

MP34 - Résonance.

Table des matières

Introduction	2
1 Résonance électrique : circuit RLC série	2
2 Résonance mécanique : corde de Melde	5
3 Résonance acoustique : résonateurs de Helmholtz	7
Conclusion	9
Remarques diverses	9

Bibliographie¹

- Duffait, Électronique
- Acoustique
- Quaranta, Mécanique
- Quaranta, Électronique et applications
- Krob, Électronique expérimentale
- Feynman, Mécanique 1
- Dictionnaire de physique² (Taillet, Villain, Febvre)

¹La bibliographie est reprise à la fin du document avec les références complètes pour chaque ouvrage.

²Cet ouvrage sera acheté lors de la prochaine commande de livres pour la BU Agreg.

Introduction

Balançoire

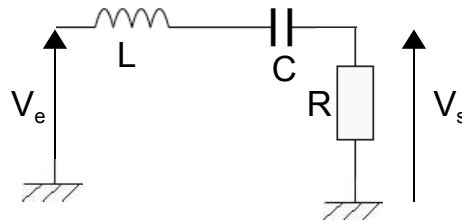
Diapason [Quaranta Mécanique]

Résonance : phénomène très général en physique, par lequel l'excitation d'un système oscillant à une fréquence ω proche de l'une de ses fréquences propres ω_0 provoque une réponse de très forte amplitude (définition tirée de [Dictionnaire de physique]).

1 Résonance électrique : circuit RLC série

[Quaranta Électronique, Duffait]

On étudie la résonance en intensité, c'est-à-dire la résonance aux bornes de la résistance.



La résistance R est une résistance variable.

La fonction de transfert de ce montage s'écrit : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R_{\text{tot}} + j(L\omega + 1/C\omega)}$

La résistance R_{tot} doit comprendre la valeur de la résistance variable R et la valeur de la résistance de la bobine r qui peut ne pas être négligeable si on choisit R suffisamment petite : $R_{\text{tot}} = R + r^3$.

La fréquence de résonance en intensité est la fréquence propre du système $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Pour le montage on a choisit les valeurs suivantes :

- $L = 100 \pm 6 \text{ mH}$
- $C = 0,100 \pm 0.001 \mu\text{F}$

$$\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta C}{C} \right) = \frac{1}{2} (6\% + 1\%) = 3,5\%$$

d'où $f_0^{\text{th}} = 1590 \pm 45 \text{ Hz}$

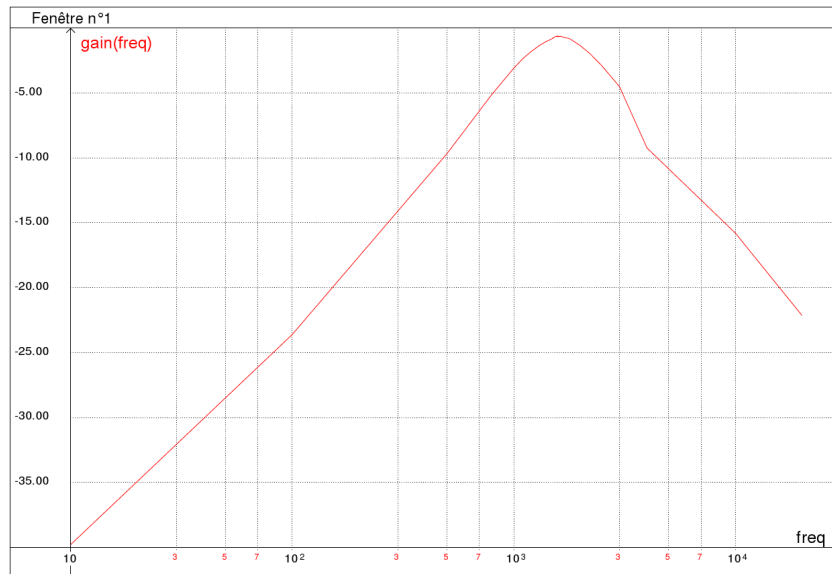
³Il faudrait également prendre en compte la résistance de sortie (typiquement 50Ω) du générateur dans R_{tot} . On peut cependant s'en affranchir par exemple en réglant à chaque mesure l'amplitude de la tension de sortie du générateur de façon à la maintenir constante quelle que soit la fréquence (c'est la méthode que nous avons appliquée) ou en annulant la résistance de sortie en ajout un montage suiveur (il faut alors faire en sorte que, pour toute fréquence, l'intensité du courant de sortie de l'AO ne dépassera pas la valeur maximum de 20 mA typiquement).

Le facteur de qualité⁴ est défini par : $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{L\omega_0}{R}$

$$\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)_{\text{th}} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = 1\% + 1\% + 6\% = 8\%$$

1^{er} cas : $R = 1000 \Omega$

$$Q_{\text{th}} = 1,00 \pm 0,08$$



Tracé du gain en fonction de la fréquence (en Hz) pour $R = 200 \Omega$.

$f_{\text{exp}} = 1583 \pm 2 \text{ Hz}$. Pour mesurer précisément la fréquence de coupure avec l'oscilloscope, on passe en mode XY : en effet, à la résonance, les tensions V_e et V_s sont en phase et on a donc une droite à l'écran ce qui est plus facile à déterminer avec précision que le maximum d'amplitude de V_s .

On trace le diagramme de Bode du circuit et on détermine sur celui-ci les fréquences de coupure à -3 dB :

$$f_1 = 948 \pm 10 \text{ Hz} \quad f_2 = 2740 \pm 10 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = 1790 \pm 20 \text{ Hz}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{\Delta(\Delta f)}{\Delta f} = \frac{2}{1583} + \frac{20}{1790} = 1,2\%$$

$$Q_{\text{exp}} = \frac{1583}{1792} = 0,89 \pm 0,01$$

⁴À propos du facteur de qualité, on pourra consulter l'article du BUP intitulé "Le coefficient de qualité et ses interprétations" de J.-P. Valentin (BUP n°628, novembre 1980, p.163-177).

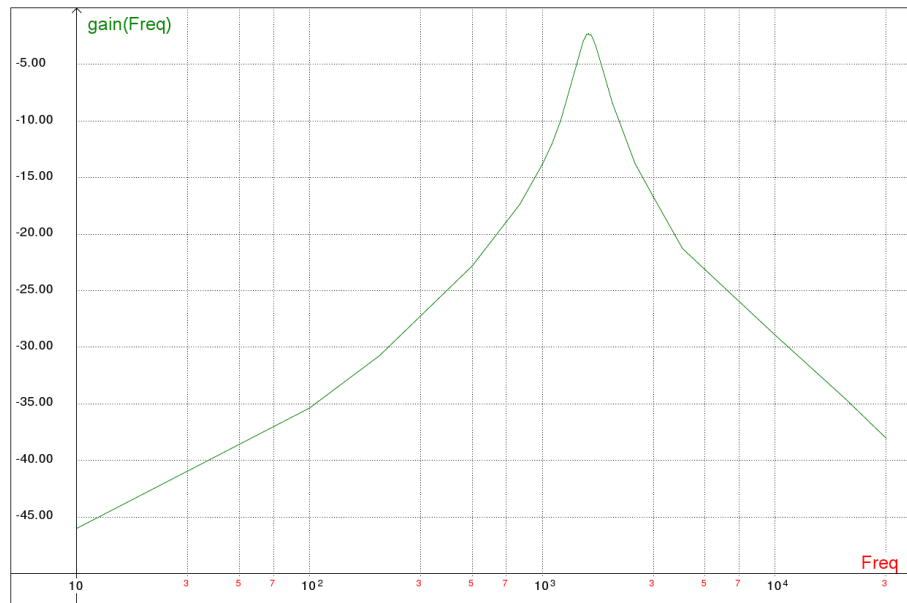
La valeur de Q_{exp} n'entre pas dans l'intervalle de Q_{th} . Cependant, nous n'avons pas pris en compte la résistance la bobine $r = 33 \Omega$ à basse fréquence. En la prenant en compte, on obtient : $Q_{\text{th}} = 0,97 \pm 0,08$.

2^e cas : $R = 200 \Omega$

$$Q_{\text{th}} = 5,00 \pm 0,34$$

Mais il faut tenir compte de la résistance r de la bobine qui n'est pas négligeable devant R . Dans ce cas on obtient :

$$Q_{\text{th}} = 4,28 \pm 0,34$$



Tracé du gain en fonction de la fréquence (en Hz) pour $R = 200 \Omega$.

La fréquence de résonance est toujours la même car elle ne dépend pas de la résistance.

$$f_1 = 1390 \pm 10 \text{ Hz} \quad f_2 = 1810 \pm 10 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = 420 \pm 20 \text{ Hz}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{\Delta(\Delta f)}{\Delta f} = \frac{2}{1583} + \frac{20}{420} = 4,9 \%$$

$$Q_{\text{exp}} = \frac{1583}{420} = 3.77 \pm 0,18$$

Dans les 2 cas, on trouve un facteur de qualité qui se trouve juste en limite inférieure de la gamme d'incertitude sur Q . Cela peut s'expliquer par le fait que la résistance d'une bobine augmente avec la fréquence (cf. par exemple [Krob], chapitre 8, p.215).

Influence dans le domaine temporel

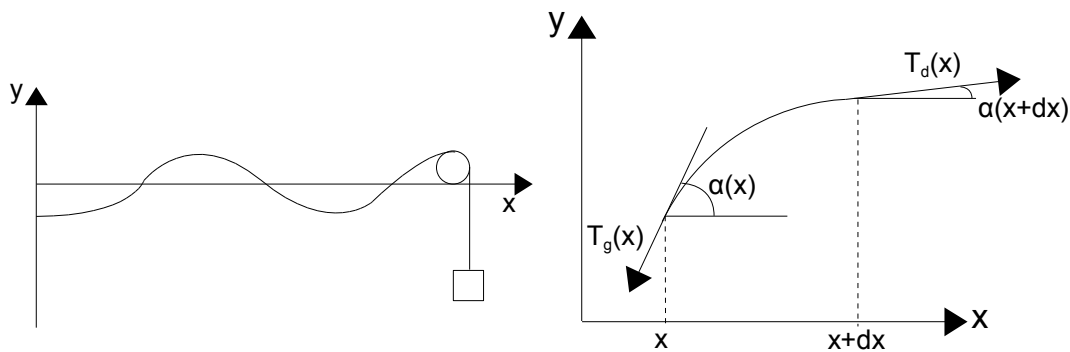
Si on envoie une impulsion (ou un signal créneau basse fréquence) pour exciter le système, il va osciller et les oscillations vont s'amortir d'autant plus vite que le facteur de qualité est faible⁵. Pour un facteur de qualité inférieur ou égal à $1/2$, le système évolue sans osciller.

La résonance en tension (ou en position) ne s'effectue pas à la fréquence propre du système mais à la fréquence $f = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Transition : on s'est intéressé à un système avec une seule fréquence de résonance. On va maintenant considérer un système avec des résonances multiples.

2 Résonance mécanique : corde de Melde

[Quaranta Mécanique]



Hypothèses :

- on considère une corde inextensible de masse linéique μ
- la poulie est parfaite, c'est-à-dire que la tension de la corde est constante et est égale au poids de la masse M : Mg
- l'excitation à l'extrémité gauche de la corde se fait verticalement
- le poids de la corde est négligée devant le poids de la masse accrochée à son extrémité (la corde est horizontale au repos)
- pas de dissipation d'énergie

L'élément de corde situé à $(x, 0)$ à l'équilibre se trouve à $(x, y(x, t))$ hors équilibre : on néglige le déplacement selon Ox .

L'angle $\alpha(x, t)$ est un infiniment petit : $\cos \alpha \approx 1$ et $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$.

$T_g(x) = -T_d(x)$ (principe des actions réciproques)

⁵Le signal est un signal sinusoïdal de fréquence $\frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ qui s'inscrit dans une enveloppe exponentielle dont le temps de décroissance τ vaut $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

On note s l'abscisse curviligne. Le PFD pour l'élément de masse $dm = \mu ds \approx \mu dx$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y &= \vec{T}_g(x, t) + \vec{T}_d(x + dx, t) \\ &= -\vec{T}_d(x, t) + \vec{T}_d(x + dx, t)\end{aligned}$$

On pose $||\vec{T}_d|| = T$ et on projette sur les 2 axes :

$$Ox \quad 0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t)$$

$$Oy \quad \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \sin \alpha(x, t)$$

À l'ordre 1, on obtient :

$$Ox \quad 0 = T(x + dx, t) - T(x, t)$$

$$Oy \quad \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \alpha(x, t)$$

L'équation selon Ox donne $T(x, t) = T(t)$ et on a $T(t) = Mg$. Un développement de Taylor à l'ordre 1 de la seconde équation donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Mg(\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)) = Mg \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

or $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ d'où

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$$

Dans l'expérience effectuée, on a :

- pour la corde, $l = 1,100 \pm 0,001$ m et $m = 0,7450 \pm 5 \cdot 10^{-4}$ g d'où $\mu = 0,677$ g m⁻¹
- $L = 82,0 \pm 0,5$ cm (longueur utile de la corde)
- pour la masse, $M = 301,9 \pm 0,1$ g

Les fréquences propres de la corde sont :

$$f_k = k \frac{c}{2L} = k \sqrt{\frac{Mg}{\mu}} \frac{1}{2L} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{f} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta l}{l} \right) + \frac{\Delta L}{L} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,745} + \frac{0,1}{301,9} + \frac{1}{1100} \right) + \frac{0,5}{82} = 0,007\end{aligned}$$

$$f_1 = 40,3 \pm 0,3 \text{ Hz}$$

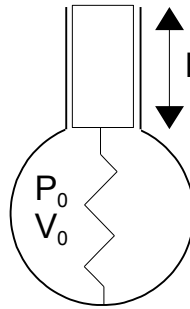
On mesure $f_1^{\text{exp}} = 40,5 \pm 0,2$ Hz

On peut vérifier que les différentes fréquences de résonance successives sont régulièrement espacées.

3 Résonance acoustique : résonateurs de Helmholtz

[Acoustique], p.16-19

On pourra également consulter l'article intitulé "Un archétype d'oscillateur : le résonateur acoustique de Helmholtz" dans le BUP n°845 de juin 2002, p.1055.



On introduit les valeurs suivantes :

- P_0 la pression statique dans le résonateur
- V_0 le volume du résonateur
- l la longueur du col
- m la masse d'air contenu dans le col
- s la section du col et d son diamètre ($s = \pi(d/2)^2$)
- ρ_0 la masse volumique de l'air à P_0 et à la température ambiante

Hypothèse : on se place dans l'approximation basse fréquence (longueur d'onde grande devant les dimensions du système).

On peut montrer que l'énergie cinétique est localisée dans le col et l'énergie potentielle est localisée dans le résonateur.

Dans ces conditions, on peut admettre qu'il se comporte comme un circuit masse-ressort dans lequel la masse est celle du fluide contenu dans le goulot et le ressort équivaut à la compression de l'air contenu dans le résonateur.

La force de rappel $s\Delta P$ due à la compression (ou à la dépression) de l'air est donnée par l'équation de variation adiabatique d'état du fluide : $PV^\gamma = \text{cste}$.

En effectuant la dérivée logarithmique, on obtient :

$$\frac{dP}{P_0} + \gamma \frac{dV}{V_0} = 0$$

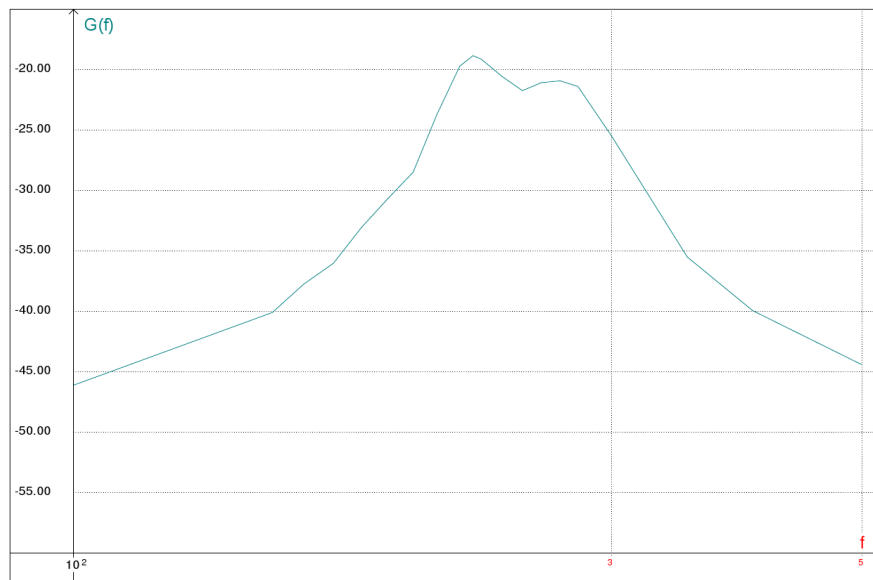
L'équation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse $\rho_0 l x$ s'écrit :

$$\rho_0 l s \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma P_0 s^2}{V_0} x = 0$$

La pulsation propre du système s'écrit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0 s}{\rho_0 l V_0}}$.

Données :

- $\gamma = 1,4$ (on considère l'air comme un gaz diatomique)
- $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$ (dans les conditions normales de température (0°C) et de pression)
- $l = 1,7 \pm 0,2 \text{ cm}$
- $d = 3,1 \pm 0,2 \text{ cm}$
- $V_0 = 1100 \pm 10 \text{ cm}^3$ (on mesure le volume du résonateur en le remplissant d'eau.)



La pulsation propre du résonateur vaut : $\omega_0 = 2104 \pm 275 \text{ rad s}^{-1}$ soit une fréquence propre $f_0 = 335 \pm 44 \text{ Hz}$.

Afin de mesurer cette fréquence, on utilise un GBF, haut-parleur, un micro et un oscilloscope. On envoie un signal périodique dans le résonateur par le tuyau grâce au GBF relié au haut-parleur. On réceptionne le signal à l'autre bout du résonateur grâce au micro relié à l'oscilloscope. Cependant de cette manière, on mesure la fonction de transfert de l'ensemble (haut-parleur, résonateur, micro) qui est le produit des fonctions de transferts de ces 3 éléments. On observe 2 pics sur la courbe du gain entre 200 et 300 Hz.

Afin d'obtenir la fonction de transfert du résonateur seul, il faudrait mesurer la fonction de transfert du haut-parleur et du micro seulement. Il faut également faire attention que les différentes distances (haut-parleur/résonateur, résonateur/micro, ...) vont influencer la fonction de transfert mesurée.

Résonance optique

Expérience qualitative avec une lampe au sodium et une ampoule contenant des vapeurs de sodium. Il faut que l'ampoule soit très chaude ; le four doit chauffer pendant 30-45 minutes au maximum. Lorsque l'on éclaire l'ampoule chaude (= résonateur) avec la lampe au sodium (= excitateur), on voit apparaître un nuage de lumière diffuse, signe que la vapeur de sodium présente dans l'ampoule a bien été excitée et qu'elle se déexcite en émettant à son tour de la lumière (on a une collision inélastique). On montre qu'avec une lampe au mercure, le nuage diffus n'apparaît pas car les longueurs d'ondes émises par la lampe au mercure ne peuvent pas exciter les atomes de sodium.

Conclusion

La résonance est un phénomène qui intervient dans de nombreux domaines de la physique. On peut soit la rechercher, soit vouloir l'éviter selon les cas.

Applications :

- amortisseurs de voiture
- stabilisation des immeubles contre les tremblements de terre (pendules doubles couplés)
- résonateurs de Helmholtz pour silencieux de pot d'échappement de voiture

Remarques diverses

- la résonance ne se produit pas forcément à la fréquence propre du système (exemple de la résonance en tension du circuit RLC).
- à la résonance du RLC filtre passe-bande, on a $G = 0$ dB. Expérimentalement, on mesurait $-0,6$ dB, pourquoi ? Cela vient de la résistance r la bobine. On a $G = \frac{R}{R+r}$.
- il ne faut pas confondre *ondes stationnaires* et *résonance*. On a toujours des ondes stationnaires pour la corde de Melde en raison des conditions aux limites du système. La résonance, elle, n'intervient que quand l'amplitude est maximale.
- il ne faut pas confondre *résonance* et *amplification*. Pour le diapason, la caisse de résonance permet d'obtenir un son plus intense, mais on ne peut pas parler d'amplification puisqu'elle n'apporte pas d'énergie ; la caisse permet seulement de mieux faire passer la vibration de la tige métallique à l'air ambiant : elle effectue une *adaptation d'impédance*.
- faire des montages avec des grands facteurs de qualité (par exemple, circuit bouchon)
- conseil : présenter les résultats expérimentaux sous forme de tableau.
- il est important de parler de 3 choses dans ce montage :
 - il existe 2 types de résonance : résonance en intensité (ou en vitesse) et résonance en tension (ou en position).
 - il y a compétition entre l'apport d'énergie au système et la dissipation
 - l'adaptation d'impédance

– Comparaison système électrique et mécanique⁶ :

Système électrique	Système mécanique
$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u$	$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f$
charge (q)	position (x)
intensité ($i = dq/dt$)	vitesse ($v = dx/dt$)
inductance (L)	masse (m)
coefficient de résistance (c)	résistance (R)
(capacité) ⁻¹ (C^{-1})	rigidité (k)
$\omega_0^2 = 1/LC$	$\omega_0^2 = k/m$
$Q = \omega_0 m/c$	$Q = \omega_0 L/R$

Références

- [Duffait] Expériences d'électronique, R. Duffait, J.-P. Lièvre, Bréal
- [Acoustique] Notions élémentaires d'acoustique, électroacoustique : les microphones et les haut-parleurs, J. Jouhaneau, Lavoisier Tex & Doc, 1999
- [Quaranta Mécanique] Dictionnaire de physique expérimentale, Tome I La mécanique, L. Quaranta, Pierron
- [Quaranta Électronique] Dictionnaire de physique expérimentale, Tome IV Électricité et applications, J.-M. Donnini, L. Quaranta, Pierron
- [Krob] Électronique expérimentale, M. Krob, Ellipses
- [Feynman, mécanique 1] Le cours de physique de Feynman, Mécanique 1, R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, Dunod (toute fin du chapitre 21, chapitres 23 et 24)
- [Dictionnaire de physique] Dictionnaire de physique, R. Taillet, Loïc Villain, Pascal Febvre, de boeck

⁶Un tableau de ce type peut être trouvé dans de nombreux ouvrages, notamment dans le [Feynman, mécanique 1], Chapitre 23, p.309 ou dans [Acoustique], p.19