

MP 31: INSTABILITÉS ET PHÉNOMÈNES NON LINÉAIRES

Germain Lesueur

Ferac AL Rouvi

Bibliographie : BUP 804 -86 722 724

Electronique - Kreh

Plan :

I.] le pendule pesant : du linéaire au NL

- ① Vérification de la linéarité du capteur
- ② Pendule au petits angles : période propre
- ③ Pendule réel aux grands angles

II.] Instabilité NL : oscillation autoexcitée de Van der Pol

- ① Composant NL
- ② Cycles limite
- ③ Caractérisation du comportement NL

III.] Forçage et transition vers le chaos :

oscillation à double point forcé

- ① L'oscillation à double point en vrai : le pendule
- ② Double point électronique en forçage
- ③ Section de Poincaré

II - Le pendule simple: du linéaire au NL

1. Vérification de la linéarité du capteur

La position du pendule est suivie par un potentiomètre qui donne une tension à travers le potentiomètre associé.

Afin de faire tout cela quand à la linéarité des phénomènes à venir, et pour obtenir la conversion tension-angle, on passe par une première phase d'étalonnage.

MANIP: on mesure les angles avec le pendule, on le maintient fixe à l'aide d'une pince.

on mesure la tension de sortie du potentiomètre

→ droite d'étalonnage $\theta = f(V)$

⚠ erreur de mesure systématique, le dispositif est pas optimal

bien positionner le rapporteur pour qu'il coïncide à 0° avec la position du zéro.

→ on suppose une droite linéaire

$$\theta = a \times V \quad a = \quad =$$

Le capteur est étalonné, il s'avère linéaire; passons à l'étude du pendule.

2. Étude du pendule avec petits angles - période propre

L'équation du mouvement du pendule donne: $J\ddot{\theta} + a \sin \theta = 0$

J: moment d'inertie
a: tangente
m: masse

→ pour des "petits angles" $\sin \theta \sim \theta$

→ $J\ddot{\theta} + a\theta = 0$ → solution en $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{a}{J}} \quad \rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{a}} \quad \text{période propre}$$

MANIP: on mesure T_0 avec un chronomètre

pour 10 oscillations $T =$

$$T_0 = \frac{T}{10} =$$

On trouve avec petits angles prédit un pendule isochrone ie que la période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations (et donc notamment des conditions initiales).

3. Pendule " réel " avec grands angles.

- relation de Borda.

En réalité l'approximation des petits angles est rapidement compromise et il faut considérer l'équation complète ... ou plutôt un DL dans un premier temps, c'est plus sage

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{6} + o(\theta^5) \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + m g a \theta &= m g a \frac{\theta^3}{6} \quad \leftarrow \text{on voit le terme NL comme une source} \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 (\theta - \frac{\theta^3}{6}) &= 0 \end{aligned}$$

en restant ici au 1^{er} ordre, donc avec faibles nonlinéarités on peut utiliser la méthode des perturbations $\rightarrow$ on injecte la solution de l'ordre n dans l'équation de l'ordre $n+1$.

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow -\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 (\theta_0 \sin(\omega t + \varphi) - \frac{(\theta_0 \sin(\omega t + \varphi))^3}{6}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_0 \sin(\omega t) (\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8}) + \frac{\omega_0^4 \theta_0^3}{24} \sin(3\omega t) = 0 \quad (\text{avec } \varphi = 0)$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right)^{1/2}$$

négligeable (dans un 1^{er} temps).
(or θ_0 reste un peu petit)

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad \text{par DL}$$

formule de Borda

II. test d'isochronisme, vérification de la formule.

MANIP. pour vérifier la formule, on va lancer le pendule depuis un angle important (très important !) et acquérir le signal sur Synthesizer et faire le pendule s'amortir lentement.

... mais en fait c'est trop long (fait suffisamment sera pour être mentionné) donc on monte juste

que la période n'est plus la même $\rightarrow$ test d'isochronisme
que sur Synthesizer, ça s'amortit

- On possède une acquisition faite en rotation sur 8 minutes
- un petit traitement de calcul (cf BUP 857) permet d'obtenir directement toutes les phases et toutes les amplitudes (tu te souviens l'intégration des TC dans le cadre de l'enseignement ?)
- on trace la phase en fonction de l'amplitude (EN RADIAN!) et on obtient une jolie courbe qui ressemble presque à du $\sin$
 - en fait, on a synchronisé en sélectionnant la donnée des angles moyens.
 - par contre, on a fait un étalonnage de la courbe en choisissant bien si on se souvient avec toutes les incertitudes que ça implique (un $\sin$).
 - on se sert donc d'un logiciel (pas d'incertitudes en synchronisation)
 - pour comparer un modèle de Borda avec l'expérience.
- ⇒ au-delà d'un certain angle on s'écarte clairement de la théorie au 1^{er} ordre. on estime cette angle à $\approx 80^\circ - 90^\circ$

En tout cas, Borda en fait, il y a une sorte d'incertitude ; la phase dépend de l'amplitude des oscillations : il s'agit d'une caractéristique des phénomènes NL.

III. enrichissement spectral et portrait de phase

Le portrait de phase est un outil particulièrement adapté pour des systèmes NL porteurs non réductibles.

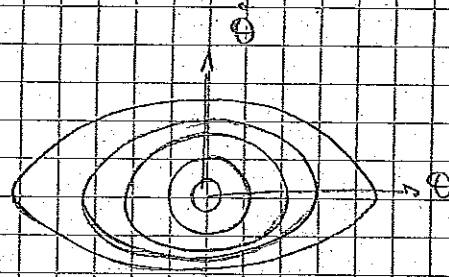
Par l'électronique, impossible d'utiliser une acquisition sur un temps long car l'amortissement bricole tout si on ne connaît pas l'angle d'oscillation.

MANIP : on acquiert sur une période courte pour avoir qu'une oscillation (ils sont suffisants pour une amplitude de 150°) et on fait un balayage pour plusieurs angles

→ en préparation.

⇒ on obtient un jeu arc-en-ciel de courbes

Le traitement classique l'image déformée par la courbure d'acier un portrait de phase bien déformé mais qui montre la déformation des cercles du régime linéaire.



Malheureusement, le capteur ne permet pas d'obtenir le régime linéaire.

Le portrait de phase est donc déterminé par les N° ; c'est à dire aussi de voir les vitesses des points fixes d'un système ; on va utiliser tout le long du montage ses avantages certains.

En utilisant aussi l'oscilloscope de centre (il est ~~très~~ !) pour faire une analyse spectrale de quelques oscillations.

→ on voit apparaître une composante à 3ω , qui est en fait négligée par la formule de Borda, pour des angles importants,

En fait, à l'usage de la technique, cette composante apparaît quand la formule de Borda n'est plus valable ie au delà des $80^{\circ}90^{\circ}$

II. Installation NL : oscillateur auto-excitant de Van der Pol

Un oscillateur de Van der Pol vérifie l'équation :

$$\ddot{s} - \underbrace{\varepsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0} \right)^2 \right)}_{\text{terme d'amortissement NL}} \dot{s} + \omega_0 s = 0$$

ε note la non-linéarité

pour $\varepsilon = 0$ on retrouve l'oscillateur harmonique

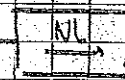
terme d'amortissement NL

1. Composant NL

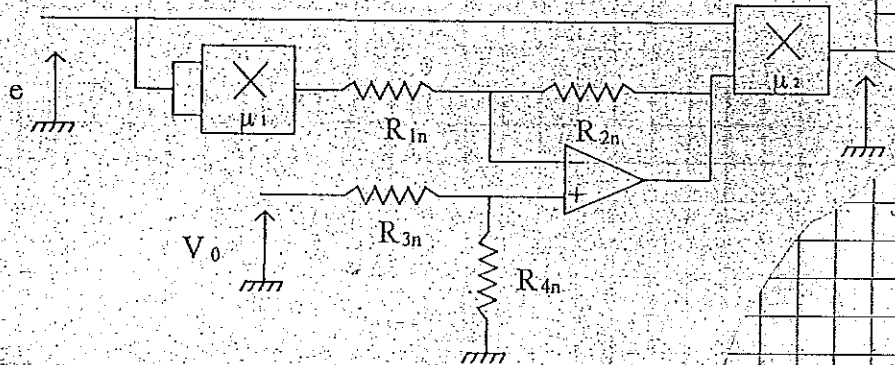
On veut donc créer un circuit électrique qui serait modélisé par cette équation.

Il faut donc créer un composant qui engendrera et amortira NL sous la forme :

$$i = \alpha e - \beta e^3 \quad \text{avec}$$



→ car la résistance négative → nous en a pris la forme pour être un peu plus commode



avec

$$\alpha = - \frac{R_6}{R_4 + R_5} \times \frac{R_1 + R_2}{R_3} \times \mu_1 \mu_2 \quad \alpha < 0$$

$$\beta = \frac{K^2 R_1}{R_2} \quad \beta > 0$$

MANIP : - à l'oscilloscope, on XY, on peut voir la forme cubique et on mesure l'influence de V_0 sur cette forme.

on revient après à la valeur de l'oscilloscope ($V_0 = -1$ pour moi) pour mesurer α et β et montrer que la forme est bien cubique

α est mesuré comme la pente à l'origine

β est relié au 2 autres zéros du polynôme

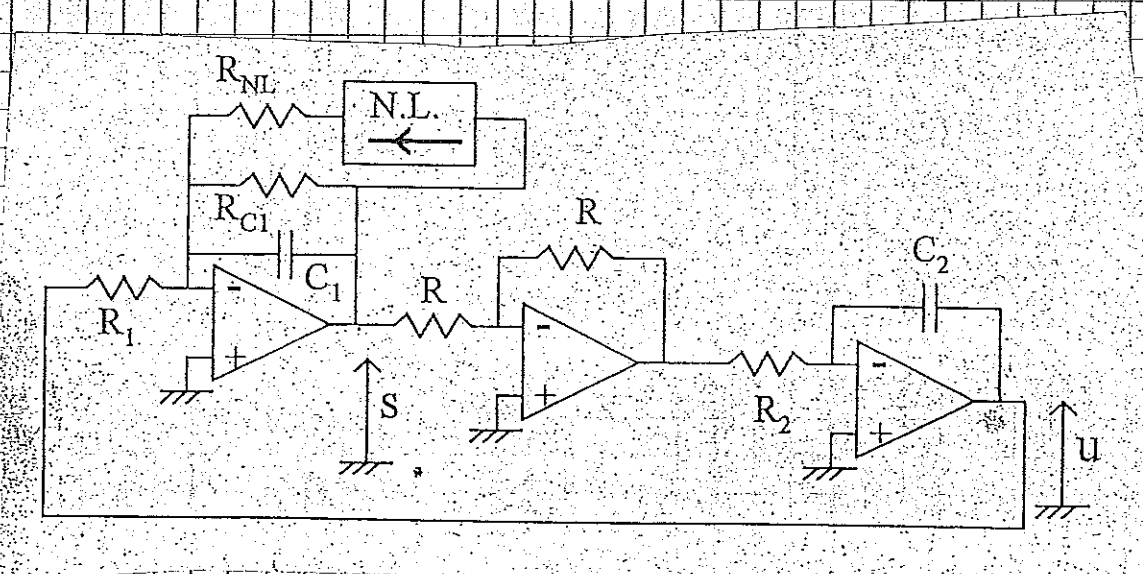
incertitudes : $\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta y} \rightarrow \Delta \alpha$

idem pour $\Delta \beta$ vs $\alpha_h = -0.367$

$\beta_h = 0.122 \text{ V}^{-1}$

2. Deux limites

En memo le sorte de l'oscillateur de Van der Pol qui est maintenant à l'équ du même nom.



Pour plus de clarté on s'écrira l'équation avec les composants qui nous concernent :

$$\ddot{S} + \frac{R^2}{R_1 C_1 R_2 C_2} (\alpha R_C + R_N) \dot{S} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} S = 0$$

- pour $\alpha R_C + R_N > 0$ le terme d'amortissement est > 0 et il n'y a qu'un point fixe sans oscillation car tout est amorti

- pour $\alpha R_C + R_N < 0$, ce terme est positif et des fautes peuvent être amplifiées pour certaines des oscillations

MAIN : en memo les 2 régimes limites avec 2 valeurs de R_N qui encadrent $-\alpha R_C$

- en MAIN en oscillations en XY - un cycle ($\pm$ déformé)
- au pas - au pas (SIM)

Ceci illustre la notion de points fixes (et de bifurcation) :

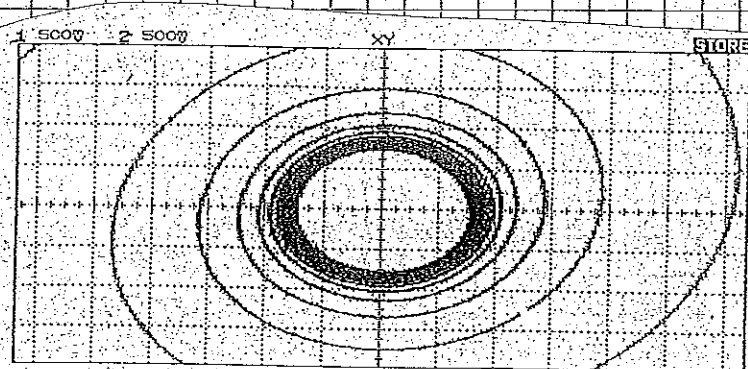
- point fixe attracteur en (0,0) si $R_N > -\alpha R_C$

- un cycle limite pour $R_N < -\alpha R_C$

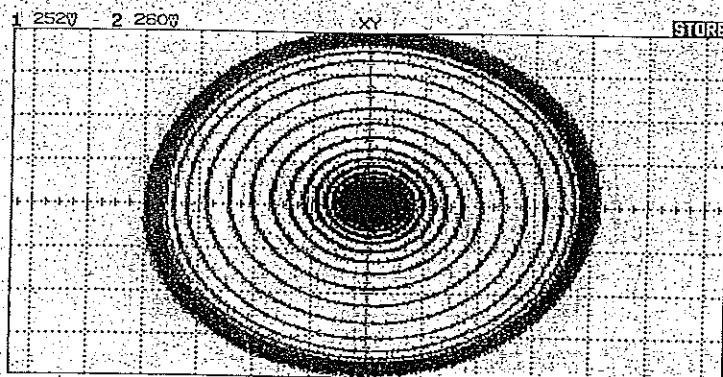
On voit d'ailleurs que le cycle en XY se déforme quand $\varepsilon \uparrow$ et de NL

On montre la convergence vers ce cycle limite en saturant le système en saturant le circuit ... un peu au hasard.

→ en refermant le circuit le système converge vers le cycle en oscillant que ce soit de l'intérieur (point fixe nul) ou de l'extérieur (uniquement saturation de l'AO).



soit une convergence en partant à l'intérieur du cycle:



et l'accroissement, on voit que le nombre de spirale, ie le temps mis pour atteindre le cycle, dépend de l'écart au seul ε .

→ notion de sabotage critique.

3. Caractérisation du comportement NL.

• Différenciation

On a montré les 2 régimes de fonctionnement, essayons maintenant de caractériser un peu plus le passage de l'un à l'autre et la force de la non-linéarité.

MANIP: L'amplitude des oscillations dépend de l'écart au seul, on peut caractériser ça.

→ pour ε (plein, plein, plein) valeurs de R_{NL} on mesure à l'oscilloscope l'amplitude.

→ on obtient la même loi de l'amplitude en fonction de l'écart au seul. Les bifurcations type fourche.

Il s'agit d'une bifurcation de Hopf en réalité, mais c'est une version 2D de la bifurcation.

On peut réaliser plusieurs autres caractéristiques des MEMOIRS NL.

ralentissement critique à l'approche du seuil.

MAINP : en moyenne le temps mis pour que les oscillations atteignent 90% de leur valeur stable pour $\pm R_{NL}$.

→ prendre soin de partir assez du seuil, et montrer à l'oscilloscope aussi le rend du portrait de phase qui se dilate
- les oscillations qui seurent (en MAINP)

→ on ne connaît pas la loi mais ça a l'air de ressembler à $\frac{1}{Q-R_{seuil}}$
avec $\delta \approx 1,6$ pour nous.

l'augmentation de la fréquence des oscillations

MAINP : à montrer sur l'oscilloscope c'est fait

on va en discuter. trouver une loi linéaire entre ω_0 et E'

$E = \dots$ cf. la liste suivant parce que pour nous ça marche pas

PAS DU TOUT.

l'enrichissement spectral

MAINP : faire une FFT du signal pour un écart du seuil $\pm$ grand.

l'air du seuil → enrichissement

Une fois que l'on a la FFT, n'importe quel détail voit bien qu'on

a plus un sinus et que le portrait de phase n'est plus un joli cercle

III Percage et transition vers la phase : oscillateur double-joint. Percé

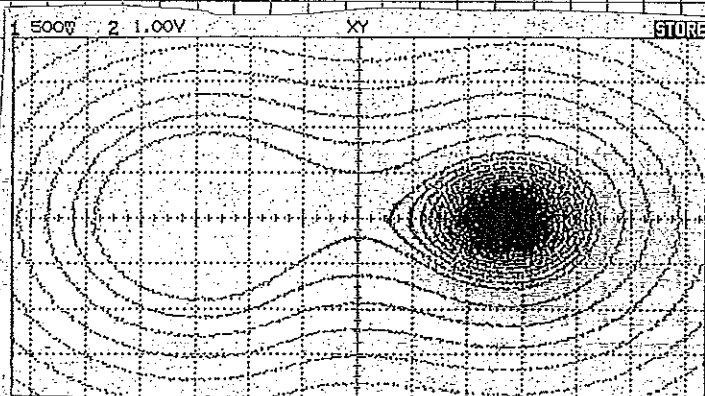
1) L'oscillateur double-joint envoie la pendule

Pour introduire l'oscillateur double-joint, on se s'appuie sur la pendule pour qui montre le comportement du DP de façon très visuelle

MANIP. Pour cela, on place 2 aimants identiques de chaque côté du pendule et on montre qu'il y a 2 nouveaux points fixes stables qui se sont ajoutés à ceux du début.

on montre aussi en lançant une acquisition un symétrisme, qui après un certain nombre d'oscillations, le système choisit une des 2 positions en fonction des conditions initiales.

L'acquisition au synchronisme permet aussi de faire le portrait de phase et on voit apparaître la coexistence avec 2 points.



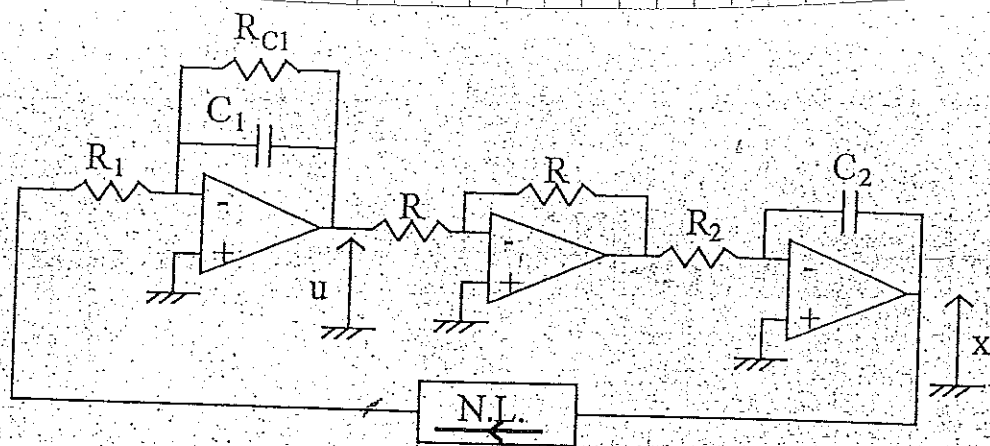
et ce stade en commençant encore bien que le résultat final dépende des conditions initiales.

(L'oscillateur ici est percé car les trajectoires restent fermées)

URS : En fait cette partie a peut-être plus sa place à la suite du pendule simple comme introduction aux points fixes, attracteurs et bifurcations. C'est même amusant qu'ici, si elle va sûrement sauter (c'est à dire) pour une formation de phase à deux, un peu plus stylée.

2. Le double-joint technique en sautoir

En fait avec cet oscillateur DP en électronique (en fait TOUT fait) avec le circuit précédent, on changeant la place de 2 éléments R.



l'équation du circuit donne $\ddot{u} + \alpha \dot{u} + \beta u + \lambda u^3 = 0$

MANIP : on XY en montage en cascade et en formant le circuit à un endroit qui qu'en a le même système que précédemment.

Enfin, puisqu'il est amorti, en tout cas même essayer de voir des oscillations $\Rightarrow$ forçons le.

MANIP : globe avec R1 en branché un GBF qui envoie une gentille sinuso à $\cos t$ à $1V$ ou $2V$.

$\rightarrow$ on peut tenter une petite injection périodique... en se

en bideillant un peu l'amplitude et en V_0 (sur la RCO)

en montage un comportement "chaotique" si les trajectoires semblent s'entremêler (en mode XY)

C'EST LE CHAOS! (doux jesus!)

En fait, c'est inévitablement adonné! si si! c'est juste que pour regarder un un espace 2D (l'oscilloscope) dans que le système est 3D ($x, \dot{x}$ et t), maintenant!

$\rightarrow$ le portrait de phase n'est plus adapté

$\rightarrow$ passons à la section de Poincaré (MIAM!)

3. La section de Poincaré

Ce qu'on peut faire, c'est essayer de couper l'espace 3D suivant un plan car pour voir ce qu'on obtient; si le système oscille se est quelque en coupant au même endroit à chaque période on tombe à chaque fois au même moment

MANIP : on a d'abord synchronisé l'oscilloscope avec l'acquisition.
on se place donc sur une entrée stable du DP (triducille, triducille
et la sinus)

la sinus est à 100 Hz $\rightarrow$ on acquiert à 100 Hz .

$\rightarrow$ on prend donc 1 point par période.

le système est stable donc on peut en tirer quelque chose à chaque fois sur le
même point.

$\rightarrow$ ERREUR! qui a dit que synchronisation / le GBF faisait exception
ce qu'en commande!

$\Rightarrow$ régler très précisément la fréquence du GBF pour que l'acquisition
sur synchronisation donne une belle droite plate

freq GBF

On se place en mode "CHAOS" et on acquiert les 2 voies U et X,
données l'une de l'autre, sur une fenêtre synchronisée $\rightarrow u$.

$\Rightarrow$ on voit généralement apparaitre un motif bien défini!

Le signal n'est donc pas du tout aléatoire, c'est juste qu'il tourne autour
d'un attracteur étrange qu'on n'arrive pas à visualiser sur le petit écran de l'oscilloscope.

C'est la caractéristique ultime de la non-linéarité : un comportement
"chaotique" qui semble totalement désorganisé.