

TIP 36 Oscillateurs couplés.

Biblios : QI Mécanique
QIV Electricité
BUP 867

I - Couplage de 2 pendules pesants par un fil de torsion

1. Mesure de C

2. Décomposition du mouvement

→ mode symétrique

→ — antisymétrique

→ Combinaison des 2 modes.

3. Aspect énergétique

II - Couplage de 2 RLC série par une capacité.

1. Décomposition de la réponse en modes.

2. Influence du couplage.

III - Couplage de 3 pendules par ressorts.

1. Vérification de la loi de dispersion.

2. Visualisation des 3 modes.

I - Couple entre 2 pendules pesants par fils de torsion

étape 0 : Caractériser le système.

- équilibrer le pendule à vide pr l'atténuer de la contribution du poids de la tige au moment cinétique du système.
- Mesurer J de la même manière (pendules découplés).

$$\text{PFD} \rightarrow J = \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 mgl \quad T_0 = 1,77 \text{ s}$$

$$\text{ici } J_{\text{masse}} = (9,439 \pm 0,004) \text{ kg m}^2.$$

↳ identique pr les 2 masses (m_l, m_r)

PFD au 2 masses :

$$J \ddot{\theta}_1 = -mgl \theta_1 - C(\theta_1 - \theta_2)$$

$$J \ddot{\theta}_2 = -mgl \theta_2 - C(\theta_2 - \theta_1).$$

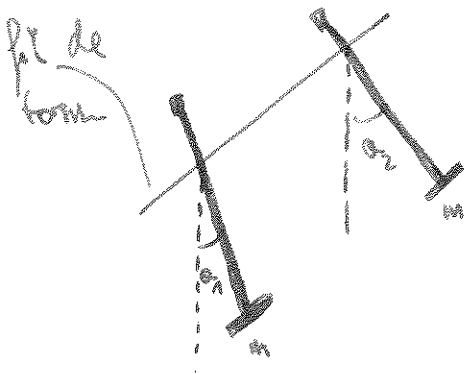
Équa. diff couplés en θ_1 et θ_2 → on veut découpler les équations.

1. Mesure de C

On bloque l'un des 2 pendules à $\theta_2 \equiv 0$ par ex.

$$\rightarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{mgl+C}{J} \theta_1 = 0$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl+C}}$$



$$C = 3 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - mgl.$$

$$C = \left(\begin{array}{c} \pm \end{array} \right) Nm.$$

$$\frac{\Delta C}{C} \approx \frac{\Delta J}{J} + 2 \frac{\Delta T}{T}$$

$\sim 1\% \qquad \sim 0,6\%$

2. Décomposition du mouvement

$$\begin{aligned} u &= \theta_1 + \theta_2 \\ v &= \theta_1 - \theta_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u &= \theta_1 + \theta_2 \\ v &= \theta_1 - \theta_2 \end{aligned}} \right\} 2 \text{ modes propres}$$

$$\ddot{u} + \frac{mgl}{J} u = 0 \quad \rightarrow \text{oscillations à } T_0.$$

$$\ddot{v} + \frac{mgl + 2C}{J} v = 0 \quad \rightarrow \text{oscillation à } T_A$$

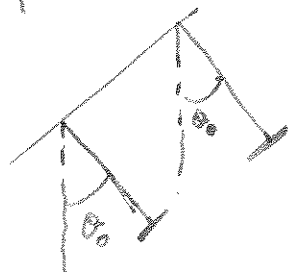
$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl + 2C}}.$$

a. Mode symétrique u.

on sélectionne le mode $\bar{y}$ au CI.

CI : $\theta_{10} = \theta_{20} \rightarrow v_0 = 0$ et $v \equiv 0$.

on se voit que le mode u



→
Synchrone



2 sprints
en phase

→ oscillations à T_S

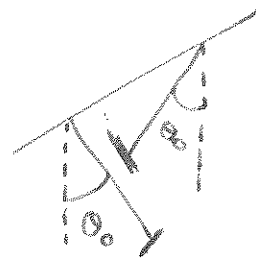
$$T_S = \left(\pm \right) s \quad (0,3\%)$$

$$\rightarrow f_0 = \left(\pm \right) \text{kHz}$$

b. Mode antisymétrique

CI : $\theta_{A0} = -\theta_{Z0}$

→ oscillations à T_A .



~~op. de phase~~

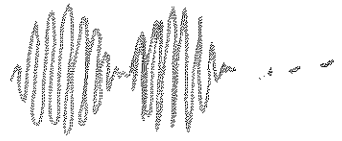
$$\left| \begin{array}{l} T_A = \left(\pm \right) s \quad (0,3\%) \\ T_{Arho} = (1,64 \pm 0,03) s \end{array} \right.$$

$$f_A = \left(\pm \right) \text{kHz}$$

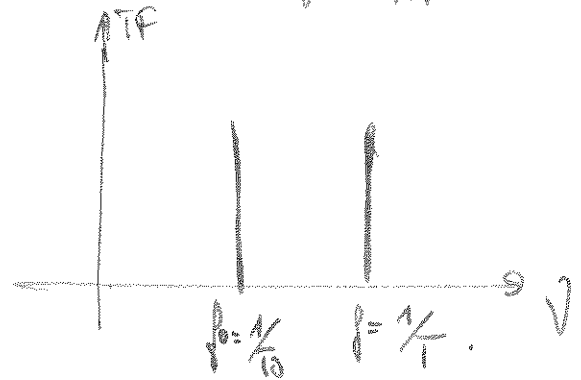
c. Combinaison des 2 modes

CT : quelconque.

→ on observe des battements.



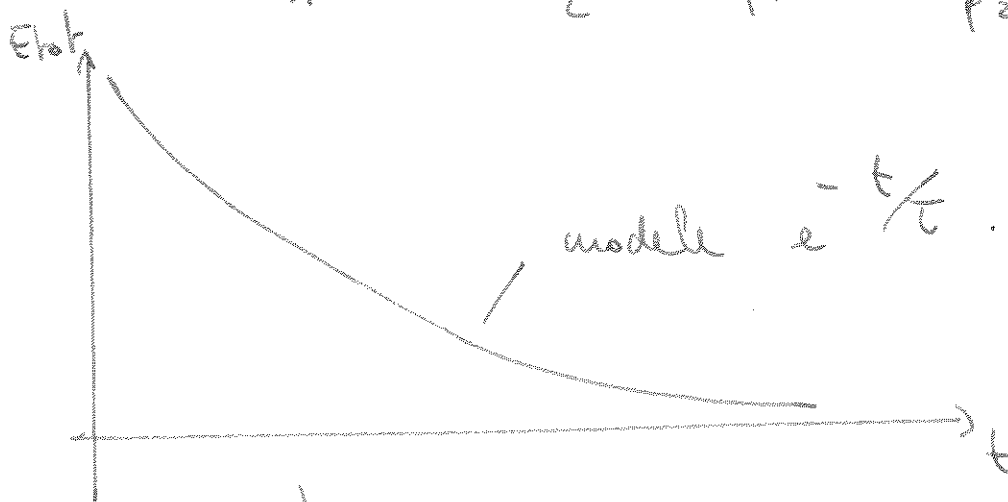
on prend la TF



→ le mixt est bien décomposé en les 2 modes.

3. Aspect énergétique.

$$\bar{E}_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2}_{E_{K1}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \dot{\theta}_2^2}_{E_{K2}} + \underbrace{mgl \frac{\theta_1^2}{2}}_{E_{P1}} + \underbrace{mgl \frac{\theta_2^2}{2}}_{E_{P2}} + \underbrace{\frac{1}{2} c(\theta_1 - \theta_2)^2}_{E_{\text{couplage}}}$$

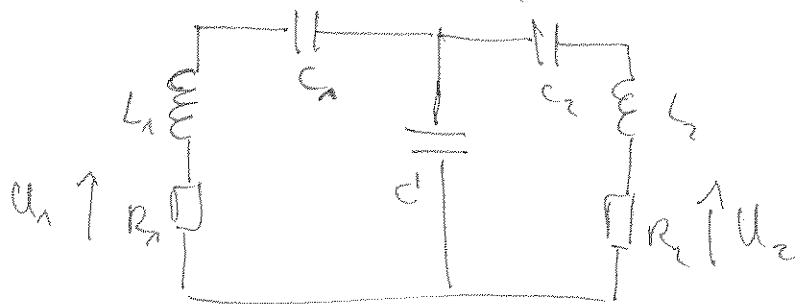


$$Q = \frac{\omega_0}{2} J =$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3,55$$

II - Couplage capacitif de 2 RLC série.

Etape 0 : régler les 2 RLC de sorte qu'ils aient la même fréquence de résonance (découplés).



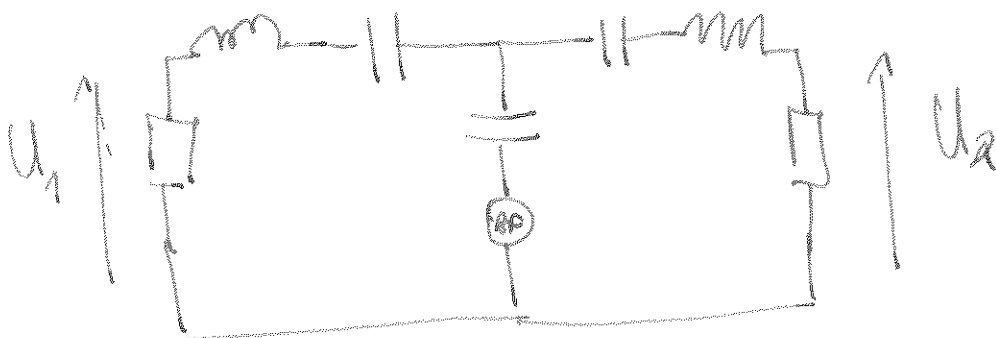
ici : $f_0 = (14,65 \pm 0,01) \text{ kHz}$

$R_1 = 100 \Omega$	$R_2 = 100 \Omega$
$C_1 = 9,0103 \mu\text{F}$	$C_2 = 9,0106 \mu\text{F}$
$L_1 = 11,39 \text{ mH}$	$L_2 = 11,42 \text{ mH}$

De la même manière que pour les pendules, on a des quia diff. couplés en U_1 et U_2 que l'on peut découpler & avoir modes propres.

1 - Découplage en modes propres.

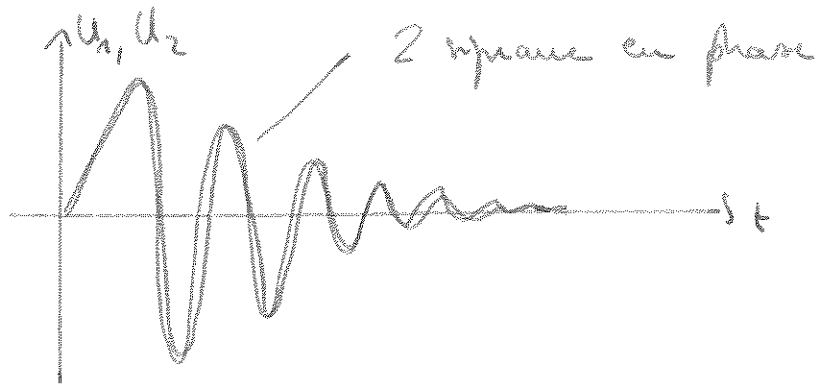
a - Mode symétrique



BF:



$f_{BF} \ll f_0$
 $\downarrow$
 100 kHz

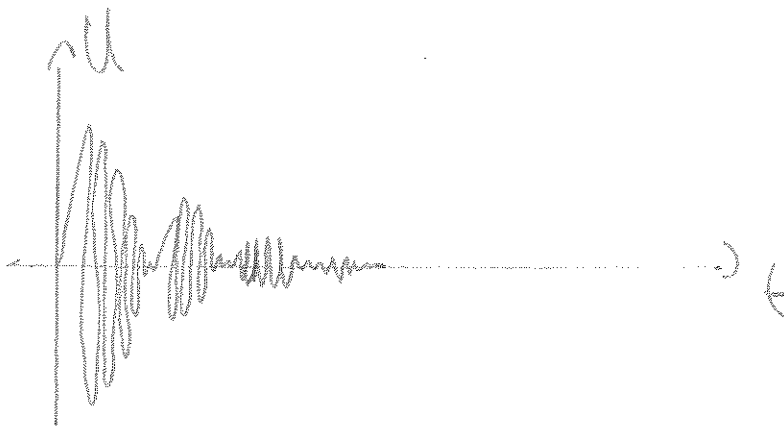
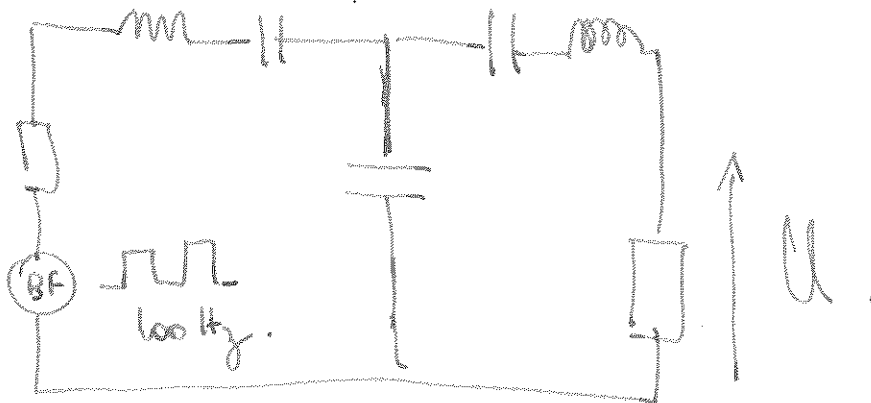


→ FFT :

$$f_s = \left(\begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right) \text{ kHz}$$

$$f_{\text{sché}} = f_0 \sqrt{1 + \frac{2C}{C_1}} = (19,0 \pm 0,4) \text{ kHz}$$

2. Construction des 2 modes :



FFT :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_s = \left(\begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right) \text{ kHz} \\ f_A = f_0 \end{array} \right.$$

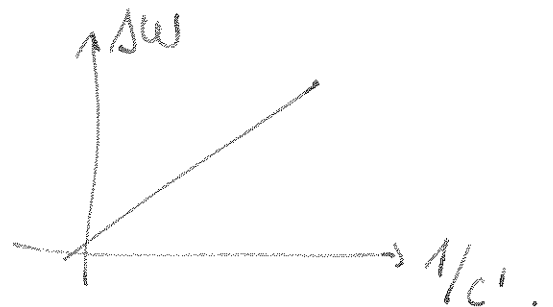
2. Influence du couplage.

Soit $K = \frac{C}{C+C'}$ la constante de couplage.

du part unques $\frac{|\omega_s - \omega_A|}{\omega_0} \approx \frac{C}{C'}$

du voirfic que $C' \uparrow \Rightarrow \Delta\omega \downarrow$.

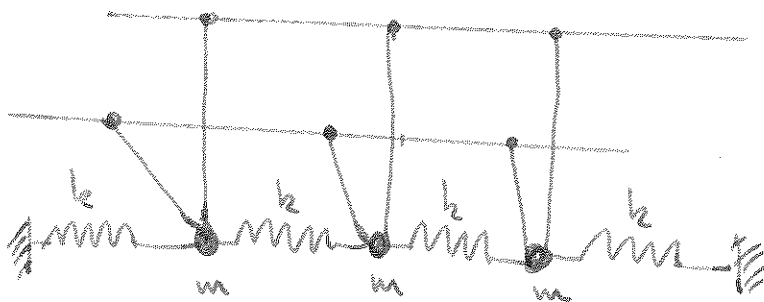
$$\Delta\omega = f\left(\frac{1}{C'}\right) \rightarrow$$



III. Pendules couplés par ressorts

- Etape 0 :
- déterminer la raideur des ressorts (on suppose les 4 identiques).
 - déterminer la période propre des pendules (à la m par les 4).

1 - Vérification de la loi de dispersion



on envoie une impulsion $\rightarrow$ couplent ttes les fréquences

le système va sélectionner les fréquences des 3 modes propres

bas Video COPI.

TF [signal] $\rightarrow$ 3 frequences.

$$f_1 =$$

$$f_2 =$$

$$f_3 =$$

$$k_z$$

$$k_z$$

$$k_z.$$

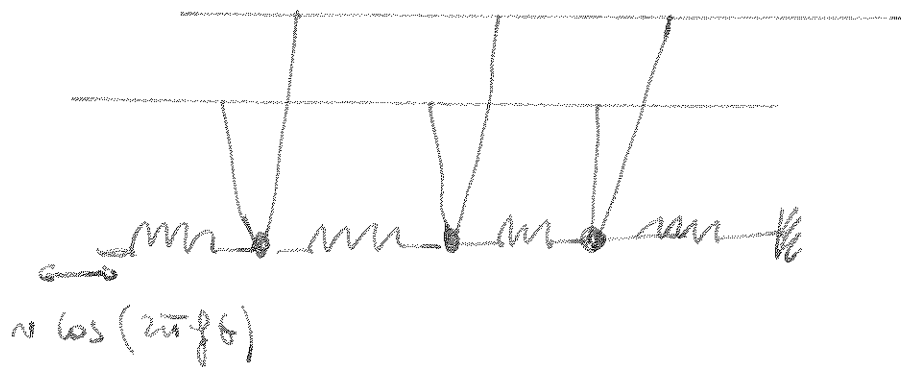
$$f_{1 \text{ théo}} = (1,44 \pm 0,04) k_z.$$

$$f_{2 \text{ théo}} = (2,31 \pm 0,07) k_z$$

$$f_{3 \text{ théo}} = (2,94 \pm 0,09) k_z.$$

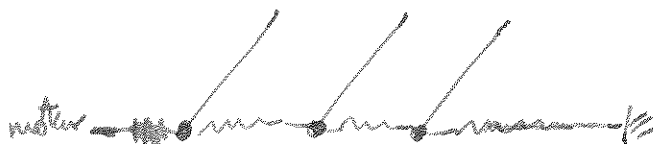
2. Visualisation des 3 modes.

On écrit se un moteur pas à pas.

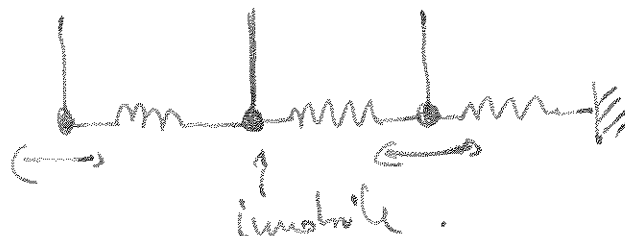


par $f = f_1$: mode 1 sélectionné.

3 masses en phase.



par $f = f_2$: mode 2 sélectionné.



$f = f_3$: mode 3 sélectionné.

2 masses extrêmes en phase
masse centrale en opp. de phase.

Rq : pr les fréquences théoriques, on
peut établir la relation de dispersion
qui donne la pulsation du mode
 p :

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 + \frac{4k}{m} nm^2 \left(\frac{p^2 \pi^2}{2(N+1)} \right)$$

$$\underline{N=3} \text{ car}$$

