

Prérequis :

- Calcul d'impédance complexe
- Equation de propagation dans une corde
- Calcul d'interférences dans un Fabry-Pérot (notion de finesse)

Plan : I Résonance électrique : RLC série

1/ En intensité

2/ En tension

II Résonance mécanique : corde de Melde

III Résonance optique : cavité Fabry-Pérot

Intro

Résonance : phénomène général en physique (4 domaines)

- perception intuitive avec un élastique et une masse :

il y a résonance lorsque le système emmagasine une énergie maximale pour une certaine fréquence.

Définition : Pour un système connecté à un excitateur, on dit qu'il y a résonance lorsque l'énergie emmagasinée par le système présente un maximum pour une certaine fréquence.

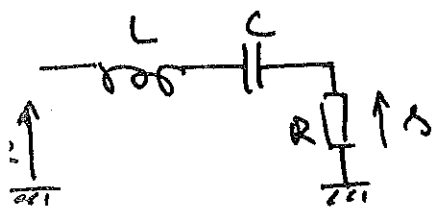
Bibli :

- Teck & Doe PCST et PC (pour corde de Melde et circuit RLC)
- Feynman, Mécanique I (fon chop. sur la résonance pour exemples)
- Documentation de la courbe Melde - Qrist
- BUP 801
661

I Résonance électrique: RLC série

3/ En intensité

$$\begin{cases} L = 11,2 \mu H \\ C = 1,02 \mu F \end{cases}$$



$$H = \frac{I}{e} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = G e^{j\varphi} \quad G \in \mathbb{R}^+$$

Résonance lorsque $G(\omega)$ est maximum $\Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ et $\varphi = 0$

ω_0 est la fréquence propre, définie comme étant la fréquence d'oscillation du système en régime libre; ie sans forçage ni dissipation.

Bande passante à -3dB : définition du facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{1}{RC\omega_0} \text{ d'où } \Delta\omega = \frac{R}{L}$$

Message : la résonance est caractérisée par

- la fréquence à laquelle elle se produit
- sa largeur : caractérisée de manière plus fondamentale un système. Cette largeur est liée au facteur de qualité, qui donne aussi une information sur la durée du régime transitoire (N d'oscillations)

Rq : La résistance R inclut celles des fils et de la bobine (mais pas celle du générateur, qui se trouve en avant de l'entrée e) ; la tension aux bornes de la résistance est alors obtenue par tout diviseur de tension

Manipulation :

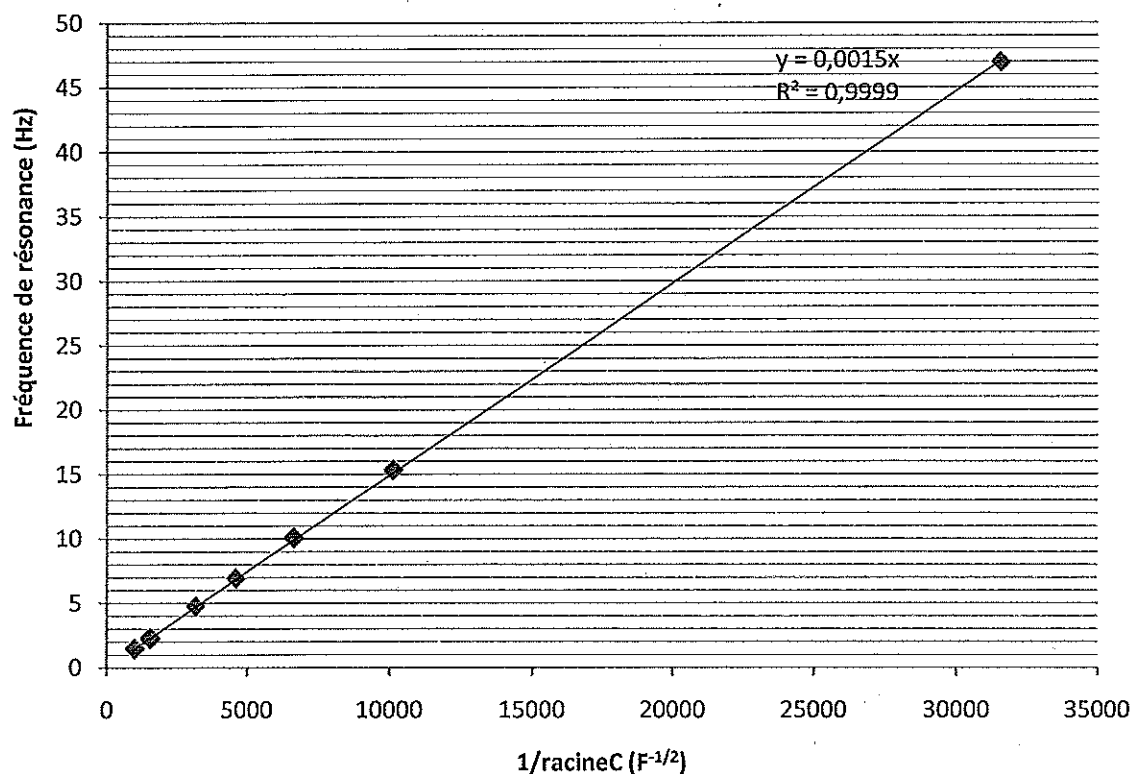
- Balayage rapide en fréquence ou G8F, visualisation d'oscilla
- Détermination précise de ω_r en mode X Y (condition $\varphi = 0$)

$$f_0 = 1,486 \pm 0,0056 \text{ kHz} \quad \text{comparé à } \begin{cases} L = 11,2 \mu H \\ C = 1,02 \mu F \end{cases}$$

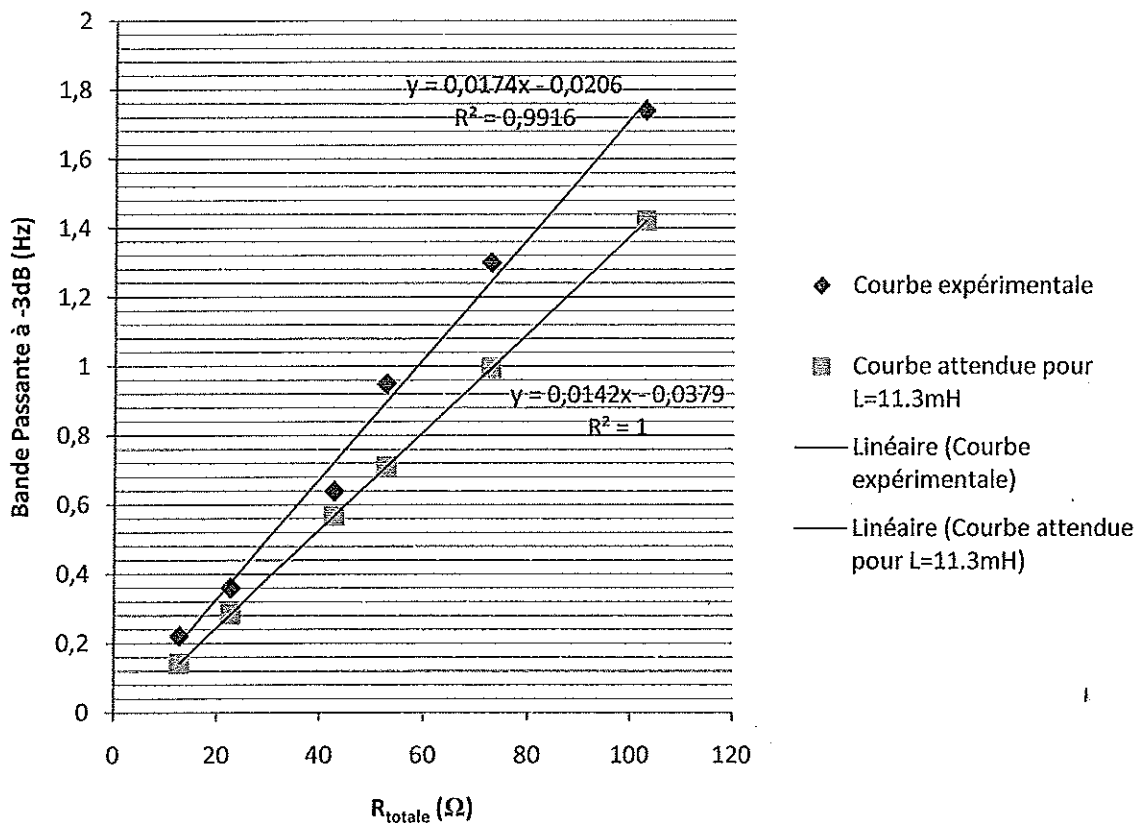
Ajout à la courbe A_j

- Variation de R avec la boîte à décades de résistance f_{0th}
 $\Rightarrow f_0$ ne change pas !!

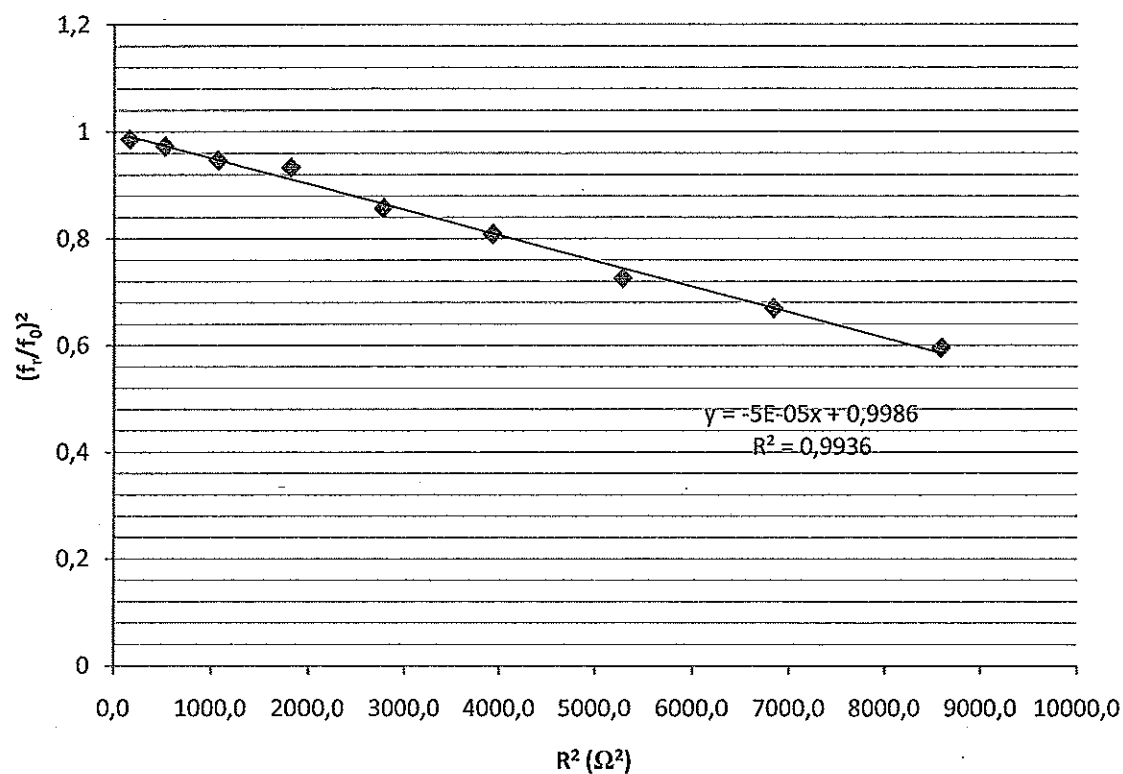
Courbe A : Vérification de la relation entre f_r et C pour la résonance en intensité.



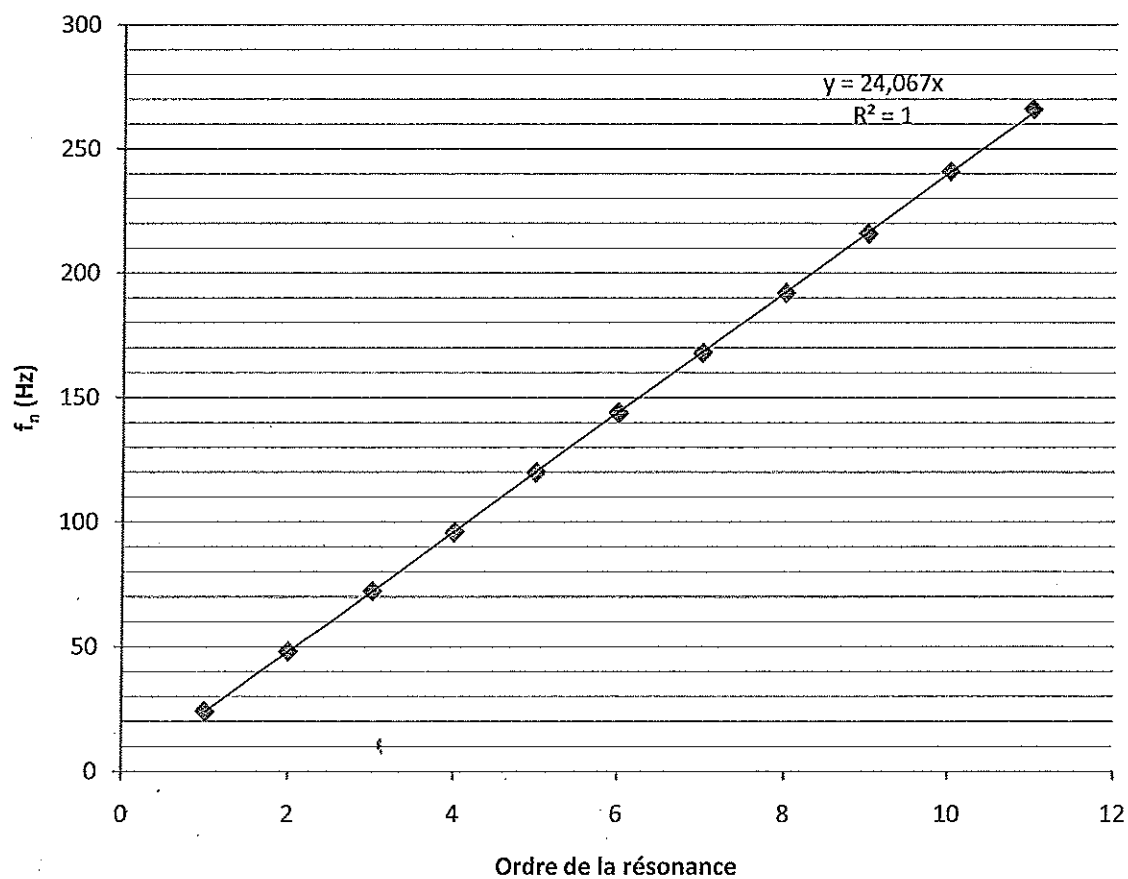
Courbe B : Vérification de la relation entre Δf et R_{totale} pour la résonance en intensité.



Courbe C : Vérification de la loi $f_r(R)$ pour résonance en tension.

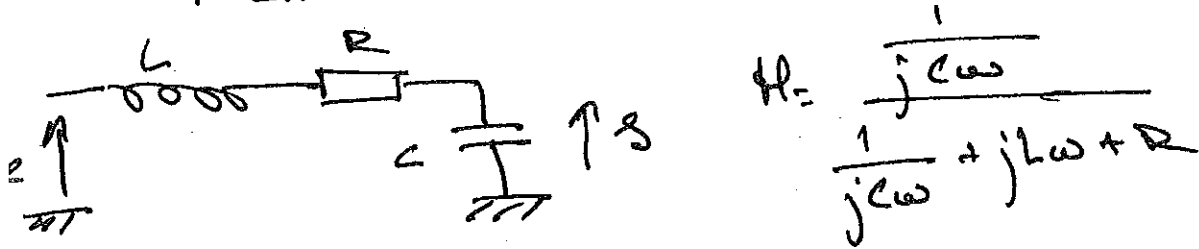


Courbe D : Résonances de la corde de Melde



Dans l'exemple de la résonance en tension, la fréquence de résonance correspond à la fréquence propre; l'exemple de la résonance en tension montre que cela n'est pas toujours le cas. En outre la résonance n'a pas systématiquement lieu : un critère est à vérifier.

2/ En tension



La résonance a lieu pour $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (sinon $G(\omega) \searrow$)
 à la fréquence $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Particularité pour ω_0 : $\varphi = \pi/2$

Manipulation

- Dessin en évidence de la condition de résonance ($R_{limite} = 150 \Omega$) grâce à 2 résistances différentes
- Montrer sur le diagramme de Bode que G_{max} (pour ω_r) ne coïncide pas avec $\varphi = \pi/2$ (pour ω_0)
- Mesure de f_r pour une résistance particulière ($R = 30 \Omega$)

Ajust à la course C) $\left(\frac{f_r}{f_0}\right)^2 = 1 - \frac{C}{2L} R^2$: résultat attendu

Résultat obtenu $\left(\frac{f_r}{f_0}\right)^2 = 0,9986 - 4,80 \cdot 10^{-5} R^2$
 ou lieu de 1 ou lieu de $-4,6 \cdot 10^{-5} \Omega^2$

Pour un système donné, il peut exister plus d'une fréquence de résonance (typiquement autant que de mode propre, ou degré de liberté); ceci est en particulier vrai dans le cas de ~~la~~ ~~des~~ ~~résonances~~ ~~sa~~ des ondes. Nous allons étudier

- Mesure de la bande passante * à l'analyseur de spectre
- * à l'oscillo (méthode des $\frac{5}{7}$)

Ajout à la courbe B)

Courbe A : $f_0 \left(\frac{1}{\sqrt{C}} \right)$ comparé à la prévision $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L}} \times \frac{1}{\sqrt{C}}$

Est quadratique :

Pente :

ou lieu de σ

Ceci s'explique par le fait que L a été mesurée à un endroit et que le circuit était placé sur l'analyseur de spectre lors de la mesure; chaque $\overline{B}$ parasite.

Courbe B : $\Delta f(R)$ comparé à la prévision $\Delta f = \frac{R}{2\pi L}$

Pente :

ou lieu de

même interprétation.

Donc facteurs de qualité : $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ pour $R = 10 \Omega$ $Q \approx 1$
 $R = 2 \Omega$ $Q \approx 5$

Évaluation de l'énergie transférée au système: résistance de la bobine

~~à la résonance $P = \langle u i \rangle_{T_0}$~~
 ~~$= R \langle i^2 \rangle_{T_0} = \frac{R I_{max}^2}{2}$~~
~~ou $T_0 = \text{période propre}$~~

~~l'énergie dissipée par la résistance~~

~~et dans le cas général $P = \langle u i \rangle_{T_0} = \frac{R}{2} \langle i^2 \rangle_{T_0}$~~

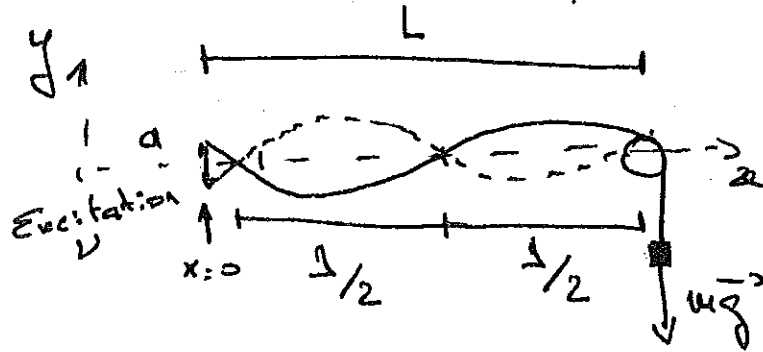
$P = \langle e i \rangle_T = \langle e s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E \cos \omega t \frac{B E \cos(\omega t + \varphi)}{R} dt$
 période de forçage ($T = 2\pi/\omega$)

$P = \frac{G E^2}{R} \frac{\cos \varphi}{2} = \frac{E^2}{2R} \text{Re}(H)$

L'énergie transférée au système est maximale lorsque la partie réelle de H est maximum (critère dans le diagramme de Nyquist)

le cas d'un système mécanique, la corde de Melde, qui ont la particularité d'avoir un très fort facteur de qualité

III Résonance mécanique: la corde de Melde.



Hypothèses (petites oscillations)

- Corde inextensible
- sans raideur
- de masse linéique μ
- pas de poids pour la corde
- déplacement vertical des points de la corde

Equation de propagation (reporter du pfd) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ où $c = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$

Conditions aux limites:

en $x=0$ onde progressive

en $x=L$ réflexion totale en opposition de phase.

$\hookrightarrow$ Onde stationnaire $\lambda = \frac{c}{\nu}$

L'amplitude de l'oscillation (énergie potentielle & cinétique échangées) est d'autant plus grande qu'elle se fait proche d'un nœud; ce sont les termes non-linéaires qui empêchent la divergence du système.

$\hookrightarrow$ Résonance pour $L = n \frac{\lambda}{2}$ d'où $\nu_n = \frac{n c}{2L} = n \nu_0$

Manipulation:

* Balayage en fréquence pour montrer l'espacement régulier des résonances

* Mesure pour un n (1 ou 2) de ν_n et ajout à la courbe D.

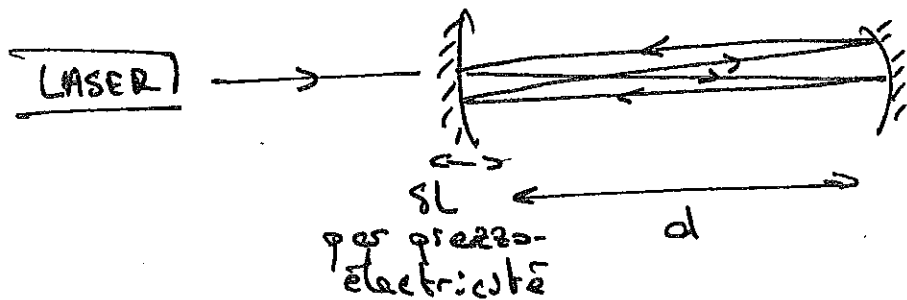
* On se place à un ordre pair de résonance puis quadruple la masse accrochée au fil: on passe à la résonance d'ordre moitié: vérification, pour un point, de $c = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot \sqrt{m}$

* Évaluation $Q = \frac{10}{10^{-2}} = 10^3$ (pour 10^2 Hz)

Rq: Pour les systèmes mécaniques le facteur de qualité est grand, ce qui implique un régime transitoire long: à prendre en compte lors de la détermination de la résonance (battements)

Beaucoup de procédés de mesure reposent sur le phénomène de résonance :
 • Réfractimètre
 • Ondemètre (ondes centimétriques, hyperfréquences)
 nous allons en étudier un : la cavité Fabry-Pérot.

III Résonance optique : la cavité Fabry-Pérot



Condition de résonance : on bout de quatre traversées un rayon doit être en phase avec lui-même ~~et se superpose~~
 On alimente le matériau piézo électrique par une forte tension d'une très petite quantité la longueur de la cavité.
 Les fréquences résonantes changent continuellement

$$4d = n \frac{c}{\nu_0} \Rightarrow \nu = \frac{nc}{4d}$$

$$\text{et } \nu'(SL) = \frac{nc}{4(d+SL)} \approx \frac{nc}{4d} \left(1 - \frac{SL}{d}\right)$$

Notons ν_1 et ν_2 les deux raies, distantes de ν_L , du LASER

$$\nu_1 = \frac{nc}{4d} \left(1 - \frac{SL_1}{d}\right) \text{ et } \nu_2 = \frac{nc}{4d} \left(1 - \frac{SL_2}{d}\right)$$

$$\text{d'où } \nu_L = \nu_1 - \nu_2 = \frac{nc}{4d^2} (SL_2 - SL_1) \quad \text{proportionnel à l'écart temporel sur l'oscillo.}$$

~~De plus~~ ~~$\nu = \frac{nc}{4d} \left(1 - \frac{SL}{d}\right)$~~ d'où

De plus ν devient à nouveau résonant (vers alors pour un autre ordre) lorsque $4(SL_1 - SL_1') = \frac{c}{\nu_1}$; ce qui correspond à l'ordre n à une fréquence résonante ν'

$$\begin{aligned} \text{telle que } \nu_1' &= \frac{nc}{4d} \left(1 - \frac{SL_1'}{d}\right) = \frac{nc}{4d} \left[1 - \frac{1}{d} \left(SL_1 - \frac{c}{4\nu_1}\right)\right] \\ &= \frac{nc}{4d} \left(1 - \frac{SL_1}{d} + \frac{SL_1 - SL_1'}{d}\right) = \nu_1 + \frac{nc}{4d^2} (SL_1 - SL_1') \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \nu_1' - \nu_1 = \frac{nc}{4d^2} (SL_1 - SL_1')$$

Or, pour une longueur $L_0 + \delta L_1$ fixée, nous savons que les fréquences résonantes sont régulièrement espacées de $\nu_{FP} = \frac{c}{4(L_0 + \delta L_1)} \approx \frac{c}{4L_0}$ à l'ordre 0.

On a donc $\nu'_1 - \nu_1 = \nu_{FP} = \frac{nc}{4d^2} (\delta L_1 - \delta L'_1)$

On en conclue donc $\nu_L = \frac{\delta L_2 - \delta L_1}{\delta L_1 - \delta L'_1} \nu_{FP}$, nous avons donc justifié la règle de trois utilisée; celle-ci n'est vraie que pour $L_0 \gg \delta L$, ce qui est le cas Oblig: $L_0 \approx 20 \text{ cm}$ et $\delta L \approx 10^{-4} \text{ m}$

Manipulation

- * Mesure de ν_L entre deux modes raisonnant de la cavité du LASER
- * Mesure de la largeur de la courbe de gain atomique
- * Discussion sur la finesse du Fabry-Pérot par rapport à celle de la cavité du LASER.

On pourrait:

- * faire la manipulation de résonance microscopique en éclairant une vapeur de sodium par une loupe à vapeur de Na
- * parler de résonance paramétrique, mais il s'agit de quelque chose de très différent des résonances étudiées ici.

Conclusion

La résonance se caractérise par ces et surtout $\Delta \omega$, elle correspond à une situation où le système stocke le maximum d'énergie.

Il s'agit d'un phénomène général en physique

La résonance est un phénomène puissant

- à craindre
- construction de ponts
- ascenseurs
- appareils de mesure de voiture
- filtres électronique / mécanique