Montage n° 36 : Couplage des oscillateurs.

biblio : Perez de mécanique (théorie)
Quaranta IV (circuit electrique)
Pub 867 (4 pendules couplés)

Binôme 17 : LEMIERE Joël
BORNE Fabien
THEURKAUFF Isaac

Introduction

Dans ce montage nous ne nous intéresserons qu'à un couplage linéaire de systèmes linéaires oscillants.

De plus dans les cas étudiés, les circuits couplés seront constitués d'oscillateurs identiques.

On mettra en évidence quelques caractéristiques très générales sur le couplage au niveau energétique, et fréquencielle notamment, à travers deux domaines de la physique : mécanique - électrique.

Oscillateurs = Σ qui a un comportement periodique.

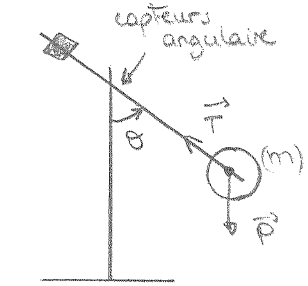
Couplage : on autorise les echange d'nrj.

I - Oscillateurs (élastique) mécaniques.

1 - Etude non couplé

. Avant de commencer l'étude en "mode couplé" nous allons caractériser notre oscillateur mécanique simple qui est un pendule pesant

. On a préalablement équilibré notre système pour que son centre de gravité corresponde au point se situant au niveau de l'axe de rotation (sinon le moment du poids de l'ensemble serait à prendre en compte !)



TMC : $J\ddot{\theta} = -mga\theta$
(approximation petits angle $\theta < 30°$)

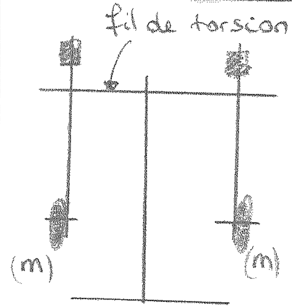
$\Rightarrow J\ddot{\theta} + mga\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\theta = 0$

acquisition sur | synchronie
| oscilloscope.

• mesure de ω_0 : $\pm$
sachant que $\omega_0^2 = mga/J$ on peut donc en déduire J

d'où $J =$ $kg.m^2$

2 - Couplage



On va coupler le 1er pendule pesant à un autre pendule pesant, identique par un fil de torsion dont on cherche à déterminer son moment de torsion angulaire C.

→ on fixe un pendule pesant et on met l'autre en mouvement.

TMC : $J\ddot{\theta} = -mga\theta - C\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mga + C}{J}\theta = 0$

• mesure de ω_0' : $\pm$ $rad.s^{-1}$

sachant que $\omega_0'^2 = \frac{mga+C}{J}$

d'où $C = J\omega_0'^2 - mga =$ $N\,m\,rad^{-1}$

3. Les deux oscillateurs couplés.

On met en mouvement les deux masses → oscillation libre et l'on s'aperçoit qu'une masse gagne en amplitude /r à l'autre puis inversement. On enregistre l'écart angulaire.

Équations des deux oscillateurs couplés :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{mga}{J}\theta_1 + \frac{C}{J}(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{mga}{J}\theta_2 + \frac{C}{J}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

on découple le système et l'on voit apparaître deux fréquences

→ la solutions donne $\begin{cases} \omega_S = \sqrt{\frac{mga}{J}} = \omega_0 \\ \omega_A = \sqrt{\frac{mga}{J} + \frac{2C}{J}} \end{cases}$

2 oscillateurs couplés identiques → 2ω

- Étude des courbes obtenues :

On voit des battements → preuve de l'existence de plus d'une pulsation, TF sur synchronie.

$\omega_A =$, ...

$\omega_S =$

[car on se rappel que $\cos(\omega_A t) + \cos(\omega_S t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega_A + \omega_S}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_A - \omega_S}{2} t\right)$]

on a donc une superposition de deux modes !
→ on met en évidence ces deux modes suivant les CI

1°/ $\theta_1 = \theta_2$ 2°/ $\theta_1 = -\theta_2$

- Étude énergétique :

$E_{tot} = E_{c_1} + E_{p_1} + E_{c_2} + E_{p_2} + E_{couplage}$

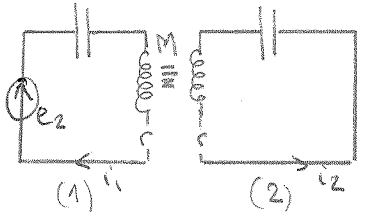
On trace E_{c_1}, E_{p_1}, $E_{c_2} + E_{p_2}$ on montre la courbe, puis on rajoutte $E_{couplage}$.

$$\boxed{E_{couplage} = \frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_1)^2}$$

On a vu un couplage dit élastique ds le I et mis en évidence l'apparition de 2ω dont un dépend de C, la constante de couplage. Maintenant nous allons "jouer" avec la constante de couplage et voir ce qui se passe en étudiant un autre Σ d'oscillateurs couplés : le couplage inductif

II - Oscillateurs : couplage inductif

1 - Non couplé



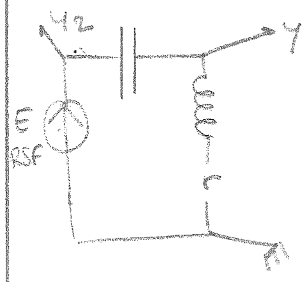
$$\begin{cases} (1)\; L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{Q_1}{C} + Ri_1 + M\frac{di_2}{dt} = 0 \\ (2)\; L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{Q_2}{C} + Ri_2 + M\frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

$e_2 = -M\frac{di_2}{dt}$

les deux oscillateurs sont identiques.

théoriquem^t $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

- Détermination de ω_0



A l'oscilloscope on se place en mode XY à la résonance on a un déphasage de 90°

on montre en mode normale

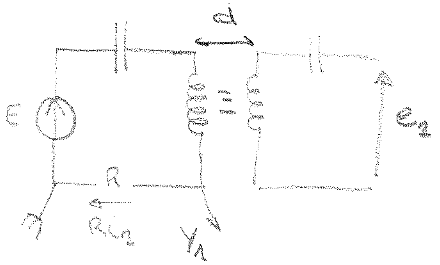
$\omega_0 =$ ±

2. Détermination de la cste de couplage.

Pour la connaître il faut remonter à la mutuelle, on va se placer en RSF, on va le faire pour deux distances données (on montrera qu'elle décroit avec la distance)

le voltmètre (oscillo) à très forte impédance ⇒ $i_2 = 0$

$e_1 = -M\frac{di_2}{dt}$ ⟶ $e_2 = j\omega M i_2$ ⟶ $\boxed{M = \frac{e_2}{i_1\omega}}$



d (en cm)	M (en H)
0	5×10^{-3}
6,6	1×10^{-3}
4cm.	

$$M = \frac{V_2 \cdot R}{V_1 \cdot 2\pi f} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta V_2}{V_2} + \frac{\Delta V_1}{V_1} + \underbrace{\text{précision de } d, \theta \dots}_{23\%}$$

3. les deux oscillateurs couplés

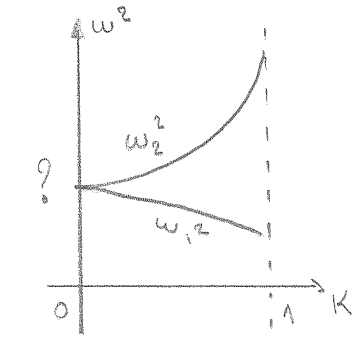
Si on découple nos équations (1) et (2) on trouve encore une fois deux solutions de pulsations différentes ω_1 et ω_2

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1+K} \quad \text{avec } K = \frac{M}{L}$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{1-K}$$

Cette fois les deux pulsations dependent de la constante de couplage K(M)

• Etude de la variation de ω_1 et ω_2 en fonction de K.



. Avec un oscilloscope on montre qualitativement l'écart des ω_i en fonction de d.

. Pour d très grand $\omega_1 = \omega_0$

on montre pour 0cm 4cm 6cm

on regarde aussi le générateur pour mettre en évidence les deux frequences. (vobulation de 3KHz à 5KHz ni 500ms)

• Mesure de f resonance pour d = 4 cm . et $V_1 = 1 V_{pp}$.

$f_2 = 3,55$ KHz $\pm$ 0,02 KHz $\longrightarrow 2,23 \times 10^4$ Hz $\pm$

$f_1 = 3,380$ KHz $\pm$ 0,01 KHz $\longrightarrow 2,12 \times 10^4$ Hz $\pm$

• à 4cm $K = \frac{M}{L} = \frac{2,1 \times 10^{-3}}{44,99 \times 10^{-3}} = 4,66 \times 10^{-2}$

$\omega_0 = 2,17 \times 10^4$ Hz

d'où
$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\omega_{1th}^2} = \sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{1-K}} = \left(\dfrac{2,17 \times 10^4}{1 - 4,66 \times 10^{-2}}\right)^{1/2} \Rightarrow \omega_{1th} = \underline{2,23 \times 10^4 \text{Hz}} \\ \omega_{2th} = \sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{1+K}} = \left(\dfrac{2,17 \times 10^4}{1 + 4,66 \times 10^{-2}}\right)^{1/2} = \underline{2,121 \times 10^4 \text{ Hz.}} \end{array} \right.$$

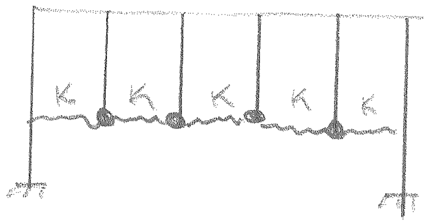
• Calcul d'incertitude.

On estime que K est donné à 23%. (après plusieurs mesures)

$\frac{d\omega_1}{\omega_1} = \frac{1}{2} \frac{dK}{1-K}$ soit ω_1 à 0,6% près

$\frac{d\omega_2}{\omega_2} = \frac{1}{2} \frac{dK}{1+K}$ soit ω_2 à 0,5% près

III. Oscillateurs couplés à 4 d° de liberté.



PFD : $m\dfrac{d^2x_n}{dt^2}+K(x_n+x_{n-1})-K(x_{n+1}-x_n)+\dfrac{mg}{\ell}x_n=0$

solution de la forme $A\cos kx\cos\omega t$.

relation de dispersion : $\boxed{\omega^2=\omega_0^2+\dfrac{4K}{m}\sin^2\dfrac{p\pi}{2(N+1)}}$

$\boxed{\omega_0^2=g/\ell}$

• On fixe les masses pour n'avoir que 1, 2, 3, ou 4 oscillateurs couplés, on utilise video com pour enregistrer les oscillation des masses puis on fait une TF pour trouver ω_i

N	ω_1 (Hz)	ω_2	ω_3	ω_4
1	14,26			
2				
3	8,98	14,45	18,53	
4	7,85	12,37	16,21	19,16

N : nb d'oscillateurs couplés.

Conclusion

• Levée de dégénérescence si les deux oscillateurs sont identiques, avec une dépendance en la constante de couplage.

• N d° de liberté ⇒ N pulsations propres.

• On pourrait travailler avec des oscillateurs non identiques, mais l'on ne changerait pas le pgc on aurait encore modification des pulsations propre en fonction de la constante de couplage.

Conseil : gagner du tps au I en faisant très rapidement les mesures ou alors prendre celle effectués en préparation et passer tout de suite au cas du couplage.

l'énergie de couplage ne se met pas facilement en évidence, on peut ne pas aller jusque là et s'arrêter au $E_{tot}=E_{c_1}+E_{c_2}+E_{p_1}+E_{p_2}$