

MP 32 : Ondes : Propagation et conditions aux limites

Paul de Fromont, Jean-Baptiste Flament

Prérequis	Bibliographie
Boarf.	Quaranta I & IV
	Notice du banc

Rapports de Jury :

[2010-11] L'existence de conditions aux limites permet aussi l'apparition de phénomènes de réflexion, réfraction, diffraction, interférence, propagation guidée... La notion d'impédance caractéristique n'est pas limitée au câble coaxial.

[2008] Il n'est pas interdit de penser à d'autres domaines que l'optique.

[2007] Titre Ondes et impédances : Ce montage met traditionnellement en difficulté les candidats qui ne savent pas trop comment aborder la notion d'impédance.

Table des matières

1	Propagation libre	2
1.1	Mise en évidence de la propagation	2
1.2	Une caractéristique de la propagation : mesure de la célérité	2
2	Influences des limites dans la direction de propagation	3
2.1	Câble coaxial et impédance	3
2.2	Onde stationnaire : corde de Melde	4
3	Propagation d'onde guidée : hyperfréquences	5
3.1	Rapport d'onde stationnaire	5
3.2	Propagation dans le vide : mesure de c	6
3.3	Propagation guidée : relation de dispersion	7

Introduction

De tout temps, les hommes se sont propagés.

Mais on voit très facilement que la lumière change de comportement quand elle change de milieu de propagation¹ : c'est ce qui nous permet de voir les choses, puisque la lumière, à l'interface entre deux milieux, est réfléchiée, diffusée, diffractée... Quelle est vraiment l'influence d'une interface sur la propagation d'une onde, et qu'est-ce qu'on peut en dégager : c'est ce que nous allons voir dans ce montage en mettant d'abord en évidence la propagation, avant de mettre une limite au milieu de propagation pour en voir les différents effets.

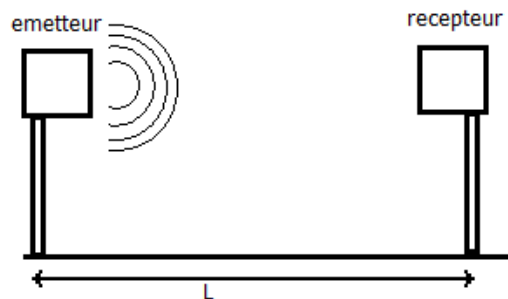


FIGURE 1 – Schéma de principe de notre belle expérience de propagation de son

1 Propagation libre

1.1 Mise en évidence de la propagation

La mise en évidence de la propagation non instantanée d'une information est quelque chose d'assez simple et d'assez courant. Eh oui. Dans notre cas, on s'intéresse à la propagation dans l'air d'une onde de pression dans l'air, que l'on considérera comme illimité.

On place un émetteur à une distance connue d'un récepteur, que l'on relie à un oscilloscope. L'émetteur émet des salves d'ultrasons, et on repère le déphasage entre le début du signal l'alimentant et celui délivré par le micro. On voit ainsi que le son met un certain temps, qui augmente lorsqu'on éloigne le micro de l'émetteur.

1.2 Une caractéristique de la propagation : mesure de la célérité

On peut prévoir à première vue de nos observations que le temps de propagation est proportionnel à la distance, et on se propose par cette manip de trouver le coefficient, qui est la vitesse de propagation. Waow.

On mesure le temps de propagation sur l'oscilloscope, alors qu'on éloigne le récepteur d'une distance connue de l'émetteur (distance corrigée par une erreur systématique mesurée lorsque les pieds des deux sont en contact). Les points obtenus s'alignent alors effectivement, et on obtient une vitesse de l'ordre de

1. Remarque, un homme rencontrant un mur change aussi de comportement

$$c = \pm m.s^{-1}$$

Cette valeur est à comparer avec la valeur tabulée

$$c_{tab} = 341 m.s^{-1} \text{ à } 20 \text{ C à } 1 \text{ atm} \quad (1)$$

2 Influences des limites dans la direction de propagation

On va maintenant essayer de voir ce qui se passe si on intercale un obstacle pour l'onde sur son parcours. L'onde (ou le paquet d'onde) est sensible à toute variation des propriétés du milieu qu'elle traverse vis à vis de sa propagation. La quantité à laquelle elle est sensible est l'impédance du milieu. Ainsi, un changement d'impédance entrainera une réflexion plus ou moins partielle au niveau de l'interface. On cherche alors soit à annuler complètement les réflexions (on parle alors d'adaptation d'impédance) soit à obtenir une réflexion totale pour avoir des ondes purement stationnaires et plus de propagation d'information.

2.1 Câble coaxial et impédance

Ici on envoie un signal² électrique dans un milieu (en l'occurrence un câble coaxial) et on observe un signal de retour, c'est à dire qu'une partie du signal est réfléchi au bout de la ligne.

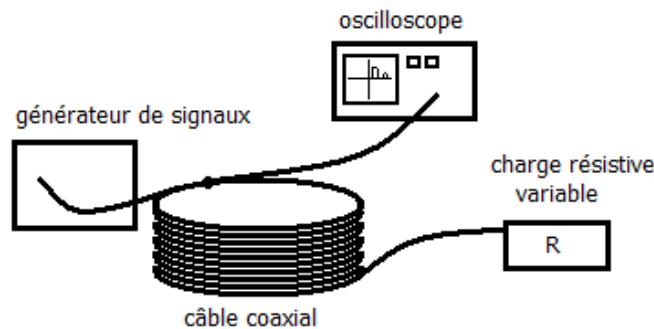


FIGURE 2 – Montage d'étude de la réflexion en bout du câble coaxial

Le but ici est de quantifier la réflexion en sortie du câble. On estime³ alors l'amplitude du signal réfléchi en mesurant l'amplitude $V = V_{max} + |V_{min}|$.

Le protocole est le suivant : on place une résistance variable R en sortie du câble coaxial et on évalue l'amplitude du signal réfléchi en fonction de R . Si on modélise l'impédance

2. Pas rigoureusement une onde mais un paquet d'ondes

3. On a donc bien une estimation et non pas une mesure. Si on voudrait être plus précis, il faudrait par exemple intégrer l'amplitude du signal réfléchi au carré, ce qui donnerait une mesure de l'énergie du signal réfléchi

du câble coaxial par $Z(\omega) = r + iZ_i(\omega)$ où r est la partie résistive et Z_i la partie complexe qui dépend de ω , alors l'expression théorique de l'amplitude réfléchie V_r est :

$$V_r = V_{in} \left| \frac{R - Z}{R + Z} \right| \quad (2)$$

On fit alors les résultats obtenus et on peut en déduire les deux paramètres r et $Z_i(\omega_c)$ où ω_c est la fréquence dominante du signal réfléchi. Il est à noter ici que la dépendance de Z_i en ω est faible, ce qui nous permet d'affirmer que la quantité $Z_{adapt} = |Z(\omega)|$ est une constante vis à vis de ω pour les signaux habituels.

On en tire alors :

$$\begin{aligned} - r &= \pm \Omega \\ - Z_i &= \pm \Omega \end{aligned}$$

On en déduit alors la valeur de l'impédance adaptée :

$$Z_{adapt} = \sqrt{r^2 + Z_i^2} = \pm \Omega \quad (3)$$

On va aussi en profiter pour caractériser la propagation du signal en mesurant sa vitesse de propagation c estimée à partir de la mesure du décalage de temps Δt entre un bout et l'autre du câble. On trouve

$$\Delta t = \pm \mu s \quad (4)$$

Et en utilisant $L = \pm m$ on peut en déduire c :

$$c = \pm m.s^{-1} \quad (5)$$

Cette valeur est à comparer avec la valeur théorique

$$c_{theo} = \sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}} = m.s^{-1} \quad (6)$$

2.2 Onde stationnaire : corde de Melde

On vient de voir ce qui se passe si on a une interface entre deux milieux dans le sens de la propagation. On a pour cela introduit la notion d'impédance du milieu vis à vis de l'onde. On va cette fois ci regarder ce qui se passe si on a une impédance de sortie nulle ou infinie, infinie dans notre cas, c'est à dire que la totalité de l'onde est réfléchi. On considère donc le montage de la corde de Melde, c'est à dire une corde tendue dont une des extrémités est fixée et l'autre est fixée à un vibreur. On observe alors des ondes stationnaires quelle que soit la fréquence d'excitation. Ce qui nous interesse c'est encore caractériser la propagation des ondes. On va donc mesurer $c = \lambda/f$ qui est la vite de propagation de l'onde sur la corde. Il est important de comprendre que bien qu'on ne voit pas d'onde se propager, le système d'ondes stationnaires observé est constitué d'une superposition d'ondes en mouvement à la même vitesse c . Pour mieux visualiser le phénomène on se place à la résonance de la corde, on mesure alors :

$$\lambda = \pm m \quad (7)$$

En utilisant $f = \pm \text{ Hz}$ on a

$$c_{mes} = \pm \text{ m.s}^{-1} \quad (8)$$

Cette valeur est à comparer avec la valeur théorique

$$c_{theo} = \sqrt{\frac{mg}{\rho_l}} \quad (9)$$

Où m est la masse du poids attaché à la corde et ρ_l est la densité linéique du fil, estimée par pesée à $\rho_l = \pm \text{ kg.m}^{-1}$. Soit :

$$c_{theo} = \pm \text{ m.s}^{-1} \quad (10)$$

Et on a estimé l'incertitude sur c_{theo} avec

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta \rho_l}{\rho_l} \right) = \% \quad (11)$$

3 Propagation d'onde guidée : hyperfréquences

On s'intéresse ici au cas d'ondes électromagnétiques de longueur d'onde de l'ordre de 3 cm confinées dans une cavité par des parois conductrices planes. Il est intéressant de voir que les limites ayant un effet intéressant sur la propagation de l'onde dans la cavité sont celles dans la direction orthogonale à la propagation. On peut voir que bien que le milieu soit de l'air (équivalent à du vide pour des ondes électromagnétiques), les propriétés de sa propagation sont alors assez différentes. Ces conditions aux limites imposent que l'on a dans la cavité des modes de propagation théoriquement quantifiés. Le banc que l'on utilise ici nous permet de travailler dans une plage de fréquence dans laquelle, étant données les dimensions de la cavité, un seul mode peut se propager.

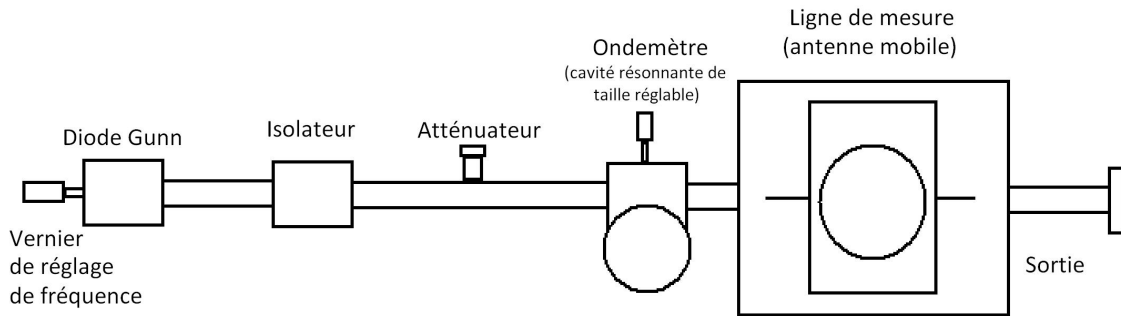


FIGURE 3 – Schéma de composition du banc hyperfréquence

	V_{min}	V_{max}	Γ
Plaque de métal			
Ouvert			
Cornet			
Cornet bouché			
Plaque trouée			
Charge adaptée			
Plaque de verre			

3.1 Rapport d'onde stationnaire

On s'intéresse dans un premier temps à l'amplitude de l'onde électromagnétique dans la cavité. Celle-ci est mesurée à l'aide d'une antenne plongée dans le guide, qui nous permet de sonder le champ en un point de la cavité. Si une onde est stationnaire dans le guide, son amplitude sera constante en fonction du temps, mais ne sera pas la même selon les points du guide, alors qu'une onde non stationnaire (donc se propageant) changera de valeur, et son amplitude, variant de la même manière en tout point, donnera une moyenne temporelle constante en fonction de la position. L'antenne étant suivie d'un détecteur de crête (donnant donc l'amplitude du champ), elle donne en sortie la somme de l'amplitude de l'onde se propageant et de celle de l'onde stationnaire. Ainsi, le rapport d'onde stationnaire est défini comme le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur celle de l'onde incidente.

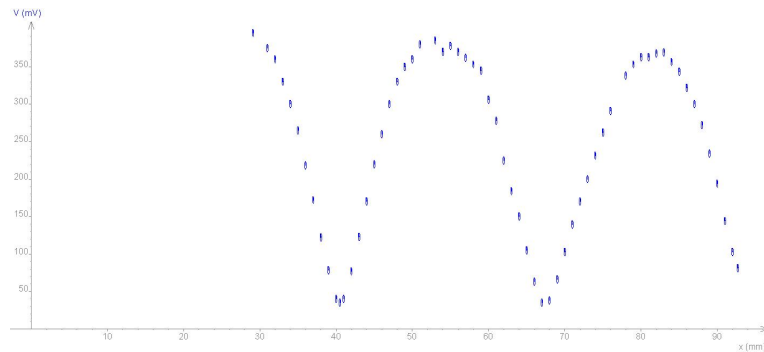


FIGURE 4 – Profil de l'amplitude de l'onde dans la cavité en fonction de la position, à une fréquence donnée. Le fort rapport d'onde stationnaire laisse penser que la cavité était fermée par une plaque.

La formule le donnant est alors :

$$\Gamma = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}} = \frac{S - 1}{S + 1} \quad \text{si} \quad S = \frac{V_{max}}{V_{min}}$$

On mesure ce taux pour différentes conditions aux limites de sortie, (impliquant des taux de réflexion différents) :

On remarque d'une part que le cornet a été conçu pour que la charge soit la plus adaptée possible, tandis qu'une ouverture brusque produit une quantité relativement importante d'onde stationnaire. Le cornet permet donc une transmission quasi totale de l'onde produite par la diode, contrairement à une ouverture brusque

3.2 Propagation dans le vide : mesure de c

Dans cette partie, on s'intéresse au guide suivi d'un cornet, permettant d'émettre nos ondes de fréquence de l'ordre du GHz dans l'air, en transmettant une grande partie de l'énergie. On peut ainsi étudier leur propagation dans l'air, assimilable à du vide (du moins pour l'onde électromagnétique). De même que pour les ondes acoustiques, on peut voir qu'elles se propagent, et on peut à l'aide d'un interféromètre de Fabry Perot constitué de plaques de verres mesurer l'intensité de l'onde transmise, et en déduire sa longueur d'onde dans le vide.

En pratique, l'éloignement des deux plaques de verre est contrôlé par un moteur qui éloigne à vitesse réduite et constante les deux plaques. Cela permet, en observant l'amplitude du signal transmis sur un oscilloscope, de connaître la variation de distance entre les plaques en fonction de l'écart de temps. En mesurant le temps mis par le moteur à déplacer la plaque sur plusieurs longueurs d'onde, on peut remonter à celle-ci.

On mesure pour plusieurs fréquences cette longueur d'onde, et on obtient une droite, qui nous permet de déterminer la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, indépendante de la fréquence :

$$c_{lum} = \pm \quad m.s^{-1} \quad (12)$$

Cette méthode de détermination n'est bien sûr pas la plus précise ou la mieux pensée, mais elle nous permettra de voir avec la manip suivante la différence avec l'intérieur du guide.

3.3 Propagation guidée : relation de dispersion

On s'intéresse maintenant à la propagation à l'intérieur du guide. La fréquence étant bien trop grande, il n'est pas envisageable de mesurer la longueur d'onde d'une onde se propageant. C'est là qu'interviennent les ondes stationnaires, qui nous permettent d'accéder à la longueur d'onde par des grandeurs ne dépendant pas du temps, donc facilement utilisables/mesurables expérimentalement, et on trace une nouvelle fois la longueur d'onde en fonction de la fréquence. On ne trouve plus ici une droite, montrant que la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde : le guide est dispersif.

Théoriquement, si le guide a des dimensions transversales a et b avec $a > b$ on peut écrire pour le premier mode la longueur d'onde dans le guide comme :

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \quad (13)$$

ou une relation de dispersion :

$$f^2 = \frac{c^2}{\lambda^2} + f_g^2 \text{ avec } f_g = \frac{c}{2a} \quad (14)$$

On comprend d'ailleurs pourquoi la première longueur d'onde à pouvoir se propager correspond à la dimension transversale du guide la plus grande : on a $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, donc la première pulsation pour laquelle un tel mode peut se propager est plus grande.

D'après le constructeur, on a $a = 22,86 \text{ mm}$, $b = 10,16 \text{ mm}$.

A l'aide d'un ajustement du modèle aux données, on peut de nouveau remonter à la vitesse de la lumière dans le vide c , mais également avec l'ordonnée à l'origine à la fréquence caractéristique de ce mode du guide, donc à sa dimension, et on trouve :

$$a_{exp} = \quad \quad \quad mm \quad (15)$$

Conclusion

Les conditions aux limites sont fondamentales dans l'étude d'un problème puisqu'elles peuvent changer du tout au tout le comportement d'une onde, et sont inévitables puisqu'omniprésentes. Et comme l'a bien dit Arnaud l'an dernier, meubler.