contraintes précédentes s'écrit : $E_p = -a_2\theta^2 + a_4\theta^4$ où a_2 et a_4 sont des constantes positives. Le calcul de la force associée est alors un polynôme d'ordre 3 en θ : $F = f_1\theta + f_3\theta^3$ qui est évidemment non linéaire.

Ainsi même aux petits angles, le système étudié est non linéaire.

Manip : faire une acquisition et tracer qu'elle se cale sur le deuxième point fixe.

On obtient, pour deux conditions initiales proches, ce type de portrait de phase et signal :



On tire deux conclusions de cette manipulation :

- Le portrait de phase permet de retrouver très rapidement l'existence de deux attracteurs et d'en donner leurs coordonnées dans l'espace des phases. La connaissance de ces attracteurs peut nous dispenser de l'étude complète du système puisque l'on sait vers où il peut converger.
- L'évolution de ce système non-linéaire est sensible aux conditions initiales. Pour une différence donnée entre deux conditions initiales, l'écart entre les trajectoires ne reste pas proportionnel à la valeur initiale. Le lancé du pendule de deux positions très proches, de vitesses initiales nulles peut aboutir à deux

comportements radicalement différents, avec une convergence parfois sur l'attracteur de droite, parfois sur l'autre.

Cette sensibilité aux conditions initiales est également une des caractéristiques des systèmes non-linéaires.

Les non-linéarités n'interviennent pas seulement dans les termes sources. Elles peuvent également apparaître dans les termes diffusifs, et être mises à profit pour créer des oscillateurs auto-entretenus. C'est ce que nous allons voir avec l'oscillateur de Van der Pol.

II- Oscillateur de Van der Pol

Un oscillateur de Van der Pol est un oscillateur vérifiant l'équation du même nom :

$$\ddot{s} - \varepsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0} \right)^2 \right) \dot{s} + \omega_0 s = 0$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur dont le terme d'amortissement comporte une non linéarité. Pour ε nul, on retombe sur l'oscillateur harmonique de notre toute première analyse linéaire.

a) Composant non-linéaire

Ce type d'équation peut être résolue par simulation ou via un circuit électrique. Pour cela, il faut d'abord générer un composant non-linéaire. A l'aide de deux multiplieurs et de un AO, on peut créer un composant qui, pour une tension e à son entrée renvoie la tension : $s = \alpha e + \beta e^3$ avec $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ qui sont fonction des composants utilisés.

Le tracé à l'oscilloscope permet de visualiser l'influence respective de V_0 et de e sur la caractéristique du composant non linéaire et de retrouver les valeurs de α et β sans chercher à les calculer.

Manip : montrer l'influence de V_0 et revenir à la valeur choisie lors de la préparation (J'ai pris une valeur $V_0 = 2,51V$ différente de celle du Krob, elle me permet d'avoir des zéros plus marqués et faciles à mesurer et reste compatibles avec la suite des manipulations proposées)

L'intégration de ce composant non-linéaire dans un circuit permet de reproduire une grande palette d'équations aux dérivées partielles que l'on peut rencontrer en physique. Il va nous permettre notamment de reproduire via des composants électroniques l'équation de Van der Pol.

b) Cycles limites

On retrouve dans le circuit électrique les fonctions intégration et inversion qui permettent d'obtenir hors ajout du composant non-linéaire l'équation suivante :

$\ddot{s} + \frac{1}{R_{C1}C_1}\dot{s} + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}s = 0$ où le terme de dissipation est positif et amorti toute oscillation introduite à un instant donné.

L'ajout du composant non-linéaire permet de modifier le terme de dissipation et de réécrire l'équation du système selon :

$$\ddot{s} - K^2(\alpha R_{C1} + R_{NL})\omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0} \right)^2 \right) \dot{s} + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}s = 0 \quad \text{où } s_0 = \sqrt{\frac{-\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}}$$

Ainsi pour $\alpha R_{C1} + R_{NL} < 0$, le terme d'amortissement est inconditionnellement positif. Le système est amorti et aucune oscillation naissante ne peut survivre quelque soit la valeur prise par la tension initiale. On aura donc un ensemble de valeurs de R_{NL} pour lesquelles il n'existe qu'un point fixe stable et s reste toujours nul.

Par contre, dès que $R_{NL} > -\alpha R_{C1}$, le terme d'amortissement devient positif, et toute oscillation naissante va être amplifiée jusqu'à que s devient lui-même supérieur à s_0 , inversant le signe du terme dissipatif. Un régime oscillatoire s'installe d'amplitude s_0 .

Manip : se placer en mode Main et montrer deux cas pathologiques. Dans mon cas, $R_{limite} \approx 85,4k\Omega$, je prends donc $100k\Omega$ et $50k\Omega$

On peut alors tracer des portraits de phase en relevant à l'oscilloscope s et u (qui est la primitive de s). On montre alors trois choses sur le portrait de phase :

- Existence d'un point fixe attracteur pour en $(0,0)$ tant que $R_{NL} < -\alpha R_{C1}$
- Existence d'un cycle limite pour $R_{NL} > -\alpha R_{C1}$ qui est également un attracteur vers lequel on converge aussi bien de l'extérieur du cycle que de l'intérieur.
- Ralentissement de la convergence vers le cycle limite au fur et à mesure que R_{NL} s'approche de sa valeur limite : on parle de ralentissement critique.

Manip : montrer la convergence vers le cycle limite, en mode XY avec Persist On, en court-circuitant la résistance (départ de l'intérieur du cycle) et en forçant s à une valeur de 15V (départ de l'extérieur) via l'alimentation stabilisée. La durée mise à converger peut être illustrée par le nombre de spirales nécessaires pour l'atteindre.

c) Bifurcation

On peut alors tracer s_0 en fonction de R_{NL} et montrer une bifurcation signe d'un phénomène non-linéaire.

Manip : prendre une mesure de Δs à l'oscilloscope pour une résistance intermédiaire et la rajouter à la courbe Regressi.

On trouve bien une loi en racine de R_{NL} conformément à l'expression ci-dessus.

III- Forçage et comportement chaotique

Pour finir ce montage, on va maintenant s'intéresser à certains régimes très particuliers qui peuvent apparaître lors du forçage d'un système non-linéaire : le chaos.

On va donc revenir à un système où c'est le forçage qui est non-linéaire en réalisant un circuit électrique analogue au pendule à double puits présenté au début. L'équation à résoudre met en œuvre un terme diffusif linéaire et un double puits de potentiel :

$$\ddot{s} + r\dot{s} + \delta s + \lambda s^3 = 0$$

Ce système électronique pourra alors être facilement forcé à l'aide d'un GBF.

a) Portrait de phase

Sans forçage, le système perturbé oscille autour de deux points fixes stables avant de converger vers l'un ou l'autre des puits.

Manip : visualiser le double puits en mode XY

Lorsqu'on le force le système sous certaines conditions, son comportement devient apparemment totalement aléatoire. Les oscillations enregistrées présentent une large bande de fréquences.

Manip : présenter le signal en mode Main, et effectuer une FFT qui montre un spectre continu.

Ce forçage temporel ajoute un degré de liberté « temps » au système précédent et son espace des phases passe d'une dimension 2 à 3. Aussi même si le portrait de phase paraît avoir des trajectoires qui se croisent, il n'en est rien, ce que l'on voit à l'oscilloscope n'est en fait qu'une projection sur le sous-espace $(\dot{\theta}, \theta)$ de l'espace des phases.

Manip : passer en mode XY, montrer l'enchevêtrement des trajectoires. Passer en Persist ON et montrer que l'on reste plus ou moins autour du double puit.

L'étude de ce portrait de phase demande de nouveaux outils.

b) Section de Poincaré

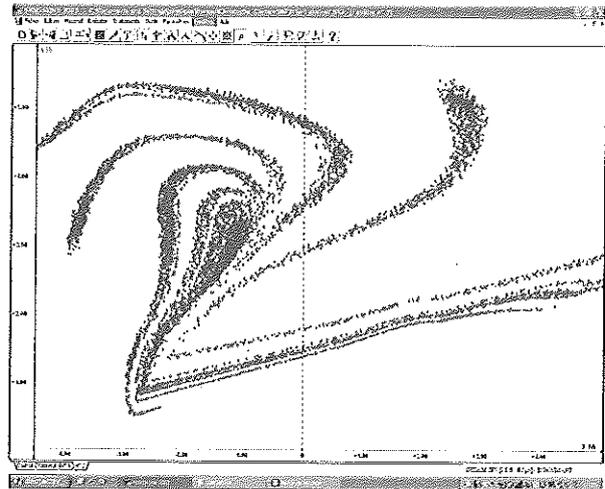
On peut alors essayer de tracer une coupe du portrait de phase dans le plan temporel en ne relevant qu'un point par période. S'il existe une quelconque périodicité dans le signal obtenu, on peut le développer en série de Fourier et en calculer la dérivée. La valeur prise par x et sa dérivée en $\omega t = \omega t_0 \bmod(2\pi)$ est toujours la même et on n'aura qu'un point sur cette section.

Manip : forcer suffisamment le système pour le bloquer sur une trajectoire périodique et faire une acquisition (attention, l'acquisition de Synchronie et la fréquence de l'oscillo doivent être parfaitement synchrones. Dans mon cas, j'ai choisi $f=100\text{Hz}$ en

acquisition et j'ai cherché la fréquence du GBF qui garde mon point fixe en l'occurrence 99,998Hz... cette précision est nécessaire)

Si le signal est purement aléatoire, les points n'auront aucune logique entre eux et devraient se répartir aléatoirement sur le plan.

Or ce n'est pas du tout ce que l'on constate et si l'on voit une série de points apparaître aléatoirement dans le plan sans se superposer, ils finissent par se concentrer en certains points de l'espace et dessiner peu à peu une figure discontinue : c'est un attracteur étrange, signe d'un comportement chaotique.



Conclusion

Nous avons vu au cours de ce montage quelques caractéristiques des systèmes non-linéaires. Les outils d'analyse introduits, portraits de phase et section de Poincaré, nous ont permis de mettre en évidence divers attracteurs (points, cycles et représentations discrètes). L'étude d'un oscillateur paramétrique nous a permis de mettre en évidence l'existence d'une bifurcation et du ralentissement critique qui lui est associé. Le forçage d'un oscillateur non-linéaire nous a enfin donné l'occasion de voir apparaître un régime chaotique bien que gouverné par une équation déterministe.

Les phénomènes non-linéaires sont d'une richesse extrême et se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique, ceux d'entre vous qui s'intéresseront de prêt à la mécanique des fluides auront largement l'occasion de s'en rendre compte.