MP34 Résonance

Micard Diane et Clavaud Cécile

18 avril 2013

Résumé

- 2012,11,10,09 : La résonance ne se limite pas au circuit RLC. Les critères de la détermination expérimentale de la résonance ne sont pas toujours pertinents. Le rapport entre la largeur de résonance et la durée du transitoire est trop souvent ignorée. La notion de facteur de qualité est trop souvent absente.
- 2010 : Les phénomènes paramétriques pourraient être abordés.

Table des matières

Références :

- Duffait d'optique p98-99 (cavité Fabry Péro)
- Quaranta I Mécanique (étude quantitative d'oscillateurs forcés)
- Tec et Doc PCSI (théorie)

Introduction

La résonance est un phénomène très général en physique qui se définit comme le fait que pour un système oscillant excité à une fréquence ω proche de sa pulsation propre ω_0, la puissance transmise au système est maximale (la position et la vitesse sont en phase et agissent comme des interférences constructives) ce qui se traduit par une réponce du système avec une très forte amplitude. Il faut noter qu'il existe aussi des résonances en vitesse.
Si ce phénomène est si général c'est que nous sommes entourés par une foule innombrable d'oscillateurs dans notre vie quotidienne que ça soit la balançoire que nous utilisions petits ou le mouvement des planètes.Les équations de ces oscillateurs peuvent se mettre sous la forme suivante : $\frac{d^2X}{dt^2} + B\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = F(t)$.
Avec $B = 2\gamma$ ou $B = \frac{\omega_0}{Q}$ où Q est le facteur de qualité et γ le coefficient d'amortissement.

Au cours de ce montage nous verrons l'importance de la résonance pour le physicien dans le sens où elle apporte de nombreuses informations sur le système. Puis nous nous intéresserons à dompter la résonance soit pour qu'elle ne nuise pas au système (voiture sur ressort) soit pour l'utiliser en faisant de cette caractéristique du système son point de fonctionnement.

1 La résonance comme instrument de mesure

1.1 Caractérisation d'un système mécanique par résonance

Le système masse + ressort+ tige trempant dans l'eau constitue un oscillateur dont on veut connaitre les caractéristiques comme la raideur du ressort ou l'amortissement.
L'équation qui régit la dynamique du système en régime forcé est la suivante :

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + 2\gamma\frac{dX}{dt} + kX = A\sin\omega t \tag{1}$$

avec X la position de la pointe de la tige et $A \sin \omega t$ l'excitation liée au moteur. On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\gamma' = \frac{\gamma}{m}$. On considère ici un système linéaire. En représentation complexe on trouve :

$$x = \frac{A}{\omega_0 - \omega + i\gamma'\omega} = \frac{A(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma'^2\omega^2} - \frac{Ai\gamma'\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma'^2\omega^2} \tag{2}$$

Si l'on néglige les dissipations alors la détermination de ω_0' la fréquence de résonance, nous reseigne directement sur la raideur

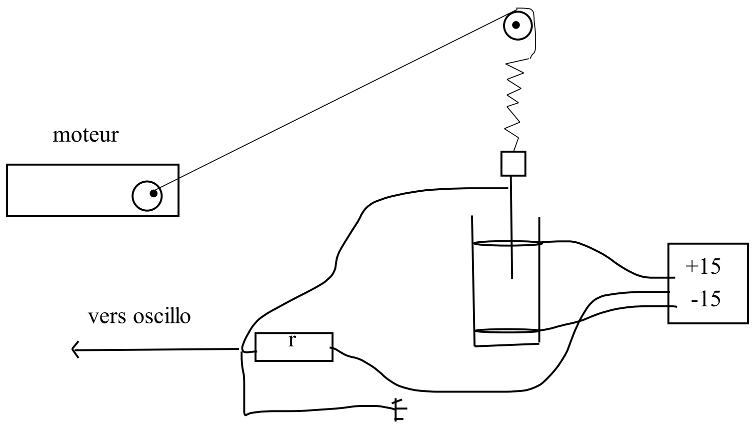

FIGURE 1 – Oscillateur mécanique forcé

du ressort et le système est alors parfaitement connu. Cependant ici, le système est clairement dissipatif, il est intéressant de montrer comment l'amortissement décalle la fréquence de résonance . On introduit alors le facteur de qualité Q qui peut s'écrire : $Q = \omega_0\tau$ avec τ le temps caractéristique d'amortissement.
On peut écrire $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma'^2}$. On détermine ensuite k à l'aide d'une masse ce qui donne ω_0. On remonte alors à γ' expérimentalement et le système est alors parfaitement connu.
On trouve alors : $\omega_0 = 273.10^{-3} rad.s^{-1}$ et $\omega_0' = 171.10^{-3} rad.s^{-1} + / - 0.002$

1.2 Mesure des modes d'un Laser : Cavité Fabry Pérot

Ce que nous venons de faire pour la résonance mécanique, nous pouvons le faire dans le domaine de l'optique ce qui permet alors de caractériser les modes propres du Laser. La cavité se compose d'un miroir fixe et d'un miroir mobile qui

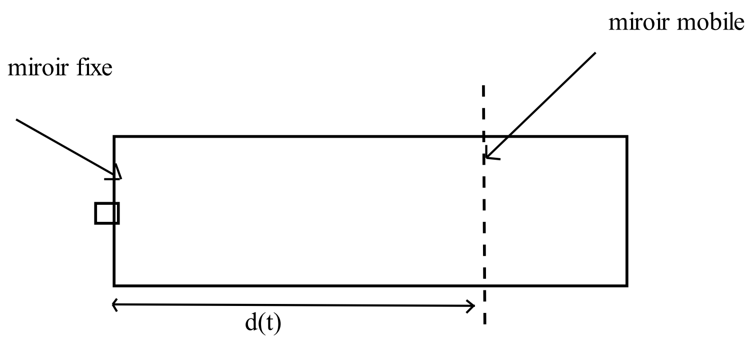

FIGURE 2 – Cavité résonante de Fabry Pérot

se déplace à vitesse constante sur une période de la cavité avant de revenir à sa position initiale. Une photodiode placée à l'intérieur de la cavité converti l'intensité lumineuse dans la cavité en tension. L'intensité à l'intérieur de la cavité est liée aux multiples réflexions du faisceau laser en son sein.

$$\tag{3}$$

$$I = (\sum T^n \exp(\frac{2i\pi 4d}{\lambda}))^2 \tag{4}$$

$$= \frac{1}{1 - T \exp \frac{2i\pi 4d}{\lambda}} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{(1 - T\cos\theta)^2 + T^2 \sin^2(\theta)} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Avec $\theta = 8\Pi d/\lambda$. I est maximale quand $d = \frac{\lambda n}{4}$.

Analyse du résultat : On voit apparaitre des fuseaux qui contiennent deux ou trois pics. La distance entre deux mêmes pics dans deux fuseaux consécutifs correspond à 2GHz lié au déplacement du Piezo. Cette information permet de déduire l'intervalle en fréquence entre deux pics consécutifs d'un même fuseaux soit la distance entre les différents modes du laser. Les fuseaux sont liés à un régime transitoire qui peut durer jusqu'à deux heure et qui est lié à la dilatation thermique de la cavité du laser.

$$\begin{aligned} 2FSR &\to 26ms \\ \Delta t &= 6.9ms \\ \Delta \nu &= 1.062GHz \\ \frac{\Delta nu}{c} &\approx \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} \\ \lambda &= 632.8nm \\ \Delta \lambda &= 1.41.10^{-3} \end{aligned}$$

1.3 Mesure d'une inductance par résonance

On réalise un RLC série avec $C = 0.101\mu F$ et $R = 124.1k\Omega$ et on s'intéresse à la résonnance en intensité en regardant la tension aux bornes de la résistance (on pourrait utiliser celle en tension en prenant la tension aux bornes de L). On a alors :

$$\tag{8}$$

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} + U_c \tag{9}$$

$$\text{en notation complexe : } U_R = \frac{R}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)} U_e \tag{10}$$

$$\text{On note : } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{11}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{12}$$

$$I = \frac{U_e}{R(1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}))} \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Contrairement au cas de la résonance en tension ici la résonance à toujours lieu. On pourrait comme précédemment s'intéresser à l'amplitude pour déterminer la résonance(on utilise la réponse indicielle), cependant l'étude de la phase est elle aussi possible et semble plus précise au vue de la courbe de l'amplitude en fonction de la fréquence d'exitation. En effet à la résonance on a : $arg[I] = -arg[Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})]$ soit un déphasage nul à la résonance que l'on recherche en mode XY de l'oscilloscope.

$$\begin{aligned} f_0 &= 4.771 + / - 0.92kHz \\ L &= \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = 10.98mH \end{aligned}$$

2 La Maitrise de la résonance, un enjeu majeur

2.1 Gestion de la résonance mécanique dans le cas d'une réponce attendue plate : le haut parleur

Ici la résonance n'est plus un atout mais un handicape. Il faut bien imaginer qu'un haut parleur dont la fréquence de résonance serait dans l'audible détériorerait l'écoute d'un morceau car les fréquences autour de la résonance seraient beaucoup plus amplifié que les autres. Dans l'idéal on veut une réponse plate dans le domaine de l'audible.

2.2 Fabrication d'une horloge : oscillateur à quartz

Nous avons vu jusque là par exemple lors d'une mesure l'importance du facteur de qualité sur la précision du système. Ce facteur de qualité est aussi extrêmement important lorsque l'on veut construire des oscillateurs qui oscillent à une fréquence précise comme des horloges. C'est le cas de l'oscillateur à quartz qui possède un très bon facteur de qualité.
Après discution avec un correcteur une solution pour avoir un fil rouge plus important dans les manip serait de commencer

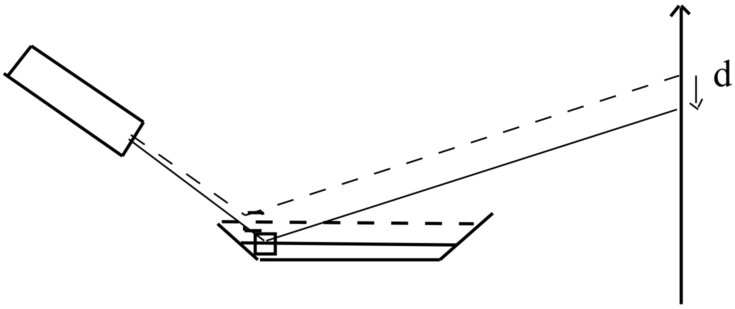

FIGURE 3 – Résonance du HP

par un pont de wien qui possède un mauvais facteur de qualité. Puis de montrer qu'il est impossible de faire avec cela un bon oscillateur car on voit facilement sur l'oscillo la dérive en fréquences. Cette manip peut servir de préquel à celle de l'oscillateur à Quartz.
Ici on trace V(f) puis on montre que la fréquence de résonance trouvée est celle de l'oscillateur auto entretenu. On réalise la TF pour montrer la précision de cet oscillateur. On trouve : $f_0 = 1.999.862 + / - 1Hz$

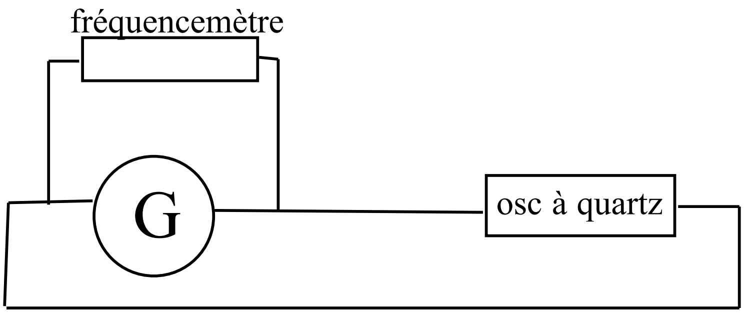

FIGURE 4 – Oscillateur à Quartz

2.3 Mode propre ou résonance en musique : corde de melde

Pour finir il convient de remarquer que la musique est un des domaines dans lequel on joue le plus sur les phénomènes de résonance : prennons l'exemple de la guitare. Lorsque celle-ci est pincée (excitation) le musicien excite la corde avec de nombreuses fréquences (excitation triangle) cependant le son émis par la corde n'est pas un bruit blanc et les fréquences qu'il contient représentent un spectre discret composé d'une fréquence fondamentale et de ses harmoniques. L'explication réside bien sûr dans l'étude des modes propres (fréquences de résonance) de la corde. Afin de comprendre ce phénomène regardons les équations qui décrivent le système. Ce système se compose d'un pot vibrant (excitation sinusoïdale), d'une corde de longueur L , de masse linéïque μ et tendue par une tension constante T, on néglige l'élasticité de la corde et l'influence de la gravité. On prendra la verticale selon y.

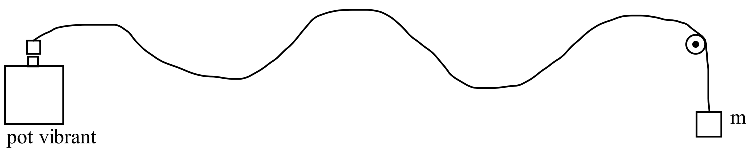

FIGURE 5 – Corde de guitare

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2} = A\sin(\omega t) \tag{15}$$

solution en ondes stationnaires : $y = C\cos(\omega t)\frac{\sin(\omega(L-x)/c)}{\sin(\omega L/c)}$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Ainsi l'amplitude de vibration sera maximale pour $\omega = \frac{n\pi c}{L}$ ce que nous pouvons vérifier expériementalement.
Cela signifie que si l'on excitait la corde avec un bruit blanc (impossible ici) la réponse en vibration ne serait pas un bruit blanc mais une superposition de modes propres soit une fréquence fondamentale et ses harmoniques. Pour changer la fréquence de la note il suffit de changer la longueur de la corde !

applications numériques :

$$m = 2.5g$$
$$L = 194.0 + / - 0.2cm$$
$$\mu = 1.29 + / - 0.13.10^{-3}kg.m^{-1}$$
$$c = 2.15m.s^{-1}$$
$$f_0 = 0.55Hz$$

Conclusion

Durant ce montage nous avons pu découvrir différents aspect de la résonance, qu'elle soit en amplitude ou en vitesse. *note pour vous : je pense que je n'ai pas assez insister sur l'importance de Q et la limite dans le cas de la résonance en tension Q=1/2 à améliorer !*. Nous avons pu voir que la résonance était un atout à la fois pour le physicien et pour l'industriel (sauf exception).

3 correction :

- Ce montage même si j'aurai pu gagner un peu de temps en étant plus précise dans la préparation est beaucoup trop long (je n'ai pu traîté que le I)
- L'idée du plan en lui même n'a pas été trop remis en cause, il faut par contre être plus sélectif dans les manip.
- Le jury n'attend pas 40min sur le RLC mais il faut l'exploiter un peu plus que ce qui a été fait en présentant notament un diagramme de Bode complet. L'îdée est en fait de se servir par la suite de tous les résultats sur le RLC pour faire des analogies avec le reste de la physique sans avoir du coup à réexpliquer le phénomène (on gagne alors pas mal de temps sur le discours).
- L'idée de la transversalité de la résonance semble avoir bien plu
- Il faut bien insister sur le fait que si le facteur de qualité est grand (résonance piquée) et que le système possède plusieurs modes résonant alors on va être capable d'exciter le système selon un seul de ses modes et ainsi de distinguer les différents modes.
- Pour la cavité Fabry Pérot deux résonances sont ici mise en avant et il faut bien préciser le système : tout d'abord dans le Laser c'est la cavité du laser qui va sélectionner ou non certaines longueurs d'onde. Puis une résonance a lieu dans le Mel Griot qui permet la détection des modes du laser. Dans cette expérience c'est à cette dernière que nous portons attention. Attention ici, contrairement à la résonance mécanique étudiée précédemment l'excitation est fixe et la variation de d (distance entre les deux miroirs) reviendrait à un changement de raideur de ressort.
- Dans ce montage je n'ai pas beaucoup insisté sur le facteur de décroissance des oscillations qui est lié à Q. Il est possible de faire ça en utilisant un diapason et en mesurant la décroissance des oscillations à l'aide d'un micro. On trouve alors un facteur de qualité très élevé (normal pour un diapason).
- Concrètement au niveau du plan je ferai après correction (mais ceci n'est que mon avis personnel ce plan ne vient pas des correcteurs) :
  - Introduction : visualisation rapide de la résonance mécanique du système masse ressort (pour donner quelque chose d'un peu concrèt)
  - I a) RLC mesure d'une inductance par résonance en traçant le diagramme de Bode entier. Puis en modifiant un peu le circuit je montrai l'existance d'une résonance en tension (sans tracer de diagramme de bode) mais en insistant bien sur les équations et le fait que cette résonance n'a pas lieu tout le temps. Il n'est pas intéressant (pas le temps) de montrer la dépendance en la valeur de Q par rapport à 1/2. On ne considère ici que les régimes où la résonance existe.
  - I b) ça n'est que mon avis personnel mais je trouve la manip de la résonance optique assez jolie je la garderai en prenant soin d'allumer le laser longtemps avant pour que les modes soient stables
  - II) a) Oscillateur à quartz je pense que c'est une belle manip qui permet de tracer une courbe de gain très piquée et de remonter facilement à Q. Vérifier ensuite qu'en boucle fermée on obtient bien un oscillateur quasi sinusoïdal. Pour cela on peut par exemple faire la TF du signal sur l'oscillo
  - II b) Corde de Melde pour l'application musicale ou diapason

  Ceci représente 4 manip quantitatives il faut être rapide !