

# MP29 – ONDES, PROPAGATION ET CONDITIONS AUX LIMITES

1<sup>er</sup> décembre 2016

Eric Brilllaux & Benjamin Crinquand

*Elle vaut combien la célérité du son ? MILLE!*  
BENJAMIN FAISANT UNE RÉGRESSION LINÉAIRE

Niveau : L2

## Commentaires du jury

- **2015** : Ce montage est riche, car l'existence de conditions aux limites permet l'apparition de phénomènes aussi variés que la réflexion, la réfraction, la diffraction, les interférences... Dans ce contexte, on veillera à bien distinguer ondes stationnaires et ondes stationnaires résonantes. Notons enfin que la notion d'impédance caractéristique n'est pas limitée au câble coaxial. Enfin, la détermination de la fréquence de résonance de la corde de Melde à l'aide d'un stroboscope n'a pas de sens quand la corde est utilisée avec générateur basse fréquence muni d'un fréquencemètre avec cinq digits.
- **2005** : Ce montage est riche, car l'existence de conditions aux limites permet l'apparition de phénomènes aussi variés que la réflexion, la réfraction, la diffraction, les interférences... Dans ce contexte, on veillera à bien distinguer ondes stationnaires et ondes stationnaires résonantes. Notons enfin que la notion d'impédance caractéristique n'est pas limitée au câble coaxial.
- **2003** : L'existence de conditions aux limites permet l'apparition de phénomènes de réflexion, réfraction, diffraction, interférence, propagation guidée... Notons enfin que la notion d'impédance caractéristique n'est pas limitée au câble coaxial.

## Bibliographie

- ♣ *Dictionnaire de Physique Expérimentale - Tome I*, → Utile pour quasiment tout domaine relevant de l'expérimental. En particulier, la propagation du son et des ultrasons y est présentée, ainsi que la corde de Melde.  
**Quaranta**
- ♣ *Dictionnaire de Physique Expérimentale - Tome IV*, → Le banc hyperfréquence y est présenté.  
**Quaranta**
- ♣ *Notice du banc hyperfréquence ORITEL BDH R100* → Tout ce qu'il faut pour comprendre le banc hyperfréquence, disponible sur internet : <http://www.ens-lyon.fr/DSM/AGREG-Physique/oral/Notices/N089-024.pdf>.

## Prérequis

- Ondes progressives/stationnaires
- Propagation guidée d'ondes électromagnétiques

## Expériences

- ☞ Célérité des ultrasons
- ☞ Corde de Melde
- ☞ Relation de dispersion des ondes centimétriques
- ☞ Taux d'onde stationnaire

## Table des matières

1	Mesure de la célérité en propagation libre	2
2	Propagation forcée	4
3	Propagation guidée	6
4	Impédance terminale	7
5	Conclusion	8

## Introduction

Les phénomènes ondulatoires sont omniprésents dans la nature. C'est le cas des ondes à la surface de l'eau, des sons et ultrasons ou encore des ondes électromagnétiques. Or la propagation est souvent contrainte par un certain nombre de conditions aux limites (obstacles par exemple), qui peuvent altérer considérablement la façon dont l'onde se propage. Ainsi nous allons voir comment une onde se propage librement, puis nous étudierons les la propagation forcée, et enfin nous terminerons par la propagation avec conditions aux limites transverses (guide d'onde) et longitudinales (adaptation d'impédance).

### Note :

Toutes les incertitudes données sont des incertitudes-types.

## Mesure de la célérité en propagation libre

↗ Quaranta IV, article "Ultrasons" p.461

Les ultrasons sont des ondes acoustiques de fréquence supérieure au seuil d'audibilité de l'oreille humaine, à savoir 20 kHz. Lors de la propagation libre, que nous supposons être réalisée dans les conditions de l'expérience, la relation de dispersion la plus simple qui soit, à savoir :

$$k = \omega/c \Leftrightarrow f = c/\lambda \quad (1)$$

où  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde et  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation. Dans ce cas particulier, vitesses de phase et de groupe sont égales à la célérité  $c$  :

$$v_\phi = v_g = c \quad (2)$$

**But :** Calculer la célérité des ultrasons dans l'air lors de la propagation libre. Comparer la mesure au modèle du gaz parfait et aux valeurs tabulées.



### Mesure de la célérité des ultrasons

↗ Quaranta Tome IV, p.397 (Son(propagation)), p.461 (Ultrason), BUP 761 (Fév. 1994) p.299

⊖ 8 min

Le matériel est le suivant :

- Émetteur à ultrasons
- Récepteur à ultrasons
- Oscilloscope
- GBF
- Divers : mètre ruban, règle en bois et plaques en bois pour faciliter la translation du récepteur, blocs de mousse

La mesure sera indirecte : on impose la fréquence de 40 kHz à l'émetteur (grâce au GBF). La tension n'a pas d'importance, du moment qu'elle est suffisante pour bien voir les oscillations à l'oscilloscope.

**Protocole** On place le récepteur à une distance de quelques dizaines de centimètres de l'émetteur. Ensuite, il faut tracer la tension d'émission et de réception sur les voies Y1 et Y2 de l'oscilloscope en mode XY. Reculer alors le récepteur de sorte à ce que la courbe décrite dans le plan (XY) soit une droite (par exemple la première bissectrice). À cet endroit, les ondes émises et reçues sont en phase (méthode de Lissajous). Noter les positions de l'émetteur  $x_0$  et du récepteur  $x_i$  grâce au mètre ruban. Enfin, reculer le récepteur et compter le nombre entier  $N$  de retour à une phase nulle (par exemple la première bissectrice) et la position finale  $x_f$  du récepteur.  $N$  correspond alors au nombre de longueurs d'onde parcourues. On a :

$$\lambda = |x_i - x_f|/N \text{ puis } c = \lambda f \quad (3)$$

Comme on ne peut quasiment pas faire varier la fréquence, il est possible de réaliser plusieurs mesures de  $c$  à des fréquences proches de 40 kHz puis d'en faire la moyenne statistique.

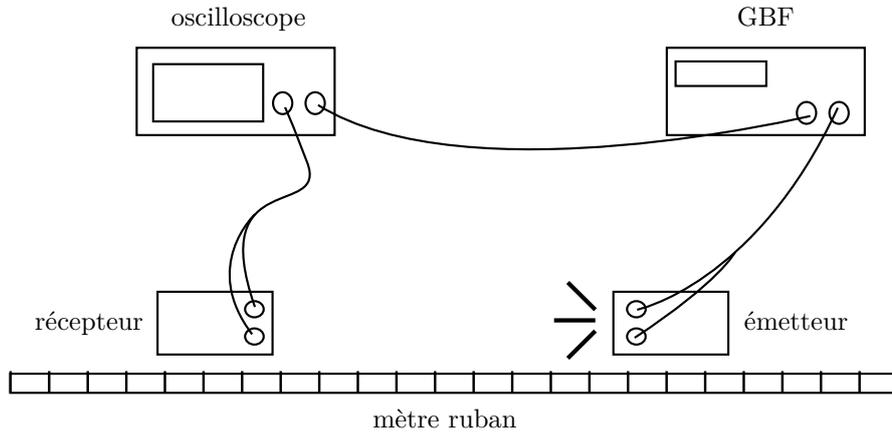


FIGURE 1 – Schéma du montage à ultrason. Le GBF envoie un signal à 40 kHz à l'émetteur. Le récepteur est traduit sur une distance  $|x_f - x_r|$  où  $x$  est l'abscisse du mètre ruban.

### Remarques

- Il faut se placer à une distance  $L$  grande devant la taille typique de l'émetteur. Ainsi l'approximation d'ondes sphériques est valide.
- Il vaut mieux placer des blocs de mousse entre l'émetteur et le récepteur pour éviter que les ondes réfléchies sur la table ne provoquent des interférences et donc l'observation de battements sur l'amplitude reçue, qui peuvent être gênantes.

### Mesures et incertitudes

Incertitude sur la distance parcourue :  $\Delta x = 3 \text{ mm}$

Nombre de retours en phase :  $N = 40$

Fréquences :  $f = 38 - 42 \text{ kHz}$  (incertitude négligeable)

On en déduit :

$$c_{exp} = (344,8 \pm 1,3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4)$$

### Comparaison

- En faisant les hypothèses suivantes :
  - i) L'air se comporte comme un gaz parfait diatomique de masse molaire  $M = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
  - ii) La propagation de l'onde acoustique se fait selon une transformation isentropique. On montre que :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (5)$$

où  $\gamma = 1.4$ . Avec  $T = 22,1 \pm 0.05^\circ\text{C}$ , il vient :

$$\Delta c = 1/2 \sqrt{\gamma R / MT} \Delta T, \quad (6)$$

et donc :

$$c_{th} = (344,36 \pm 0,03) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (7)$$

La valeur expérimentale est en très bon accord avec la célérité théorique déduite du modèle du gaz parfait.

- Valeurs tabulées à  $20^\circ\text{C}$  et  $25^\circ\text{C}$  (Handbook W.M.Haynes 92<sup>nd</sup> edition 2011-2012) :

$$c(20^\circ\text{C}) = 343,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (8)$$

$$c(25^\circ\text{C}) = 346,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (9)$$

La célérité déterminée expérimentalement est bien dans l'intervalle comme attendu.

La propagation libre est ce qu'il y a de plus simple. Pourtant, il est possible d'exciter une onde se propageant sur une distance finie, ce qui modifie la façon dont l'onde se propage.

## Propagation forcée

↗ Quaranta I p.259

Condérons à présent une onde mécanique se propageant le long d'une corde horizontale de longueur  $L$  (corde de Melde). La taille finie de la corde impose la quantification de la fréquence des oscillations :

$$f_n = \frac{nc}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (10)$$

Lorsqu'une extrémité est fixe et que l'autre est excitée sinusoidalement, les ondes sont stationnaires quelle que soit la fréquence, et sont en plus de cela résonantes quand la fréquence de l'excitateur est une fréquence propre de la corde. Les évolutions temporelle et spatiale sont alors découplées.

Il est important de noter que les ondes observées sont stationnaires car issues de la propagation d'ondes progressives et régressives dues aux réflexions aux deux extrémités. Il n'y a donc pas de propagation à proprement parler. Cependant, la relation (10) est toujours valable puisqu'elle est une caractéristique de la corde et non des conditions aux limites aux extrémités. La célérité  $c$  est comme précédemment à la fois la vitesse de phase (ce que montre (10)) mais aussi la vitesse de groupe.

**But :** Mesurer la célérité  $c$  des ondes progressives et vérifier la relation de dispersion.

### Corde de Melde

↗ Quaranta I p.261

⊖ 8 min

L'expérience requiert le matériel suivant :

- Pot vibrant et son alimentation
- GBF
- Corde (simple ficelle)
- Masse
- Poulie
- Potence, tige et noix
- Support boy

La masse se fixe à l'extrémité d'une corde. La corde passe par la poulie du côté de la masse et est attachée au vibreur à l'autre extrémité.

**Protocole** Mettre en route le vibreur à une faible fréquence (10 Hz). Des ondes stationnaires sont observables. Augmenter la fréquence jusqu'à obtenir au milieu de la corde un ventre de grande amplitude : il s'agit du mode  $n = 1$ . Noter la fréquence du vibreur (imposée par le GBF). Répéter (en préparation) l'opération jusqu'aux modes 6 ou 7.

### Remarque

La relation de dispersion est linéaire dans l'approximation où l'angle de déviation de la corde  $\alpha$  avec l'horizontale est négligeable :  $\alpha \ll 1$ . En pratique il faut avoir conscience que cette condition n'est pas forcément vérifiée de façon indiscutable, à moins d'exercer une tension très grande.

Ordre de grandeur :  $T \sim 0.4 \text{ N}$ ,  $L \sim 1.5 \text{ m}$ , pour  $n = 1$  on a pu estimer que  $\tan \alpha \sim 0.07$ .

### Mesures et incertitudes

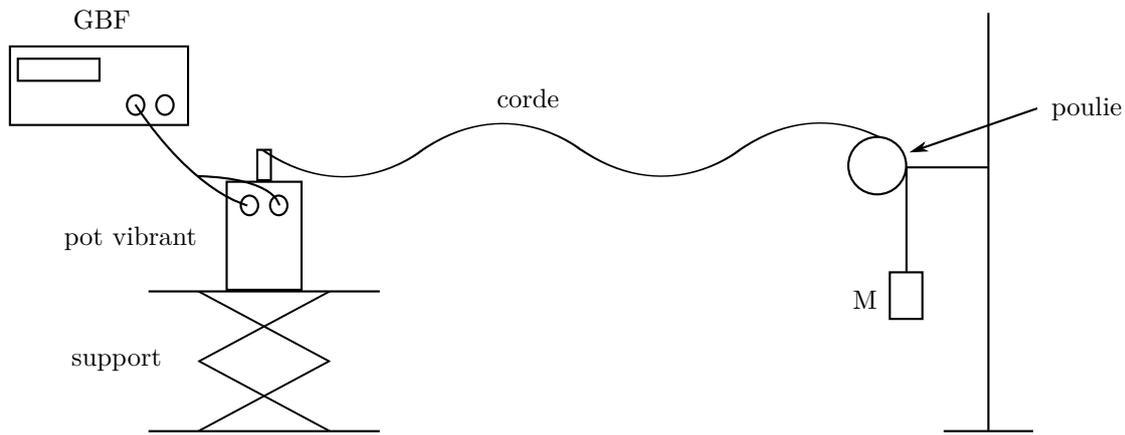


FIGURE 2 – Schéma du montage de la corde de Melde.

Longueur de la corde :  $L = (1.218 \pm 0.003) \text{ m}$   
 Masse linéique :  $\mu = (1.90 \pm 0.01) \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$   
 Intensité de la pesanteur :  $g = (9.81 \pm 0.005) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$   
 Masse :  $M = (410,5 \pm 0.05) \text{ g}$   
 Tension :  $T = Mg = (4,027 \pm 0.002) \text{ N}$

La modélisation est cohérente avec une loi linéaire entre la fréquence  $f$  de résonance et la quantité  $x = n/(2L)$ , sachant qu'avec une modélisation affine, l'incertitude sur l'ordonnée à l'origine est supérieure à sa valeur. Le  $\chi^2$  réduit est de 0.811, ce qui confirme la loi. La pente est la célérité  $c$  des ondes progressives dans la corde, et vaut :

$$c_{exp} = (46.6 \pm 0.3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (11)$$

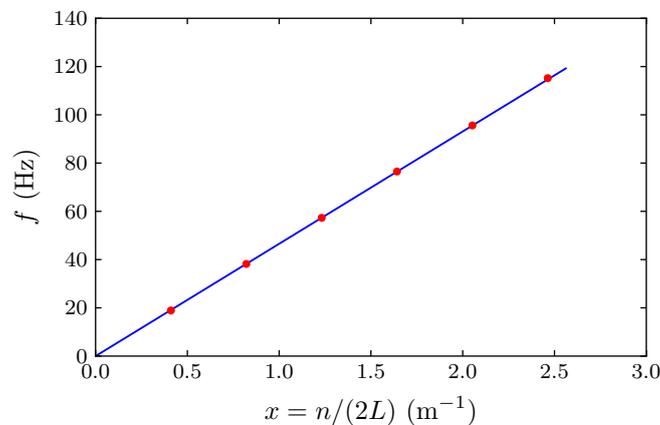


FIGURE 3 – Fréquence de résonance  $f$  en fonction de la grandeur  $x = n/(2L)$ . Les points expérimentaux sont en rouge et la modélisation en bleu. L'incertitude-type sur la fréquence est  $\Delta f = 0.1 \text{ Hz}$  et est due à l'appréciation du maximum d'amplitude aux ventres. L'incertitude sur  $x$  est  $\Delta x = n\Delta L/(2L^2) = 1 \cdot 10^{-3}n$ .

### Comparaison

En se plaçant dans l'approximation des faibles déplacements ( $\alpha \approx \partial y/\partial x \ll 1$ ), la célérité de l'onde a pour expression :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (12)$$

L'incertitude se calcule à l'aide de la formule de propagation classique :

$$\Delta c = \sqrt{\frac{\Delta T^2}{4\mu T} + \frac{T\Delta\mu^2}{4\mu^3}} \quad (13)$$

L'incertitude sur  $T$  peut raisonnablement être négligée. L'application numérique donne :

$$c = (46,0 \pm 0,1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (14)$$

La valeur attendue n'est pas dans la barre des incertitudes-types, bien que les valeurs soient compatibles. Il est possible que l'estimation de l'incertitude sur la fréquence de résonance ait été sous-estimée. Ce résultat met aussi en avant les limites du modèle des faibles amplitudes d'oscillation.

*Nous avons vu comment les conditions aux limites aux extrémités pouvaient modifier la propagation. À présent nous allons voir comment se propage une onde lorsqu'on lui impose des conditions aux limites transverses rigides. C'est le cas du guide d'onde*

## Propagation guidée

☞ Quaranta IV p.309, Notice du banc hyperfréquence

Les ondes électromagnétiques centimétriques ont des fréquences de l'ordre du GHz et des longueurs d'onde de l'ordre de 3 cm. Elles peuvent être produites par une diode Gunn. Ce composant possède une résistance dynamique négative sur une certaine plage de tension, ce qui permet de s'en servir comme oscillateur. Le banc hyperfréquence se constitue des éléments suivants :

- la diode Gunn (production des ondes) ;
- l'isolateur (protection de la diode des ondes réfléchies) ;
- l'ondemètre (mesure de fréquence) ;
- l'atténuateur (mesure d'atténuation) ;
- le banc de mesure (visualisation de l'amplitude moyenne de l'onde).

Le guide est rectangulaire de dimensions  $a = 22.86$  mm et  $b$ . La relation de dispersion est modifiée par les conditions aux limites, et celle-ci s'écrit :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{f^2}{c^2} - \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{n}{a} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right] \quad (15)$$

La plage de fréquence accessible est telle que seul le mode  $TE_{10}$  est sélectionné. Ainsi, avec  $n = 1$  et  $m = 0$ , la relation de dispersion se réduit à :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{f^2}{c^2} - \frac{1}{4a^2} \quad (16)$$

**But :** Vérifier la relation de dispersion et la valeur de la célérité de la lumière dans le vide  $c$ .

### Relation de dispersion des ondes centimétriques

☞ Quaranta IV p.309

⊖ 10 min

Pour vérifier la relation de dispersion, il faut connaître la fréquence  $f$  et la longueur d'onde  $\lambda$ . La première est connue car l'oscillateur à diode Gunn est calibré en fréquence. Il est cependant préférable de la mesurer avec l'ondemètre. La longueur d'onde s'obtient grâce au banc de mesure et d'un oscilloscope. Afin de réaliser les mesures, on crée une onde stationnaire dans le guide en plaçant une plaque de métal à l'extrémité libre. De ce fait, la sensibilité du repérage des maxima est maximale.

**Protocole** Choisir une fréquence grâce au vernier présent sur la diode Gunn et de la courbe d'étalonnage fournie. Mesurer tout de même la fréquence à l'ondemètre pour vérifier qu'elle est correcte. L'accord de fréquence est réalisé lorsque l'amplitude sur l'oscilloscope (mode défilement) présente un minimum. La largeur du minimum permet d'estimer la plage du vernier réalisant l'accord de fréquence et donc l'incertitude sur la fréquence à l'aide de la courbe d'étalonnage de l'ondemètre.

Ensuite, repérer deux, voire trois maxima (ou minima) successifs en translatant le banc de mesure. La distance entre deux maxima donne  $\lambda/2$ . De plus, estimer l'incertitude sur  $\lambda$  due à la lecture du vernier.

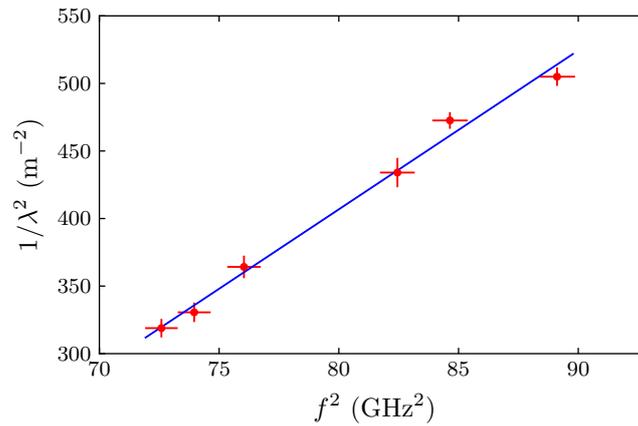


FIGURE 4 – Tracé de  $1/\lambda^2$  en fonction de  $f^2$ . Les points rouges sont les valeurs expérimentales avec leurs incertitudes, la droite bleue est la modélisation affine.

### Mesures et incertitudes

Incertitude type sur  $f$  :  $\Delta f = 0.04$  GHz

Incertitude sur  $\lambda$  :  $\Delta\lambda = 0.3$  mm ou 0.6 mm en fonction du nombre de maxima repérés

La modélisation affine donne un  $\chi^2$  réduit de 0,729, ce qui confirme la relation de dispersion. La pente  $A$  et l'ordonnée à l'origine  $B$  valent respectivement :

$$A = 1/c^2 = (11,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-18} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \quad \text{et} \quad -B = -1/(4a^2) = -534 \pm 60 \text{ m}^{-2} \quad (17)$$

On en déduit la célérité  $c_{exp}$  et la largeur du guide  $a_{exp}$  ainsi que les incertitudes associées selon la formule usuelle de propagation des incertitudes, soit :

$$\Delta c = \frac{\Delta A}{2A^{3/2}} \quad \text{et} \quad \Delta a = \frac{\Delta B}{4B^{3/2}}, \quad (18)$$

d'où :

$$\boxed{c_{exp} = 2.91 \pm 0.08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \quad (19)$$

$$\boxed{a_{exp} = 21.6 \pm 1.2 \text{ mm}} \quad (20)$$

### Comparaison

- La célérité de la lumière vaut bien sûr  $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La valeur mesurée est compatible au vu de l'incertitude associée.
- La largeur du guide est donné par le constructeur :  $a = 22.9$  mm. Là encore, la valeur expérimentale est en plutôt en adéquation avec celle attendue. Cependant, la précision sur cette mesure est assez faible dans la mesure où  $\Delta a/a = 6\%$ .

↓ *Le guide n'étant pas de longueur infinie, il peut être pertinent de savoir ce qui se passe en sortie, et en particulier de connaître le facteur de transmission de l'onde à l'extrémité.*

## Impédance terminale

Dans le cas général, l'onde envoyée par la diode Gunn est partiellement réfléchi à l'extrémité du guide. La superposition des champs incident  $E_i$  et réfléchi  $E_r$  crée un système d'onde stationnaire, caractérisé une oscillation présentant des maxima  $E_{max}$  et des minima  $E_{min}$ . On peut lui attribuer ce qu'on appelle le taux d'onde stationnaire, défini par :

$$\text{TOS} = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{|E_i| + |E_r|}{|E_i| - |E_r|} = \frac{1 + r}{1 - r} \quad (21)$$

avec :

$$r = \frac{|E_r|}{|E_i|} \quad (22)$$

le module du coefficient de réflexion de l'impédance terminale. Même s'il est possible de remonter au déphasage introduit par la réflexion, nous nous restreindrons à la détermination du module du coefficient de réflexion.

Le module du coefficient de réflexion  $r$  se déduit donc du TOS via la relation :

$$r = \frac{\text{TOS} - 1}{\text{TOS} + 1} \quad (23)$$

**But :** Déterminer le coefficient de réflexion d'une impédance terminale.



### Détermination d'un coefficient de réflexion

↗ Quaranta IV p.309

⊖ 10 min

#### Matériel

- La plaque métallique adaptée
- Le cornet adapté

Il existe plusieurs impédances terminales, entre autre une plaque de métal de coefficient de réflexion proche de 1, et un cornet dont l'impédance est adaptée à l'impédance propagative du guide.

**Protocole** Placer une impédance en sortie du guide (par exemple le cornet ou la plaque de métal). Ensuite, si ce n'est pas déjà fait, se placer en minimum d'atténuation à l'aide du vernier de l'atténuateur calibré. Repérer ensuite un minimum d'amplitude à l'aide du banc de mesure, et placer un curseur horizontale sur la valeur de la tension correspondante sur l'oscilloscope. Puis se positionner sur un maximum et atténuer le signal de sorte à ce que la valeur de la tension descende jusqu'au curseur. La valeur de l'atténuation (déduite de la lecture du vernier et de la courbe d'étalonnage fournie), noté  $A$ , est alors relié au rapport des tensions maximale et minimale, et donc au TOS, suivant la relation suivante :

$$A \text{ (dB)} = 20 \log(\text{TOS}) \quad (24)$$

d'où l'on tire :

$$\text{TOS} = 10^{A/20} \quad (25)$$

L'incertitude sur la mesure est :

$$\Delta(\text{TOS}) = \frac{\Delta A \ln 10 \cdot \text{TOS}}{20} \quad (26)$$

#### Mesures et incertitudes

Réglage de l'atténuation (vernier) :  $x = \dots \pm \dots$  mm

Atténuation :  $A = 7,0 \pm \dots$  dB

TOS :  $\text{TOS} = 2.2 \pm \dots$

Ainsi le coefficient de réflexion vaut :

$$\boxed{r = 0.3} \quad (27)$$

## Conclusion

Nous avons vu comment se propage une onde lorsqu'elle est contrainte par des conditions aux limites. Ainsi la propagation libre permet une mesure simple de la célérité des ondes acoustiques, qui est égale aux vitesses de phase et de groupe pour un milieu non dispersif comme l'air. De plus, l'onde devient stationnaire lorsqu'elle est excitée sinusoidalement (corde de Melde) ou qu'elle est guidée (banc hyperfréquence). En particulier, on observe le phénomène de résonance lorsqu'une corde est excitée sinusoidalement, et de plus les conditions transverses modifient la relation de dispersion de l'onde. Un autre phénomène ondulatoire due aux conditions aux limites est bien sûr la diffraction, qui revêt une importance particulière en optique mais est également observable avec d'autres types d'onde, tels que les ondes gravito-capillaire à la surface de l'eau.



## Diffraction d'ondes gravito-capillaires

👉 moi

🕒 1 min

Il est possible d'observer la diffraction des ondes à la surface de l'eau grâce à la cuve à onde. Il suffit de placer deux obstacles en regard pour simuler une fente. On peut aussi craquer complètement et faire un réseau avec une ligne de craies, c'est au choix.