MP 32 : **COUPLAGE D'OSCILLATEURS**

REFERENCES :

* Quaranta (Méca) → pendules de torsion.
* Perez (Méca) → équations pendule.
* Quaranta (Elec et appli) → couplage RLC
* BUP n°867 → Relation de dispersion

Plan :

Introduction :

Deux systèmes sont couplés lorsqu'ils agissent l'un sur l'autre : Les deux oscillateurs transfèrent de l'énergie l'un vers l'autre via le lien de couplage. Mathématiquement, on a des équations couplées $a_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 = f(x_2)$ il y a différents types de couplage en fct de la fonction f :

- $f(x_2) \propto \ddot{x}_2$ inductif / inertiel
- $f(x_2) \propto \dot{x}_2$ résistif / dissipatif
- $f(x_2) \propto x_2$ capacitif / élastique

On va ici se limiter à l'étude de couplages <u>linéaires</u> méca ou élec.

I - Deux pendules pesants :

1°) Description du couplage :

Mesures préliminaires :

On ne présente pas le pendule simple puisque ce n'est pas le sujet mais on détermine en préparation certaines grandeurs nécessaires.

→ Équilibrage des pendules : enlever le support pour maintenir la masse sinon l'équilibrage n'est pas possible. On pèse les deux masses ainsi que leur support.

Masses : $m_1 = 607,8 \pm 0,05 g$ Distance CM - masselotte : $l = 50,5 \pm 0,5 cm$

$m_2 = 608,5 \pm 0,05 g$ ⇒ On suppose les deux pendules identiques.

→ Etude d'un pendule seul : acquérir un signal d'un des deux pendules sans le couplage.

paramètres : $T_{acq} = 1 min$; $T_e = 500 \mu s$ → faire la TF.

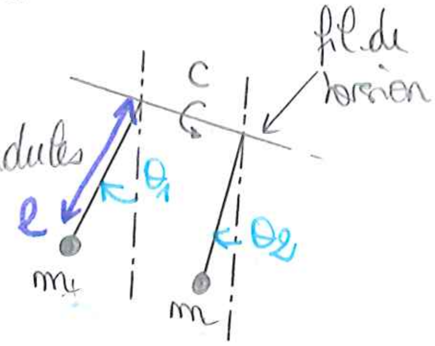
$f_0 = 579 \ mHz \pm \frac{1}{2 T_{acq}}$ on a : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$ ⇒ $\boxed{J = \frac{mgl}{(2\pi f_0)^2}}$

et : $\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta f_0}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}$ ⇒ $J = 231,8 \cdot 10^{-3} kg.m^2$

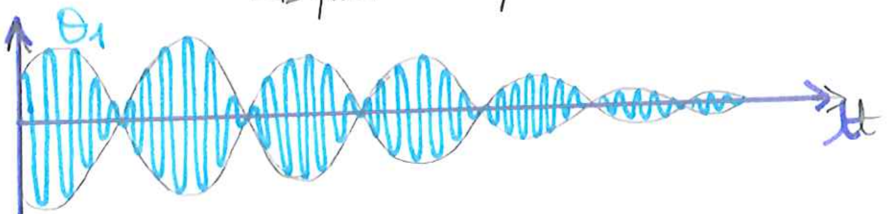
Couplage des deux pendules :

On choisit deux pendules identiques (même fréquence de résonance). Quand on lance un seul pendule, celui-ci oscille avec une amplitude de plus en plus faible jusqu'à ce qu'il s'immobilise. Quand on le couple à un autre pendule, son mouvement devient différent, il alterne entre des phases de balancement et des phases d'immobilité. Les deux pendules s'influencent l'un l'autre.

→ le mouvement n'est plus une simple sinusoïde, on observe des battements.



Acquisition : $T_{acq} = 89 s$, max de pts
→ pour avoir plus de battements lancer les 2 pendules



Faire la TF $\Rightarrow$ on détermine les deux pulsations des modes propres.

D'après les équations couplées, on obtient deux modes :

– le mode symétrique : $\omega_S = \sqrt{\dfrac{mg\ell}{J}}$ (idem que ω_0 car le fil de torsion ne ressent pas de moment)

– le mode antisymétrique : $\omega_A = \sqrt{\dfrac{mg\ell+2C}{J}}$

Mesures : $f_S = 581$ mHz

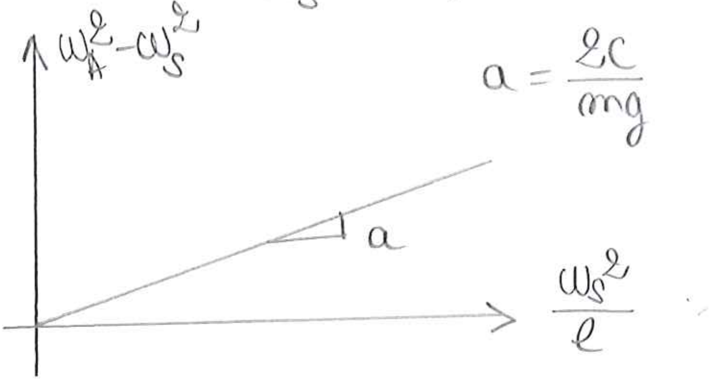
$f_A = 644$ mHz $\quad \Delta f = 11$ mHz

2°) Détermination du module de torsion C :

On fait varier la distance ℓ et on mesure les deux fréquences.

$\omega_A^2 = \dfrac{mg\ell+2C}{J}$ et $\omega_S^2 = \dfrac{mg\ell}{J}$ $\rightarrow$ $J = \dfrac{mg\ell}{\omega_S^2}$ (En faisant varier ℓ on fait varier J.)

$\Rightarrow \boxed{\omega_A^2 = \omega_S^2\left(1+\dfrac{2C}{mg\ell}\right)}$



On en déduit le module C :

C = $\qquad$ ± $\qquad$ N.m

3°) Etude énergétique – modes propres

En préparation :

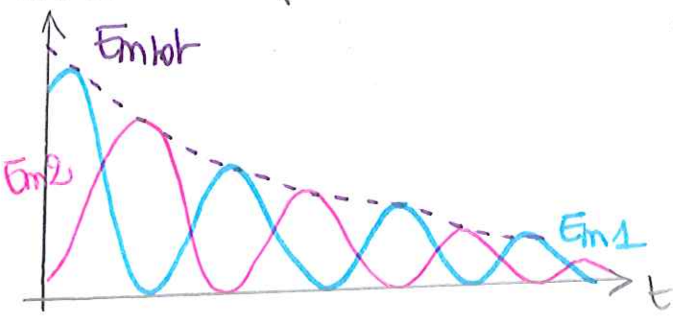
Se replacer dans la 1ère configuration : on connait J, m, ℓ.

Pour connaître θ il faut calibrer le capteur : A l'oscillo, mode Roll on fixe le zéro puis on étalonne le capteur $20° \leftrightarrow 0{,}6$ V.

Pour l'exploitation des courbes on va devoir faire des dérivées : il faut prendre peu de points. $T_{acq} = 1$ min ; $T_e = 40$ ms

Energie des pendules :

On lance les pendules avec une C.I. quelconque.



$E_{m_i} = E_{c_i} + E_{pp_i} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_i^2 - mg\ell\cos\theta_i$

$E_{couplage} = \frac{1}{2} C(\theta_1-\theta_2)$

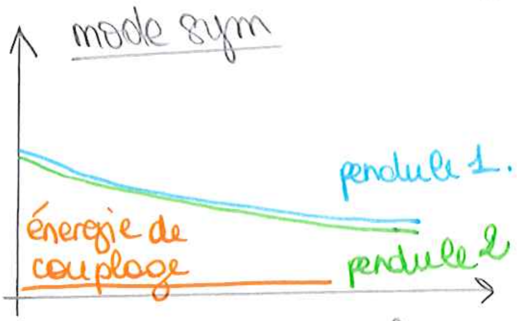
$E_{tot} = E_{m_1} + E_{m_2} + E_{couplage}$

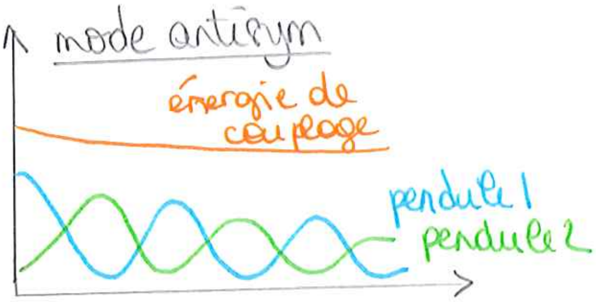
⇒ il y a transfert d'énergie d'un pendule à l'autre au cours du tps
Il n'y a pas conservation de l'énergie totale puisqu'il y a dissipation par frottements. Em tot décroissante.

Modes propres:

Quand on prépare le système dans l'un des deux modes propres celui-ci reste dans le même mode. Il n'y a pas de transfert entre les deux modes propres. → exemple en lançant les pendules

Montrer les courbes énergetiques prises en préparation pour les 2 modes.





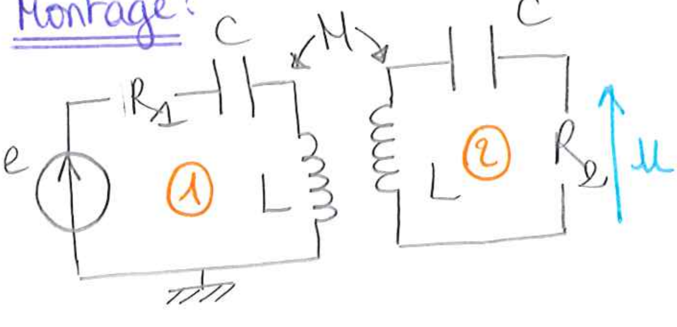
⇒ le couplage entre les deux pendules est maximal pour le mode antisym et nul pour le mode symétrique.

II – Couplage d'oscillateurs électriques par inductance mutuelle.

1°) Influence du couplage sur les fréquences propres

Le système électrique permet de faire varier la constante de couplage.

Montage:



liste du matos:
- Bobines de Helmholtz Jeulin
- Agilent + HAMEG pour wobbulation
- Ampli de puissance
- 2 Rhéostats ~ 10 Ω
- 2 Boîtes de capacité ~ 100nF.

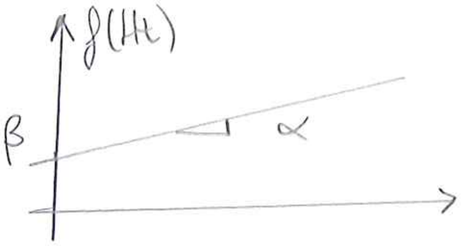
Réglages préliminaires:

On considère qu'un seul RLC (on ouvre le second ⇒ pas de couplage)
On détermine la fréquence de résonance par wobbulation
paramètres: GBF : rampe Vpp ~ 9V, freq ~ 50mHz
Hameg Fct générator : calibre 100kHz, ⚠ sans offset.

On relie la sortie du GBF à l'entrée FM du générateur de fréquences.
que l'on amplifie avec   pour que le couplage soit suffisant.

⚠ un autre ampli de puissance peut introduire une résonance parasite.

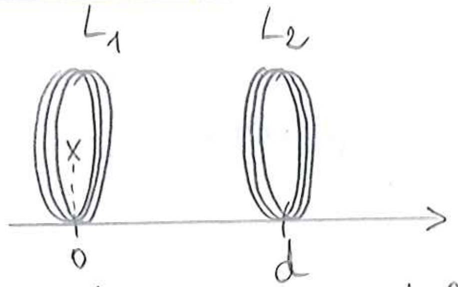
Etalonnage de la wobbulation : correspondance tension GBF ⟺ fréquence HAMEG
On envoie dans le HAMEG une tension continue et on relève f au fréquencemètre



$f = \alpha u + \beta$
$\alpha = 9,68$ Hz/V.
$\beta = 15,34$ Hz

→ On détermine la fréquence des deux oscillateurs et on les accorde.

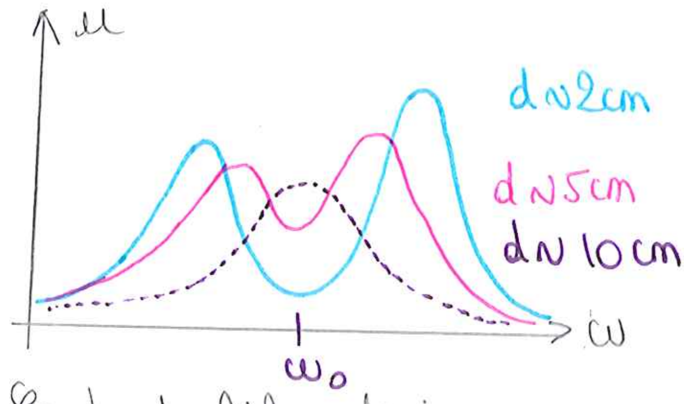
Influence du couplage :



On éloigne les deux bobines d'une distance d ce qui diminue le couplage inductif.
⇒ On acquiert sur LatisPro la tension aux bornes de R_2 et la rampe délivrée par le GBF.

qualitativement :

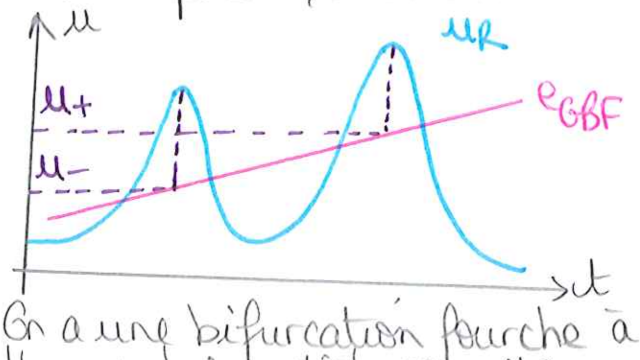
⇒ On trace u_R en fct de e_{GBF}.



⇒ plus le couplage est fort ie plus les bobines st rapprochées, plus les fréquences de résonance sont éloignées et l'amplitude forte.

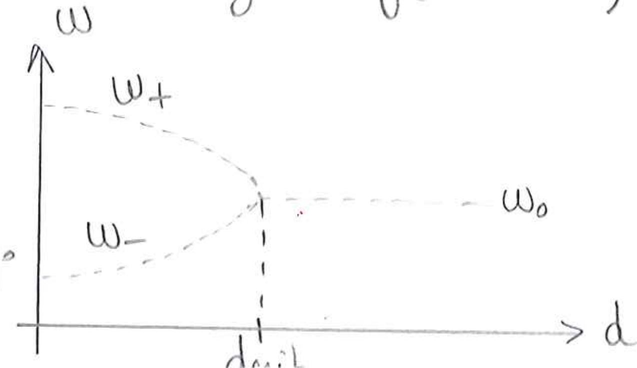
Courbe de bifurcation :

Pour chaque d, on détermine ω_+ et ω_- (Rq : réticule lié à la courbe pratique)



avec $u_+ \to \omega_+$
$u_- \to \omega_-$
On remonte à $\boxed{M_{crit} = R^2\omega_0/L}$ (annale)
avec un étalonnage $M = f(\text{distance})$.

On a une bifurcation fourche à partir d'une certaine distance critique.
On a ici un couplage inertiel (couplage par la dérivée seconde). Les deux pulsat° des modes propres dépendent tout deux



III - Couplage de 4 oscillateurs :

1°) Oscillations libres et fréquences propres :

En préparation :

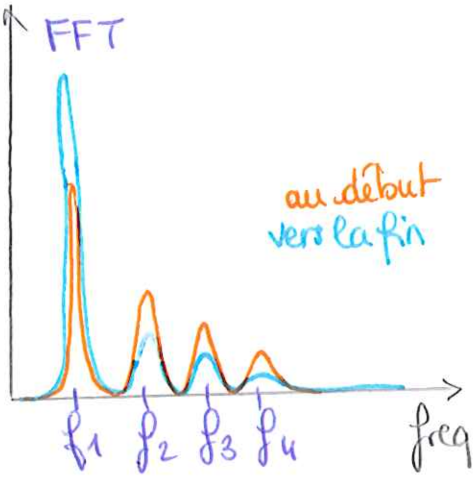
Reglage/calibrage (FS) $\Delta t = 6{,}25$ ms
arrêt après $T = 60$ s

Détermination de k : on enlève un ressort et on détermine k avec la fréquence de résonance $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on trouve. $k = 25\ N.m^{-1}$

Oscillations libres :

On lance un pendule en comprimant un ressort et on acquiert le signal. On fait la FFT ⇒ On détermine les fréquences propres (mvt quelconque = superposition des modes propres)

qualitativement :

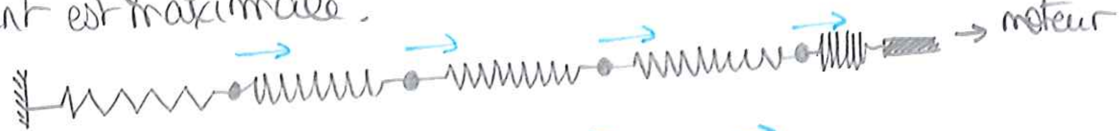


On remarque que le pic le plus haut est associé à la fréquence la plus basse donc le mode propre le moins énergétique.
Lorsque l'on fait la FFT sur le début du signal et sur la fin de celui-ci, on remarque que l'amplitude associée au modes 2, 3, 4 diminue et celle du 1 augmente, le système finit par osciller dans son mode le plus bas en énergie.

2°) Visualisation des modes propres en RSF

On force le système à l'aide d'un moteur tournant à la fréquence f. On fait un balayage en fréquence et on repère la résonance quand l'amplitude du mouvement est maximale.

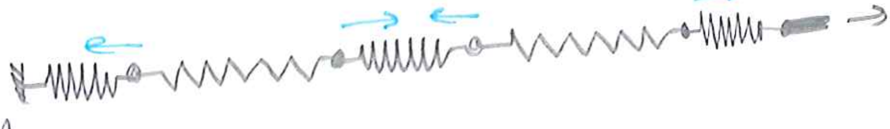
mode 1 :
$f_1 = 1{,}30$ Hz



mode 2 :
$f_2 = 1{,}91$ Hz

mode 3 :
$f_3 = 2{,}53$ Hz

mode 4 :
$f_4 = 2{,}99$ Hz

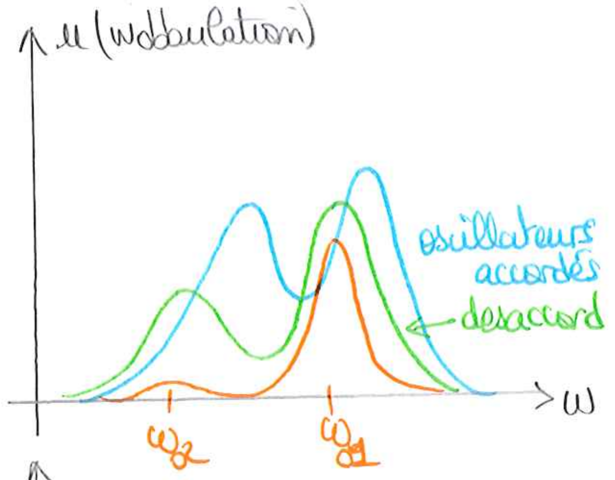


du couplage à la différence du pendule qui lui est un couplage élastique (couplé par la variable θ). De plus, il existe une valeur de couplage critique en deçà duquel les deux freq st égales à la freq de résonance des circuits non couplés.

2°) Oscillateurs desaccordés :

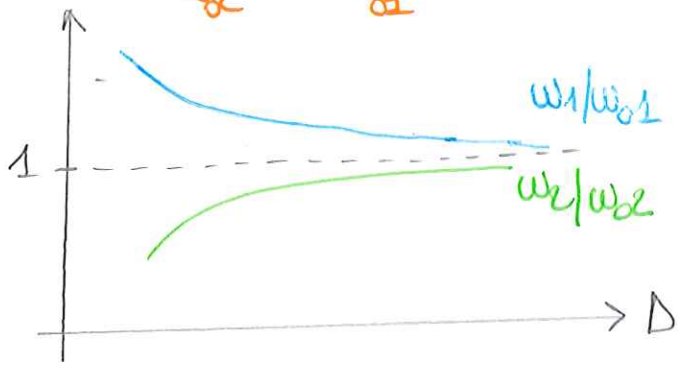
Jusqu'à présent on a travaillé avec des oscillateurs identiques, on va désormais les desaccorder.

On fixe le couplage (mettre les bobines côte à côte) et on change la valeur de la capacité d'un deux circuits de 100 nF à 1 µF.



ω_{01}, ω_{02} pulsations propres des 2 RLC.

On remarque que plus les oscillateurs st desaccordés, plus l'amplitude des résonances diminue. La résonance pour le second oscillateur non couplés tend à disparaître.



Plus les oscillateurs sont desaccordés plus les fréquences des deux modes sont proches de leur fréquence de résonance ⇒ il n'y a plus couplage.

On peut donc conclure que le couplage de deux oscillateurs est maximal quand les deux oscillateurs ont la même fréquence propre.

3°) Courbe de dispersion :

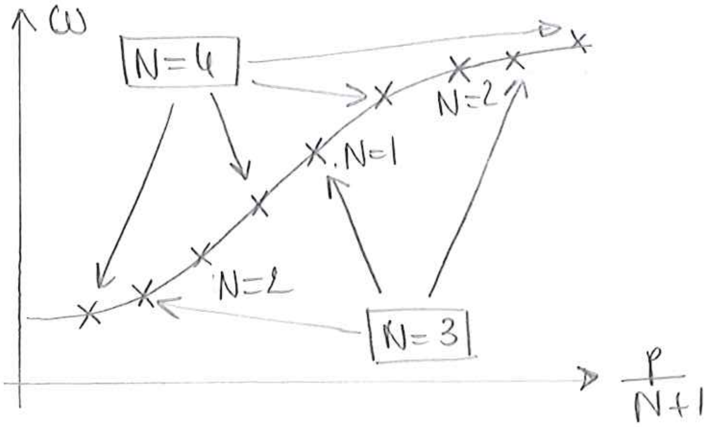
En bloquant une masse, on peut changer le nombre d'oscillateurs couplés et vérifiée la relation de dispersion.

On a : $m\ddot{x}_n + K(x_n + x_{n-1}) - K(x_{n+1} - x_n) + \frac{mg}{\ell}x_n = 0$

On cherche $x_n = A_n \cos(\omega t)$ respectant les CL aux bords $x(0) = x(L) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)}$$

On effectue un fit par un sinus carré et on détermine les coefficients



CCL :

* 1 oscillateur → 1 seule fréquence propre
  2 oscillateurs couplés → 2 modes propres ... etc

* pour 2 oscillateurs :
  - le clivage des deux fréquences est plus grand plus le couplage est fort
  - le couplage est maximal pour deux oscillateurs accordés.

* si on augmente le nb d'oscillateurs on peut arriver à une modélisation sous forme de milieu continu → relation de dispersion pour la propagation des ondes.