
MP 29. Ondes : propagation et conditions aux limites

LUCILE SANCHEZ, Caroline Mortagne

Table des matières

1	Propagation libre et influence du milieu :	1
2	Limitations du milieu	2
2.1	Réflexion et transmission	2
2.2	Câble coaxial : [Quaranta tome IV, rappels théoriques : Sanz]	2
2.3	Confinement et onde stationnaire	3
3	Propagation guidée : transmission d'un signal	5
3.1	Description du banc [notice]	5
3.2	Relation de dispersion	6
3.3	Transmission en fin de ligne	8
3.3.1	Impédance et rapport d'onde stationnaire	8
3.3.2	Directivité du signal transmis : diagramme de rayonnement . .	9
3.4	Conclusion	9

Introduction

Une onde correspond à la propagation d'une perturbation à travers un milieu, l'objectif de ce montage est d'étudier en quoi les conditions aux limites modifient la propagation de l'onde dans un milieu.

1 Propagation libre et influence du milieu :

Les phénomènes ondulatoires se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique et présentent un caractère très varié, une onde peut se propager avec ou sans milieu matériel, dans une ou plusieurs directions de l'espace. On observe dans un premier temps la propagation à une dimension d'une onde mécanique dans une corde (*Impulsion sur une corde d'escalade*) , (*Faire un petit plouf dans un cristalliseur.*) , ici nous voyons des ondes de gravité à 2 dimension se propager à la surface de l'eau. Ces deux ondes sont transverses. Le son que je produis est une onde de compression longitudinale à trois dimension.

La propagation d'une onde n'est jamais instantanée, la grandeur la caractérisant est la **célérité**. Cette grandeur balaye un grand domaine d'ordre de grandeur et dépend à la fois de la nature de l'onde et du milieu considéré.

On peut citer quelques ordres de grandeurs : $c = 2.99 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ pour une onde électromagnétique dans le vide, pour la corde d'escalade, $c \approx 15 \text{ m.s}^{-1}$

Pour les ondes sonores on met en évidence l'influence de la densité du milieu sur cette célérité.

Expérience 1 : On envoie un signal créneau à l'aide d'une céramique piézo-électrique immergée dans de l'eau et on mesure les temps de propagation entre cet émetteur et un récepteur de même nature situé à une distance de quelques dizaines de centimètres.

→ Pour cette expérience bien penser à relier le Dural à la masse de l'oscilloscope ou du GBF. On fait l'acquisition avec le mode "High resolution" de l'oscilloscope.

On en déduit la vitesse de l'onde : $L = 12,5 \pm 0.2 \text{ cm}$, $t_1 = 90 \pm 0.5 \mu\text{s}$, d'où $v_{liq} = 1389 \pm \Delta v_{liq} \text{ m.s}^{-1}$ avec $\Delta v_{liq} = v_{liq} \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} = 24 \text{ m.s}^{-1}$. (Le Sanz indique que le son dans l'eau se propage à 1410 m.s^{-1})

→ Pour cette manip, l'incertitude porte essentiellement sur la position des capteurs, on peut se permettre d'aller un peu vite avec les curseurs.

On réalise la même expérience en introduisant un bloc de dural, sous incidence normale. On trouve $t_2 = 68.4 \pm 0.5 \mu\text{s}$ et le bloc mesure $e = 4 \pm 0.2 \text{ cm}$ d'épaisseur.

Or $t_2 = \frac{l_{liq}}{v_{liq}} + \frac{l_{sol}}{v_{sol}} = \frac{L-e}{v_{liq}} + \frac{e}{v_{sol}}$ d'où $v_{sol} = \frac{e}{t_2 - \frac{L-e}{v_{liq}}}$. Pour Δv_{sol} , l'incertitude sur les

longueurs l'emportent, $\Delta v_{sol} \approx \sqrt{\left(\frac{\partial v_{sol}}{\partial e} \Delta e\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{sol}}{\partial L} \Delta L\right)^2}$ soit

$\Delta v_{sol} = \sqrt{\left(\frac{1}{e} - \frac{v_{sol}}{ev_{liq}}\right)^2 \Delta e^2 + \left(\frac{v_{sol} \Delta L}{v_{liq} L}\right)^2}$ d'où après calcul $v_{sol} = 5600 \text{ m.s}^{-1} \pm 900 \text{ m.s}^{-1}$!

On met ainsi en évidence l'influence de la densité du milieu sur la vitesse de propagation de l'onde.

2 Limitations du milieu

On a une propagation **libre** de l'onde jusqu'à ce qu'elle atteigne un obstacle où divers phénomènes peuvent la modifier considérablement.

2.1 Réflexion et transmission

Une première conséquence, est celle de la réflexion et de la transmission de l'onde lorsqu'elle arrive à une interface. Ces phénomènes sont traduits par deux coefficients r et t qui dépendent de l'**impédance** de chaque milieu.

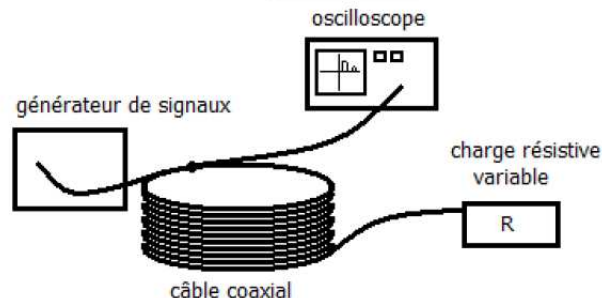
2.2 Câble coaxial : [Quaranta tome IV, rappels théoriques : Sanz]

On peut illustrer cette propriété à l'aide d'un câble coaxial, il s'agit d'un guide d'onde composé d'une âme et d'une gaine dans lequel des ondes électrocinétiques peuvent se

propager. L'expression des coefficients de réflexions et transmission en amplitude pour la tension est :

$$r = \frac{Z - Z_c}{Z_c + Z} \quad t = \frac{2Z_c}{Z_c + Z} \quad (1)$$

Expérience 2 : On réalise le montage suivant :



On met en évidence le phénomène de réflexion avec l'envoi dans le câble coaxial d'une impulsion, et observation de plusieurs signaux sur l'oscilloscope. Le premier pic observé correspond au pulse envoyé, le second à la réflexion sur l'extrémité du câble et les autres à des réflexions successives. On mesure la célérité de l'onde dans le câble. Il mesure $L = 95,1$ m, on détermine à l'aide des curseurs de l'oscilloscope le décalage temporel entre les deux premiers signaux. La vitesse mesurée ici est une vitesse de groupe, on mesure donc l'écart temporel entre les deux maxima du paquet d'onde. On trouve alors $\Delta t = 826 \pm 10 \text{ ns}$ d'où $c = \frac{2L}{t} = 2.30 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \pm \Delta c$. L'incertitude provient essentiellement de la mesure du décalage temporel d'où $\Delta c = c \frac{\Delta t}{t} = 3 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$

Revenons plus en détail sur la valeur des coefficients r et t , lorsque l'extrémité du câble est libre, le second pic est positif, ce qui est cohérent avec le fait que l'impédance de l'air est supérieure à celle du câble, (le troisième pic observé est négatif il y a donc eu réflexion sur un objet d'impédance plus faible que celle du câble, on peut penser au T séparant le signal en sortie du GBF, puisque modifier l'impédance du GBF ou de l'oscillo ne change rien). Si au contraire on effectue un court circuit à l'extrémité du câble, on observe que le second pic est négatif à l'écran, l'impédance du fil utilisé (quasiment zéro) est en effet plus faible que celle du câble coaxial.

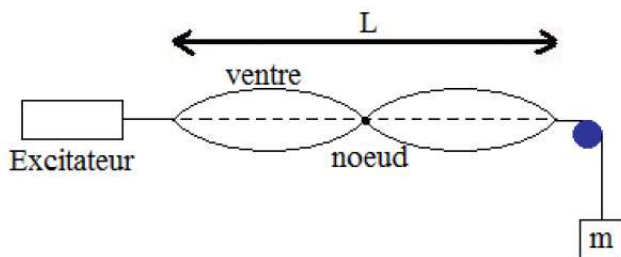
Dans l'expression des coefficients r et t , on remarque que si $Z = Z_c$, $t=1$ et $r=0$, toute l'onde est donc transmise : on dit qu'il y a **adaptation d'impédance**. On utilise une boîte de résistance pour déterminer l'impédance caractéristique du câble coaxial. Dans la pratique on observe pas une annulation totale du signal à l'oscilloscope, en effet l'impédance du câble contient sans doute une partie imaginaire que la résistance seule ne peut pas égaler. On a $Z_c = \dots \pm j\Omega$.

Au passage d'une interface, une onde peut être réfléchie ou transmise. Dans le cas d'une adaptation d'impédance l'onde est entièrement transmise

2.3 Confinement et onde stationnaire

Lors d'une réflexion sur une interface, l'onde résultante, somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie est **stationnaire**.

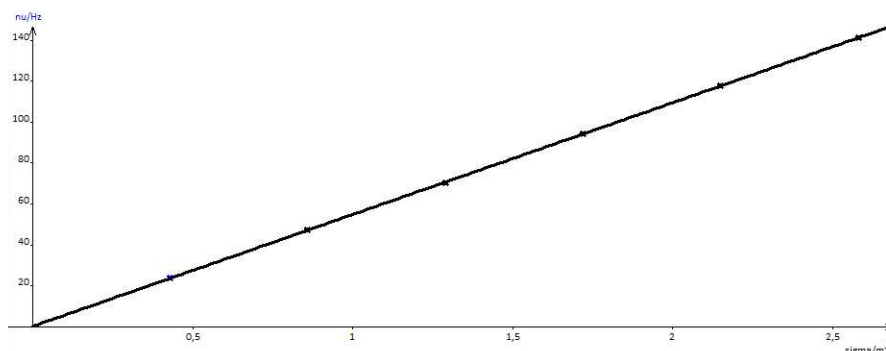
Expérience 3 : On considère pour mettre en évidence ce phénomène la **corde de Melde** [Théorie : Cap prépa, Sanz. Pratique : Quaranta].



Il s'agit d'une corde tendue dont l'une des extrémité est fixée à une masse M connue (via une poulie), et l'autre extrémité est fixée à un pot vibrant commandé par un GBF. Pour rendre l'expérience plus visible le GBF est amplifié.

On a une réflexion totale sur les deux extrémités de la corde et l'onde résultante est la superposition de toutes les ondes réfléchies. En première approximation on a donc un noeud de vitesse à chaque extrémité de la corde.¹. Seules certaines longueurs d'onde vont pouvoir vérifier ces conditions aux limites particulières, elles vérifient la condition $\frac{\lambda}{2}n = L$ avec n un entier. On les appelle **les modes propres de la corde**. Les conditions aux limites entraînent donc **une discrétisation des modes propres**.

Si on excite la corde à la fréquence d'un mode propre, il y a **résonance** et l'onde stationnaire devient bien visible. On trace la fréquence f en fonction de $1/\lambda$ pour différents modes propres. On obtient une droite dont le coefficient directeur nous donne une vitesse : $c = 54.6 \pm 1.8 \text{ m.s}^{-1}$, il s'agit de la vitesse de propagation des ondes constituant l'onde stationnaire. Concernant les incertitudes, elles sont de l'ordre de 0,2 Hz pour la fréquence et dépendent du mode pour λ : on estime à 1 cm la précision du noeud au niveau du vibreur (*on a pas vraiment le temps de faire dans le détail*), l'incertitude $\Delta\lambda_n$ du mode n s'écrit donc $\Delta\lambda_n = \lambda_n \frac{\Delta L}{L} = 2 \frac{\Delta L}{n}$



1. La condition au limite imposée par le vibreur n'est pas très claire, on s'aperçoit que l'extrémité de la corde est "proche d'un noeud"

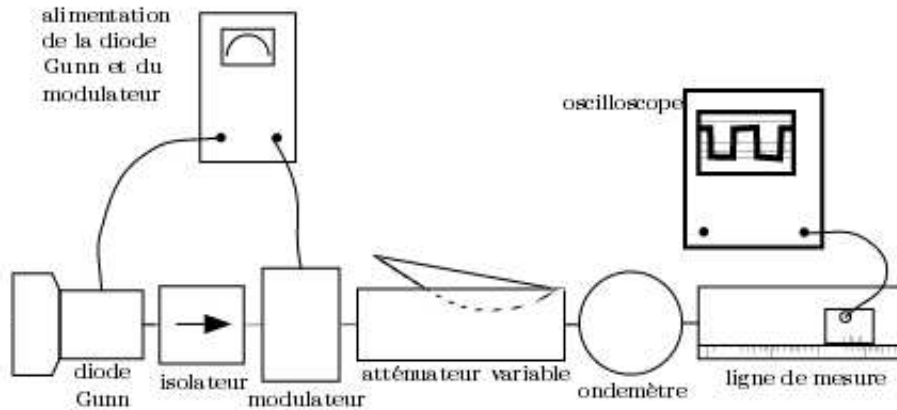
Théoriquement, $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$ avec T_0 la tension exercée au bout de la corde et μ_0 sa masse linéique. Dans une assez bonne approximation $T_0 = Mg$ avec M la masse attachée à l'extrémité (on peut négliger le poids de la corde). On obtient donc $c = \sqrt{\frac{Mg}{\mu_0}}$ avec $M = 100,1 \text{ g}$ (incertitude négligeable), $g = 9.81 \text{ N.kg}^{-1}$, $\mu_0 = \frac{m_{\text{corde}}}{L_{\text{corde}}} = \frac{0.52g \pm 0.01 \text{ g}}{1.5 \text{ m} \pm 0.002 \text{ m}} = 3.5 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1} \pm \Delta\mu_0$ avec $\Delta\mu_0 = \mu_0 \frac{\Delta m}{m} = 6 \cdot 10^{-6}$ d'où $c = 53.2 \pm \frac{c}{2} \frac{\Delta\mu_0}{\mu_0} = 53.2 \pm 0.5 \text{ m.s}^{-1}$. On est bien dans les barres d'erreurs.

3 Propagation guidée : transmission d'un signal

Considérons à présent la transmission guidée d'ondes centimétriques ($\lambda = 3 \text{ cm}$) dans un banc hyperfréquence.

3.1 Description du banc [notice]

On effectue ici une description rapide du banc, on reviendra plus en détails sur certains éléments dans la suite du montage.



L'oscillateur GUNN

Il s'agit de la source d'énergie du banc hyperfréquence. L'oscillateur est une portion de guide d'onde dont l'une des extrémités est fermée par un court-circuit que l'on peut déplacer à l'aide d'une vis munie d'un vernier, elle constitue donc une cavité résonante réglable. Une diode à effet GUNN est placée dans le guide d'onde et la fréquence est fixée par la cavité résonante.

L'isolateur

Son but est de protéger l'oscillateur à diode GUNN, il laisse ainsi passer l'énergie hyperfréquence sans atténuation dans le sens "oscillateur-charge" alors qu'il l'atténue fortement dans le sens contraire. En rendant l'oscillateur indépendant du reste du montage, on s'assure qu'il délivre toujours la même fréquence et la même puissance.

L'atténuateur de précision :

L'atténuateur variable permet de choisir la quantité d'énergie transmise par le montage oscillateur et de la mesurer à l'aide du vernier.

Ondemètre : OE 90

L'ondemètre permet la mesure de la fréquence.

Ligne de mesure :

La ligne de mesure est une section de guide ayant une fente longitudinale. Une antenne parallèle au champ électrique, y est insérée et permet de prélever la tension le long de la ligne grâce à un chariot. L'enfoncement de l'antenne dans le guide doit être assez fort pour voir un signal correct et assez faible pour ne pas perturber l'onde à mesurer.

3.2 Relation de dispersion

Comment le banc modifie-t-il la structure de l'onde électromagnétique en son sein ? On sait que l'air est un milieu non dispersif, l'onde électromagnétique vérifie en propagation libre l'équation de d'Alembert, la relation de dispersion est donc $\omega = kc$. Quand est-il à l'intérieur du guide d'onde ?

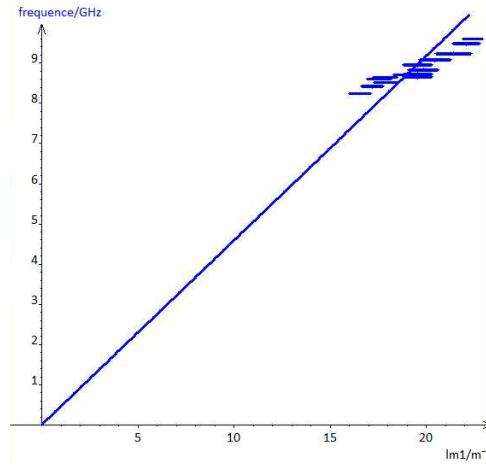
Expérience 4 :

Mesure de la fréquence : [Notice] On observe à l'oscilloscope la tension en un point de la ligne de mesure (si la tension est assez grande c'est mieux). On utilise alors l'ondemètre. Il s'agit d'un élément de guide d'onde où une cavité cylindrique est accolée. Lorsque l'on tourne la vis de l'ondemètre, un piston se déplace à l'intérieur de la cavité et change son volume, donc sa fréquence de résonance. À la résonance, on a une absorption maximale de l'énergie émise par l'oscillateur, on observe donc une chute de la tension au niveau de la ligne de mesure. On repère la position sur le vernier et on détermine la fréquence à l'aide d'une courbe d'étalonnage. La mesure effectuée, on ne laisse pas l'ondemètre sur sa résonance !

Mesure de la longueur d'onde : [Notice] On crée un court circuit (réflexion totale) en fermant le guide d'onde avec une plaque métallique. On crée donc une onde stationnaire de même longueur d'onde que l'onde initiale. Le déplacement de la sonde le long de la ligne de mesure permet de repérer les noeuds de l'onde et par conséquent la longueur d'onde.

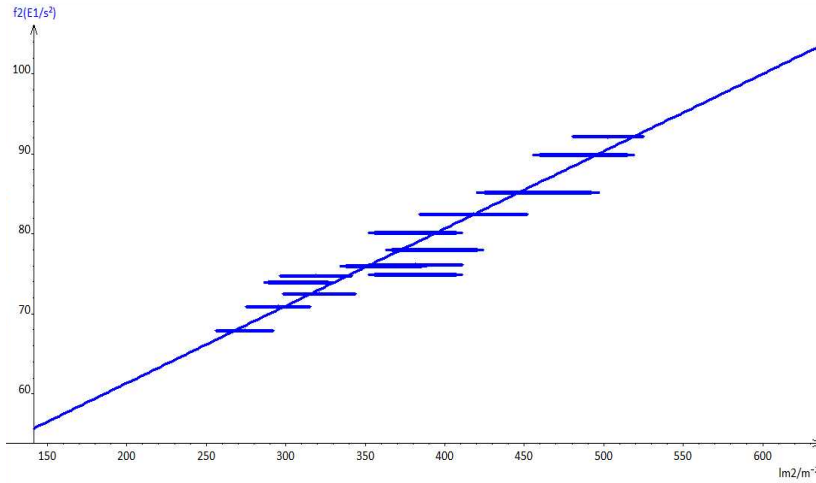
→ *Par rapport à l'expérience avec la corde de Melde pourquoi cette fois-ci l'onde stationnaire est-elle bien visible ?*

On trace la relation de dispersion $\omega = f(\lambda)$ et même si nos incertitudes sont grandes (± 10 MHz pour la fréquence, ± 2 mm pour la longueur d'onde) on a clairement pas la relation de dispersion de l'onde dans l'air $\lambda\nu = c$.



Remarque : Les sources d'incertitudes sont, pour la fréquence, l'imprécision de la lecture sur la courbe d'étalonnage et pour la longueur d'onde la détermination à l'oscilloscope des noeuds.

Théoriquement, on obtient que $f^2 = \frac{c^2}{\lambda^2} + \frac{c^2}{4a^2}$, avec a "le grand coté" du guide on le vérifie bien expérimentalement.²



Le coefficient directeur de la droite est égal à c^2 , il vaut $9.66 \pm 2 \cdot 10^{16} m^2.s^{-2}$ ce qui nous donne la vitesse de la propagation de l'onde $c = 3,1 \cdot 10^8 \pm \frac{\Delta(c^2)}{2c}$ soit $c = 3,1 \cdot 10^8 \pm 0.3 \cdot 10^8 m.s^{-1}$ à comparer à la vitesse de la lumière (on suppose l'indice de l'air égal à 1). L'ordonnée à l'origine $b = \frac{c^2}{4a^2}$ permet de remonter à la grande dimension du guide $a = 2.3 \text{ cm}$. Pour le calcul d'incertitude, la formule de propagation des erreurs donne $\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{2b}\right)^2}$. On a mesuré cette grandeur au pied à coulisse (données constructeur absente) on trouve $a = 2,30 \pm 0.005$.

2. Des modes TE et TM peuvent se propager au sein du guide d'onde, chaque mode présentant une pulsation de coupure $\nu_{cm,n} = \frac{v_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$ avec m et n deux entiers et v_0 la vitesse de la lumière. Un calcul d'ordre de grandeur montre que $\nu_{c1,0} \approx 6 \text{ GHz}$, $\nu_{c0,1} \approx 11 \text{ GHz}$ et $\nu_{c2,0} \approx 12 \text{ GHz}$, or la fréquence maximale délivrée par le banc est 9,6 GHz, la propagation est donc monomode.

Fait assez remarquable, le confinement de l'onde centimétrique rend le milieu dispersif. On observait d'ailleurs sur le câble coaxial (qui est aussi un guide d'onde) que le pic émis était déformé. Un guide permet donc de canaliser l'énergie et d'acheminer une onde d'un point à un autre, en contre partie le signal est déformé ce qui impose une limitation du débit.

3.3 Transmission en fin de ligne

Comment transmettre une onde qui a été guidée ? On considère à présent l'influence de l'embout placé en fin de guide.

3.3.1 Impédance et rapport d'onde stationnaire

Expérience 5 :

On considère dans un premier temps l'impédance de différents embouts. On la détermine via le **Rapport d'Onde Stationnaire** noté R.O.S.

Mesure du rapport d'onde stationnaire [Notice du banc]

Principe :

La tension E en n'importe quel point d'une ligne de transmission peut être considérée comme la somme $E_i + E_r$ des tensions des ondes incidentes et réfléchies en ce point. En certains points de la ligne, les deux ondes sont en phases et produisent des maxima de tension E_{max} , en d'autres points elles sont en opposition de phase et produisent des minima E_{min} .

Le R.O.S est défini par :
$$R.O.S = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{|E_i| + |E_r|}{|E_i| - |E_r|} = \frac{1 + \frac{|E_r|}{|E_i|}}{1 - \frac{|E_r|}{|E_i|}}$$

Le R.O.S s'exprime directement en fonction du module du coefficient de réflexion, il dépend donc des impédances de l'embout et du guide.

Réalisation pratique :

On utilise ici l'**atténuateur calibré**. Pour une fréquence fixée :

- On place la sonde sur un minimum de la tension et on règle l'atténuateur pour obtenir une tension à l'oscilloscope bien visible. Lorsqu'on tourne la vis de l'atténuateur une lame résistive, parallèle au petit côté du guide, est insérée plus ou moins profondément, ce qui crée l'atténuation. La lecture de la graduation sur le vernier et une courbe d'étalonnage permettent de déterminer cette atténuation. On obtient alors la valeur $A1$.
- On place ensuite la sonde sur un maximum et on règle l'atténuation pour obtenir la même tension que précédemment. On lit la valeur $A2$ de l'atténuation.

– $A2 - A1$ donne directement le R.O.S en décibel d'où
$$R.O.S = 10 \frac{A2 - A1}{20}$$

Le R.O.S obtenu pour une ouverture "brusque" donne $R.O.S = 3$. On effectue en direct la mesure pour le cornet, normalement on trouve $R.O.S \approx 1,3$.

On en déduit donc le module du coefficient de réflexion pour ces deux embouts $R =$

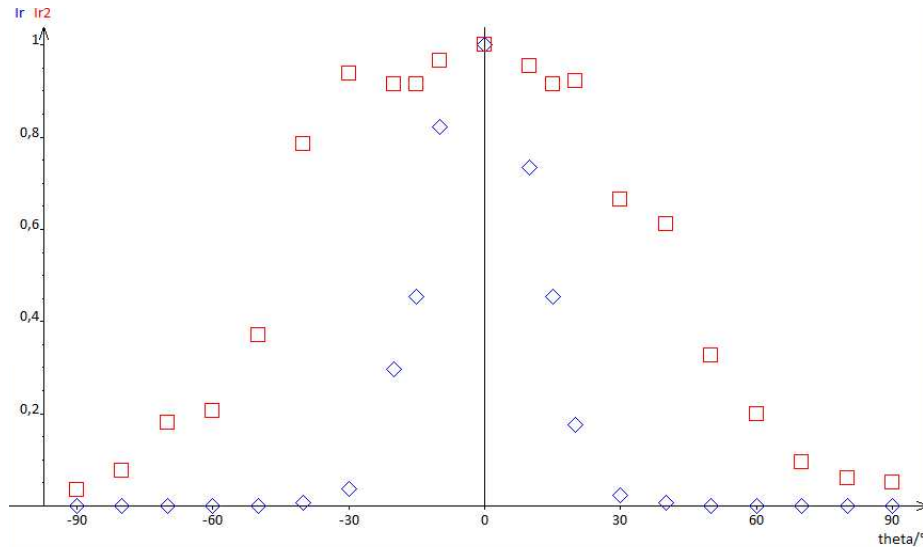
$\frac{R.O.S-1}{R.O.S+1}$ soit $R=0.5$ et $R=0.13$ respectivement.

Le cornet réalise donc une meilleure adaptation d'impédance (en s'élargissant progressivement) que l'ouverture "brusque".

3.3.2 Directivité du signal transmis : diagramme de rayonnement

Expérience 6 :

Une autre caractéristique de l'embout du guide est sa directivité. Pour la quantifier on effectue un diagramme de rayonnement représentant l'intensité relative perçue par un capteur en fonction de son angle par rapport à l'axe banc hyperfréquence. On considère de nouveaux une sortie libre et le cornet.



Le cornet présente une meilleure directivité du signal que l'ouverture "brusque" ainsi qu'une meilleure adaptation d'impédance, il est donc plus efficace dans la transmission du signal.

3.4 Conclusion

Dans ce montage on a montré que les conditions aux limites pouvaient posséder plusieurs rôles et qu'elles ont une grande importance sur la propagation d'une onde : la présence d'une interface peut ainsi entraîner la réflexion d'une onde, la canaliser rend la propagation dispersive même si le milieu ne l'est pas... Enfin il est important que le dispositif de sortie présente une impédance adaptée et une bonne directivité. D'autres phénomènes peuvent être induit par la présence de conditions aux limites, on pense en particulier à la diffraction et aux interférences.