MP32 - Couplage des oscillateurs

30 Mars 2016

Flora Aubree & Guillaume Blot

La vie oscille, comme un pendule, de droite à gauche,
de la souffrance à l'ennui.
Schopenhauer

Commentaires

Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples, et les candidats doivent en tirer les conclusions qui s'imposent. Les expériences de couplage inductif sont souvent difficiles à exploiter car les candidats ne maîtrisent pas la valeur de la constante de couplage. Enfin, il n'est pas interdit d'utiliser plus de deux oscillateurs dans ce montage, ou d'envisager des couplages non linéaires, qui conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, et ont de nombreuses applications.

Jusqu'en 2013, le titre était : *Oscillateurs couplés*.

Les candidats peuvent présenter des systèmes couplés simples, en mécanique, en électricité ... mais il faut analyser correctement les couplages pour éviter une mauvaise utilisation de formules toutes faites. Le jury met en garde les candidats contre l'utilisation de dispositifs dont la modélisation n'est pas comprise.

Les systèmes propagatifs à constantes réparties n'ont leur place dans ce montage qu'à condition de faire référence explicitement au couplage lors de la manipulation présentée.

L'étude de la phase est trop souvent absente de ces montages alors qu'elle fournit des relations complémentaires non redondantes à celle de l'amplitude.

L'étude du couplage d'oscillateurs identiques ne permet pas de couvrir la totalité du sujet.

Dans l'étude de deux oscillateurs couplés, il ne faut pas s'appesantir sur la détermination des paramètres des oscillateurs indépendants, mais il faut plutôt considérer les deux régimes, oscillations libres et forcées. Il est aussi possible d'étendre l'étude à des oscillateurs comportant plus de deux degrés de libertés.

Bibliographie

- ✍ Quaranta *électricité et application* ⟶ circuits RLC couplés
- ✍ *BUP 867* ⟶ Système de 4 pendule couplés
- ✍ *Documentation du dispositif*[1] ⟶ Pendules pesants couplés

Expériences

- ☕ Deux pendules couplés en torsion
- ☕ Deux RLC couplés par un condensateur
- ☕ Système de 4 pendules couplés

Table des matières

1. Ce document a disparu de la circulation

Introduction

Nous avons vu en détail les solutions d'une équation du type $a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a0x = 0$: elles peuvent, sous certaines conditions, donner lieu à des oscillations.

Si on prend deux systèmes régis par ces équations, et qu'on les couple, on peut obtenir un système de la forme :

$$a_{12}\ddot{x_1} + a_{11}\dot{x_1} + a_{10}x_1 = f(\ddot{x_2}, \dot{x_2}, x_2)$$

$$a_{22}\ddot{x_2} + a_{21}\dot{x_2} + a_{20}x_2 = f(\ddot{x_1}, \dot{x_1}, x_1)$$

Dans ce montage, on étudiera les cas où $f(\ddot{x_2}, \dot{x_2}, x_2) = \alpha x_2$. On appelle ce couplage couplage élastique.

1 Pendules couplés en torsion

On se propose ici d'étudier deux pendules pesants accordés et couplés par l'intermédiaire d'un fil de torsion.

1.1 Constante de couplage

Pour deux pendules pesant couplés, les modes propres ont des pulsations

$$\omega_S = \frac{g}{l + \frac{J}{lm}}$$

(mode symétrique) et

$$\omega_{AS} = \omega_A + \frac{2C}{J + ml}$$

(mode antisymétrique), où l est la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse du poids de masse m ajouté, J est le moment d'inertie de la tige sans masse et C la raideur de la tige de torsion.

On dispose de deux pendules pesants identiques couplables via un fil de torsion.

Pour toutes les mesures qui vont suivre, il est nécessaire d'équilibrer (théoriquement : dynamiquement, en pratique : statiquement) chacun des deux pendules. Pour ce faire, il faut retirer les masses, et visser la masse du haut pour que toutes les positions soient des positions d'équilibre.

Il est ensuite possible de déterminer le moment d'inertie de la tige, en mesurant la période des oscillations lorsqu'on rajoute une masse. Cela ne sera pas fait dans cette leçon.

Pour la suite des manipulations, il faut que les deux pendules soient accordés. Pour le vérifier, on les lance.

Pendules couplés en torsion

✍ Documentation du dispositif ⏲ 10 min

On branche les capteurs (sans les étalonner, ce n'est pas la peine) sur synchronie.
On lance les pendule ($\theta_1 = 0$ et $\theta_2 \neq 0$ pour exciter les deux modes). On acquiert pendant 2 minutes.
On calcule la TF, on en déduit les deux pulsation ω_S et ω_{AS}.
On réitère pour différentes masses.
On trace $\frac{1}{\omega_{AS}^2 - \omega_S^2}$ en fonction de m. On obtient une droite de pente $\frac{l}{2C}$.

De la valeur de C, on déduit le module de cisaillement de la tige selon la formule :

$$C = \frac{G}{L}\frac{\pi D^4}{32}$$

où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson).

1.2 Indépendance des modes

On peut faire une manip très simple pour montrer que les deux modes (symétrique et antisymétrique) n'échangent pas d'énergie.

On fait une acquisition pour des conditions initiales $\theta_1 = \theta_2$ et $\theta_1 = -\theta_2$. On calcule la TF : il n'y a qu'un seul pic.

Pour un couplage linéaire, les deux modes n'échangent pas d'énergie (c'est une propriété générale des oscillateurs couplés).

2 Couplage capacitif de deux RLC

On va maintenant s'intéresser à deux oscillateurs électriques, cette fois-ci forcés.
Le montage est présenté sur la figure 1.

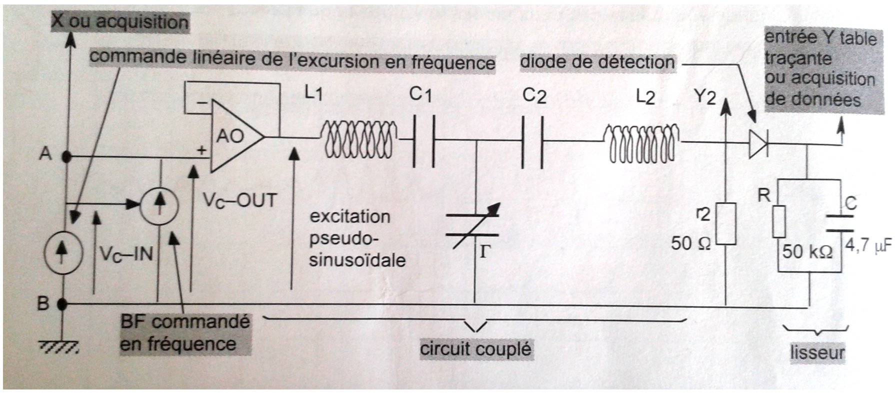

FIGURE 1 – Schéma du montage

La théorie prévoit $\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\omega_{AS} = \omega_S\sqrt{1+\frac{2C}{\Gamma}}$.

RLC couplés par un condensateur

✍ Quaranta IV ⏲ 10 min

Il faut absolument accorder correctement les deux oscillateurs avant toute chose.
On réalise le montage proposé. On étalonne le VCO (ici : un module Hameg).
On visualise sur l'oscilloscope la fonction de transfert du montage. On mesure la différence de fréquences pour différents C. On montre que seul un des deux pics se déplace lorsque Γ varie.
On trace ω_{AS}^2 en fonction de $\frac{1}{\Gamma}$. On trouve une droite de pente $2C$.

3 Système de 4 pendules couplés

Pour les 2 oscillateurs couplés précédant, il y a 2 fréquences propres. Ce n'est pas un hasard. Pour des couplages linéaires, il y N fréquences propres où N est le nombre d'oscillateurs couplés. Voyons maintenant le cas $N = 4$.

La théorie prévoit : $\omega_p^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{m}\sin^2\frac{p\pi}{2(N+1)}$ où ω_0 est la pulsation d'un pendule simple, avec ici $N = 4$ et $1 \leq p \leq N$.

Système de 4 pendules couplés

✍ BUP 867 ⏲ 5 min

On utilise le dispositif maison : 4 pendules couplés par des ressorts.
La mesure est faire avec vidéocom : on vise avec la caméra et tout le reste se fait tout seul.
On calcule la TF. On relève les trois pulsations propres.
On trace ω_p^2 en fonction de $\sin^2 \frac{180p}{10}$ (par défaut, Régressi est en degrés). On obtient une droite de pente $\frac{4K}{m}$ et passant par l'origine (car la pulsation propre du pendule est très petite devant toutes les pulsations mesurée ici).

Réjouissons-nous que l'expérence soit compatible avec la théorie.

Conclusion

Nous avons vu plusieurs cas de couplage élastiques linéaire entre oscillateurs : le couplage de deux pendules pesants, de deux RLC et de quatre pendules simples. Nous en avons dégagé les caractéristiques générales (autant de pulsations propres que d'oscillateurs, la pulsation du mode symétrique ne dépend pas de la constante de couplage).

Nous pourrions également étudier les effets d'un couplage inertiel (ex. : RLC couplés par induction), d'un couplage non linéaire (ex. : 2 métronomes sur une planche) ou du couplage d'un très grand nombre d'oscillateurs (phonons).

Questions et Remarques