II TP 2 : Guide d'onde rectangulaire.

II.1 Rappels sur la propagation dans un guide d'onde rectangulaire

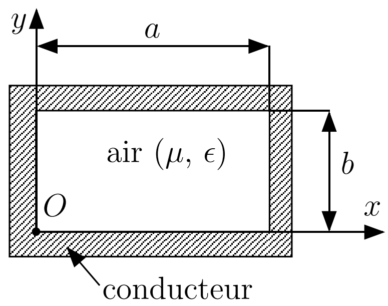


FIG. 3 – Section du guide d'ondes.

Le guide d'ondes rectangulaire est une structure de guidage à un conducteur en forme de tube creux de section rectangulaire ($a > b$, $a = (22,86 \pm 0,04)$ mm pour les guides en TP). Les ondes se propagent suivant l'axe Oz perpendiculaire à la figure.

Modes électromagnétiques

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, décrivant le champs électromagnétique, satisfont les équations de Maxwell et les conditions aux limites sur la surface du conducteur (supposé parfait, $\vec{E}$ est normal aux parois et $\vec{H}$ est tangent aux parois). On rappelle que dans un guide d'onde (rectangulaire) seuls certains types d'ondes monochromatiques peuvent se propager : on les appelle des modes.
Les modes possibles sont dénommés (selon leurs orientations par rapport aux parois) :

- $\mathbf{TE}_{mn}$ (transversal électrique), où m, $n = 0, 1, 2, \ldots$sont des entiers positifs ou nuls, le cas $m = n = 0$ étant exclu.
- $\mathbf{TM}_{mn}$ (transversal magnétique), où m, $n = 1, 2, 3, \ldots$sont des entiers strictement positifs.

La résolution des équations de Maxwell (en tenant compte des conditions aux limites) aboutit à l'équation suivante, reliant le vecteur d'onde, la pulsation et les paramètres géométriques du guide :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{3}$$

où m et n sont des entiers relatifs au mode considéré. Pour qu'il y ait propagation, le vecteur d'onde k doit être réel et donc : $k^2 \geq 0$ (rappelons que si $k^2 < 0$, le vecteur d'onde est imaginaire et on a absorption de l'onde : c'est une onde évanescente). Cette condition impose que la pulsation ω de l'onde (associée à la fréquence ν) soit plus grande que la pulsation de coupure ω_c (associée à la fréquence de coupure ν_c) :

$$\omega \geq c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega_c \tag{4}$$

L'équation 3, qui peut se réécrire selon la première équation suivante, permet de définir la longueur d'onde dans le guide : $\lambda_g = \frac{2\pi}{k}$:

$$k = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{5}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}} \tag{6}$$

(en n'oubliant pas que le vecteur d'onde dans le vide s'exprime en fonction de la longueur d'onde dans le vide : $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$). On peut donc en déduire la vitesse de phase du mode considéré (relation de dispersion du guide) :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{k^2}} \tag{7}$$

Cette vitesse de phase dépend du vecteur d'onde : le milieu est dispersif (ce qui peut se voir aussi à l'aide de l'équation 6). On se propose, dans ce TP, de déterminer expérimentalement les variations de la vitesse de phase ainsi que la fréquence en fonction du vecteur d'onde (relation de dispersion).
Dans le cas particulier où $a = 2b = 22,86 \pm 0,04$ mm, déterminer les expressions des fréquences de coupure et des longueurs d'onde associées (dans le vide) en fonction de a pour les modes suivants (on donne le couple (m,n)) : 01 ; 10 et 11.
A quelles conditions sur la longueur d'onde (on donnera également ces conditions sur la fréquence) a-t-on propagation uniquement du mode 10 ?
Sachant que la fréquence d'émission de la diode Gunn varie entre 8.5 et 11 GHz, conclure sur les conditions précédente (on fera bien attention à donner les incertitudes).
Les champs du mode $\mathbf{TE}_{10}$ se propageant vers les z croissant peuvent se mettre sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} E_x &=& 0 \\ E_y &=& -i\dfrac{\omega a\mu}{\pi} H_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - ikz} \\ E_z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} H_x &=& i\dfrac{ka}{\pi} H_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - ikz} \\ H_y &=& 0 \\ H_z &=& H_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - ikz} \end{array}\right. \tag{8}$$

La longueur d'onde de ce mode dans le guide est caractérisée par l'équation :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_g} = \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}}} \tag{9}$$

Notion de coefficient de réflexion

Le rapport $Z_0 = -\dfrac{E}{H} = \dfrac{\omega\mu}{k}$ des composantes transversales E_y et H_x du champ est l'impédance caractéristique du guide (unité : ohm). L'onde dans le guide est en général la superposition d'une onde incidente (E_i, H_i) et d'une onde réfléchie en bout de ligne [1] (E_r, H_r). Le champ total peut se mettre sous la forme suivante (en posant $\alpha = -i\dfrac{\omega a\mu}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{i\omega t}$) :

$$\begin{array}{rcl} E_y &=& \underbrace{\alpha H_0 e^{-ikz}}_{\text{onde incidente} E_i} + \underbrace{\alpha H_0 \Gamma_0 e^{ikz}}_{\text{onde réfléchie} E_r} \\ H_x &=& -\dfrac{\alpha H_0}{Z_0}\left(e^{-ikz} - \Gamma_0 e^{ikz}\right). \end{array} \tag{10}$$

[1] suivant le dispositif, l'onde se réfléchit plus ou moins

où $\Gamma_0 = |\Gamma_0| e^{i\theta}$ est le coefficient de réflexion en $z = 0$ (on prend la référence en bout de ligne).

Ondes stationnaires, mesure de λ_g et $|\Gamma|$

L'amplitude du champ électrique E_y (équation 10), pour z variable, est maximale aux points où les ondes incidentes et réfléchies sont en phase (sans oublier la phase θ du coefficient de réflexion). Cela a lieu pour $\theta + 2kz \equiv 0 \bmod 2\pi$ ou encore pour :

$$\theta \equiv -\frac{4\pi z}{\lambda_g} \bmod 2\pi \qquad \text{soit} \qquad z_p = -\lambda_g \frac{\theta}{4\pi} + p\frac{\lambda_g}{2} \qquad \text{(position des ventres),} \tag{11}$$

où p est un entier. L'amplitude vaut alors $E_{y\max} = \alpha H_0 \left(1 + |\Gamma_0|\right)$.
L'amplitude de E_y est minimale aux points où les ondes incidentes et réfléchies sont en opposition de phase. Cela a lieu pour

$$\theta \equiv \pi - \frac{4\pi z}{\lambda_g} \bmod 2\pi \qquad \text{soit} \qquad z_q = -\lambda_g \frac{\theta}{4\pi} + \frac{\lambda_g}{4} + q\frac{\lambda_g}{2} \qquad \text{(position des nœuds),} \tag{12}$$

où q est un entier. L'amplitude vaut alors $E_{y\min} = \alpha H_0 \left(1 - |\Gamma_0|\right)$. On a supposé que $|\Gamma| \leq 1$, ce qui est le cas lorsque on n'utilise que des charges passives comme en TP.

Remarque : Un isolateur placé après l'émetteur absorbe l'onde réfléchie. Sans lui, la position des nœuds et des ventres serait de plus fixée par la réflexion sur l'émetteur et l'onde dans le guide ne serait notable que pour certaines fréquences (phénomène de résonance).
Les équations 11 et 12 permettent de déduire l'écart $\Delta\lambda$ séparant deux noeuds ou deux ventres : $\Delta\lambda = \frac{\lambda_g}{2}$. En repérant la position des noeuds et des ventres, on peut donc en déduire la longueur d'onde dans le guide. En outre, la variation de l'amplitude du champ nous permet d'en déduire le module du coefficient de réflexion.
Remarques :

- La mesure des positions des nœuds et des ventres donne λ_g, qui bien sûr ne dépend pas de la charge mais seulement de la fréquence d'émission.
- Le taux d'ondes stationnaires est le rapport des amplitudes maximum et minimum $\tau = \dfrac{E_{y\max}}{E_{y\min}} = \dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$. En TP, on fait l'hypothèse que le cristal détecteur fonctionne en régime quadratique (la tension lue à l'oscillo est proportionnelle au carré du champ). On obtient alors $\tau = \sqrt{\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}}$ en mesurant les tensions aux bornes du cristal en un ventre $V_{\max}$ et en un nœud $V_{\min}$. On en déduit ensuite
$$|\Gamma| = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}. \tag{13}$$

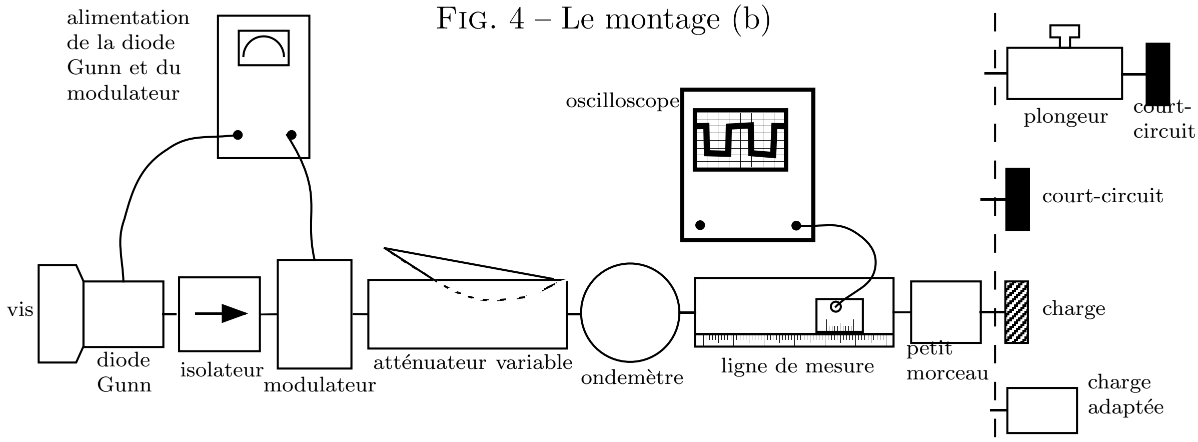
Exemple de charges

Court-circuit Lorsque la charge est une plaque de métal, le champ E_y total est nul en $z = 0$ (le champ est nul dans un métal) et $\Gamma_0 = -1$ ($|\Gamma| = 1$, $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$). On dit que la plaque joue le rôle d'un court-circuit.

Charge adaptée Soit une charge qui absorbe tout le rayonnement incident. Il n'y a donc pas de champ réfléchi : $\Gamma_0 = 0$. De telles charges sont réalisée à l'aide d'isolants.

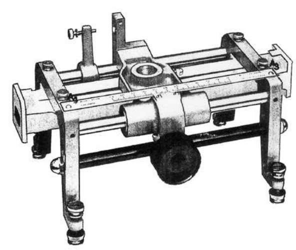
II.2 Description du matériel

FIG. 4 – Le montage (b)

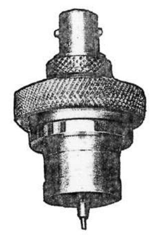


La partie émettrice, l'atténuateur variable et l'ondemètre

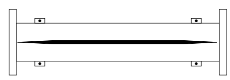
Partie émettrice



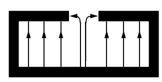
Ligne de mesure



Sonde



Ligne à fente



Lignes du champ électrique

On se réfèrera à la page 8 pour comprendre le fonctionnement des éléments de la chaine de montage.

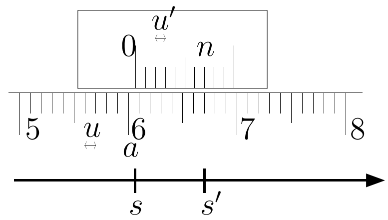
La ligne de mesure

La ligne de mesure est un système détecteur d'ondes stationnaires. Le problème consiste à connaître une grandeur proportionnelle au champ électrique régnant dans le guide. Pratiquenent, dans le cas du guide d'onde, on réalise dans la paroi extérieure de la ligne une fente étroite et par cette fente est introduite une très fine et courte antenne. Cette dernière, appelée sonde recueille une très faible partie de l'énergie, proportionnelle en grandeur au carré du champ électrique qui règne à l'endroit où elle se trouve.

La fente doit être longitudinale et ne doit pas couper les lignes de courant pour ne pas trop perturber l'onde ; cela impose, pour le guide propageant le mode $\mathbf{TE}_{10}$, que la fente soit rigoureusement dans l'axe du grand côté (Fig. Ligne à fente). En toute rigueur, il y a des lignes de courant coupées et génération de modes spéciaux (Fig. Lignes du champ électrique).

Le cristal détecteur, relié à l'antenne, est constitué d'un petit morceau de semi-conducteur (silicium mais aussi germanium) sur lequel est posé un fil fin de tungstène appelé moustache de chat. La tension aux bornes du cristal détecteur est, dans notre cas, proportionnelle à la puissance moyenne et donc au carré de l'amplitude du champ électrique $\vec{E}$. La lecture de la tension délivrée se fait sur un oscilloscope.

Vernier (mesure de la position de la sonde). Un chariot porte la sonde et une règle mobile divisée en 10 intervalles de longueur $u' = 0,9$ mm. La longueur des intervalles de la règle fixe est $u = 1$ mm. Pour mesurer l'abscisse s du point 0 du chariot, on cherche le trait n de la règle mobile aligné avec un trait de la règle fixe ($n = 7$ sur la figure). L'abscisse de ce trait est $s' = a + nu = s + nu'$ où a est l'abscisse du trait de la règle fixe juste à gauche de s. On en déduit $s = a + n(u - u') = a + n \times 0,1$ mm ($s = 60,7$ mm pour la figure).



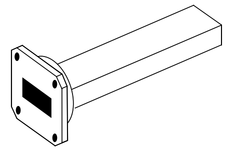
L'extremité et les charges

L'extrémité du guide sera laissé ouverte ou fermée par une **charge** (une plaque métallique, une plaque en plexiglas ou en bakélite, un fil de soudure, une charge adaptée et un cornet émetteur).

La charge adaptée

Cette charge porte aussi les noms d'*itérative* ou *caractéristique.* Par définition, elle ne produit pas d'onde réfléchie. On a alors $\Gamma = 0$. On dit qu'il y a *adaptation d'impédance.*

Observer l'intérieur : une lame dont le profil ressemble à celui de l'atténuateur variable y est montée. Cette pièce est taillée en forme de coin et absorbe progressivement l'énergie incidente. Le matériau qui la constitue peut être n'importe quel mauvais isolant : bois, mélange de poudre de fer avec un liant tel que la paraffine ou l'araldite.



II.3 Manipulations à effectuer

Avertissements

– On rappelle que tous les résultats numériques doivent être accompagnés de leurs incertitudes. La demande "Donner "incertitude" est donc toujours sous-entendue.

- Avant de mettre sous tension l'alimentation de la diode Gunn, placer le potentiomètre de réglage à 0. Cela permet de porter progressivement la tension de la diode de 0 à 8 V (ou 6 V) en évitant des surtensions néfastes pour la diode.
- On veillera à régler la puissance émise (agir sur l'atténuateur réglable) de façon à **ne pas dépasser 40 mV sur l'oscilloscope pendant toutes les manipulations** (pour éviter la saturation et la détérioration du cristal détecteur).

Mesure de la longueur d'onde λ_0

Placer en bout de ligne une plaque métallique. Pour plusieurs fréquences (à déterminer à chaque fois avec précision à l'aide de l'ondemètre) déterminer la longueur d'onde dans le guide (en déplaçant le cristal détecteur), le vecteur d'onde et la pulsation.
En déduire la vitesse de phase. Représenter sur un graphique l'évolution de la vitesse de phase et de la fréquence en fonction du vecteur d'onde.
Commenter.

Etude du coefficient de réflexion

A l'aide de la première partie, on déterminera pour une fréquence donnée (à préciser) le module du coefficient de réflexion pour les charges suivantes :

1. **Plaque métallique** (court-circuit).
2. **Charge adaptée.**
3. **Extrémité libre** (absence d'obstacle).
4. **Cornet émetteur.**
5. **Plaque en bakélite** ou en plexiglas.
6. **Extrémité partiellement obturée** (placer la plaque portant le fil à l'extrémité de la ligne, le fil étant vertical et parallèle au champ.)

On commentera les résultats trouvés, en les comparant à ceux attendus.