

Bibliographie

- BOP 867 (4 pendules couplées)
 Quaranta III (couplage en élec)
 Quaranta I (pas indispensable, deux pendules couplées)
 + Perez mécanique

Introduction

Il y a couplage entre deux oscillateurs dès lors qu'il y a transfert d'énergie de l'un vers l'autre. Alors dans l'équation différentielle qui régit l'oscillateur 1 (ED du 2nd ordre) interviennent une ou deux de la variable de l'oscillateur 2.

$$a_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 = f(x_2)$$

$$f(x_2) = \begin{cases} f(x_2) & \text{élect} \\ m_2 \ddot{x}_2 & \text{mécan} \\ f(x_2) & \text{résistif (dissipatif)} \\ f(x_2) & \text{capacitif ou inductif} \end{cases}$$

Il en existe aussi des beaucoup plus compliquées, en particulier non linéaires... On va s'attacher à dégager les propriétés du couplage d'oscillateurs, l'un des cas "simples".

I. Couplage de deux oscillateurs : pendules pesants couplés par un fil de torsion

- A. Faire en préparation (non présente)
 - équilibrer les pendules en l'absence des masses en bas, en $\dot{x}=0$, et sur la position des masses en haut (on peut en rajouter si besoin). Ainsi le centre de gravité est confondu avec l'axe de rotation.
 - rajouter des masses en bas.

On choisit de travailler avec $m \approx 1 \text{ kg}$. (100g)

- mesure de la période propre des oscillations du pendule libre
 plusieurs possibilités : acquisition + TF alors $\Delta f_0 \approx \frac{1}{\text{temps d'acquisition}}$

pour 1 min, on a $\Delta f_0 \approx 0,02 \text{ Hz}$ $\left\{ \frac{\Delta f_0}{f_0} \approx 1\% \right.$
 comme $f_0 \approx 2 \text{ Hz}$

ou comptage des périodes à la main, avec un chronomètre. Il y a alors une erreur due au temps de réaction au déclenchement du chrono. Comme elle est à la même au déclenchement et à l'arrêt, on estime que $\Delta t_{\text{réaction}} \approx 0,1 \text{ s}$ (à valider par des tests pour vérifier si c'est vraiment impair, ce qui n'est pas vraiment le cas ici)

pour diminuer l'importance de cette erreur, on compte ≈ 50 périodes.

$$T_0 = 1,775 \pm 0,002 \text{ s}$$

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} \approx 0,1\% \text{ on a gagné 1 facteur 10 !}$$

$$\omega_0 = 3,540 \pm 0,004 \text{ rad.s}^{-1}$$

→ On en déduit T TMC: $T\ddot{\theta} + m g a \theta = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{m g a}{\omega_0^2}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta a}{a} + 2 \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = 0,1\% + 0,1\% + 2 \cdot 0,1\% = 0,4\%$$

$$T = 0,432 \pm 0,004 \text{ kg.m}^2$$

I-1. Constante de couplage

On couple les pendules et on en fixe 1.

TMC

$$T\ddot{\theta} = -m g a \theta - C \theta \text{ soit } \ddot{\theta} + \frac{m g a + C}{T} \theta = 0$$

on note $\omega_0^2 = \frac{m g a + C}{T}$ on mesure ω_0^2 (chronomètre avec 50 rad.s⁻¹ en préparation: $3,65 \pm 0,02 \text{ rad.s}^{-1}$)

$$\Rightarrow \omega_0^2 =$$

$$\text{On en déduit } C = T \omega_0^2 - m g a$$

$$C = 0,34 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$$

Exactitude: oblige de passer par une formule moche...

$$\Delta C = 2 T \omega_0 \Delta \omega_0 + \omega_0^2 \Delta T - g a \Delta m - m g \Delta a$$

$$\text{Au, } \Delta C = 0,01 \Rightarrow C = 0,34 \pm 0,01 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$$

ça explique pourquoi on a cherché à avoir une très bonne précision sur ω_0^2 et ω_0 ... Comme C est la différence de deux termes de même ordre de grandeur, les incertitudes sont très grandes.

I-2. Efficacité du couplage

But: mettre en évidence que le couplage est maximal lorsque les deux pendules sont identiques.

On met une petite masse sur le pendule 2, on le lance: le 1 se met en mouvement mais son amplitude est limitée...

On augmente m_2 jusqu'à avoir $m_2 = m_1$: couplage maximal.

I-2. Mise en évidence des modes propres

Δ régler offset des potentiomètres.

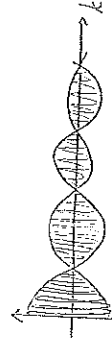
Qualitatif mise en évidence de 2 modes propres

pendules lancés en phase se conservent.
 pendules lancés en opposition de phase

On lance le premier mobile, l'autre étant arrêté. Acquisition de 3 min, 8.492 points (on veut faire une TF). En fait le plus long est le mieux pour la précision de la TF... On acquiert le signal des 2 pendules.

on voit apparaître des battements

→ 2 fréquences.



Plus de choses à dire pendant ce temps:

- sur 1 pendule : transfert $\varepsilon_p / \varepsilon_c$
- sur les 2 pendules : transfert d'énergie mécanique

TF : on trouve $\omega_+ = \pm$ MHz
 $\omega_- = \pm$ MHz

D'où viennent-elles ?

TMC : $\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -mga\theta_1 - c(\theta_1 - \theta_2) \\ J\ddot{\theta}_2 = -mga\theta_2 - c(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$

$\omega_0^2 = \frac{mga}{J}$; $\omega_0^2 = \frac{mga + c}{J}$
 $\omega_+^2 - \omega_0^2 = \frac{c}{J}$; $\omega_-^2 - \omega_0^2 = -\frac{c}{J}$

déterminant $\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \\ \omega_0^2 - \omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (2\omega_0^2 - \omega^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$

soit $\begin{cases} \omega_- = \omega_0 \\ \omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{c}{J}} \end{cases}$

On trouve $\omega_{\text{attendu}} = 3,540 \pm 0,004 \text{ rad.s}^{-1}$
 $\omega_{\text{attendu}} = 3,756 \pm 0,004 \text{ rad.s}^{-1}$ (on suppose π incertitude sur ω_{attendu} et ω_{attendu})

I-4- Etude énergétique

Feuille de calcul Synchronie, pour ε_{AO} et ε_{A1} :

lissage d'envie

$\begin{cases} \varepsilon_i = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_i^2 \\ \varepsilon_{pi} = \frac{1}{2} mga \theta_i^2 \end{cases} + \varepsilon_{couplage}$

$\varepsilon_{couplage} = \frac{1}{2} c (\theta_1 - \theta_2)^2$
 $\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{m1} + \varepsilon_{m2} + \varepsilon_{couplage}$

Montrer le transfert d'énergie mécanique entre les deux oscillateurs, et la conservation de l'énergie mécanique totale. Diminution due aux frottements (solide et fluide).

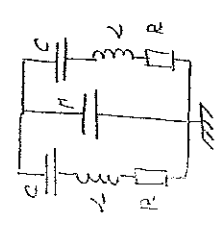
On peut insister sur l'énergie de couplage, dire quelle est nulle pour le mode 1 (en phase), qu'elle oscille avec π amplitude pour le mode 2.

On quantifie le couplage entre deux oscillateurs. Mais on ne peut pas faire varier la constante de couplage: on passe alors à 1 système équivalent en électronique.

II - Influence de la constante de couplage: couplage capacitif de deux oscillateurs RLC.

II-1 - Ajustement des oscillateurs

montage:

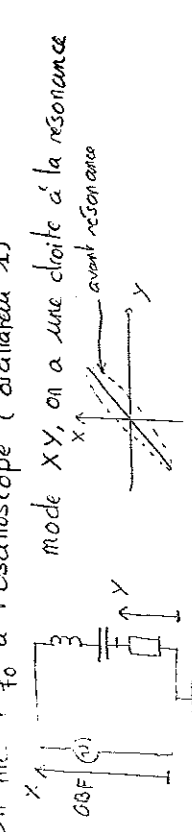


on prend $R = 50 \Omega$ (impédance du GDF)
 $L = 11,55 \text{ mH}$
 $C = 20 \text{ nF}$

pour être plus souple: R boîtes à décades
 C condensateur variable
 Γ condensateur de couplage variable.

$f_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}} = 10,47 \text{ kHz}$
 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 30$. On veut Q grand, en pratique on est limité pour trouver deux bobines identiques.

On mesure f_0 à l'oscilloscope (oscillateur 1)

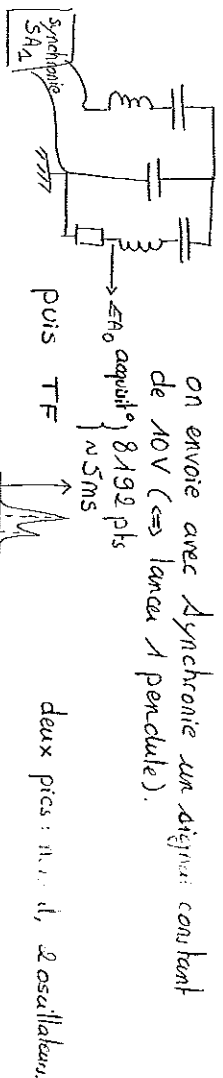


On minimise les composants de l'oscillateur 1 par ceux du 2. Bot: avoir le π f_0 . On ajuste alors C.

(boîte à décade: on est limité pour ajuster).

Pour l'amplitude sur f_0 : regarder sur l'oscille la plage de f_0 qui "concentre" (droite).

II - 2. Fréquences des modes propres



Influence de Γ sur ω_+ et ω_- ?

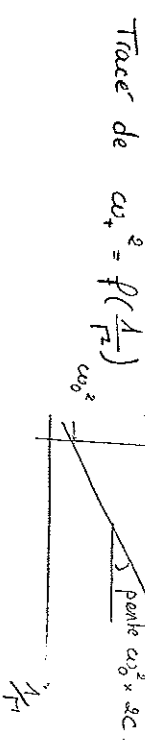
Voir quaranta par calculs (c'est juste loi des mailles + loi des n. id.)

$$\omega_- = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_+ = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\Gamma}{L}}$$

On trace $\omega_- = f(\Gamma)$ et $\omega_+ = f(\Gamma)$

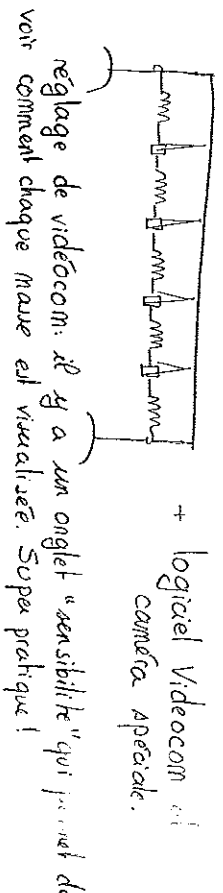
Plus Γ est faible, plus les pulsations propres sont écartées : le couplage Γ écarte les pulsations propres.



$\Rightarrow$ jusque là, couplage de deux oscillateurs. Possible de faire plus ?

Rq - possible de remplacer le III par un couplage inductif par inductance mutuelle.

III - Couplage de plusieurs oscillateurs : chaîne de pendules, couples par des ressorts



III-1 - Modes propres

On lui a 1 des 4 pendules. Acquisition ~ 25s, puis TF (celle droit sur la courbe, puis TF, sélectionner l'étendue de la courbe). Annoter sur les fréquences : 1 - Total

↑

On 20/1/19

(1,29 Hz)
(1,95 Hz)
(2,62 Hz)
(2,97 Hz)

On peut visualiser les modes avec un moteur pas à pas : on cherche les fréquences de résonance.

Visualisation des modes

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \end{array}$



A diagram showing a block on a curved surface. The block is at the top of the curve, with an upward arrow indicating its initial velocity. Below it, the block is shown at a lower position on the curve, with a downward arrow indicating its acceleration.

III - 4 - Relation de dispersion

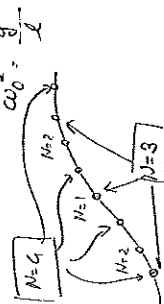
On fait la même chose avec 3 oscillateurs, 2 oscillateurs et 1 oscillateur (on fixe l'un des autres avec pince + potence). On relève les fréquences.

Pulsation i. modes propres:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{m} \frac{\sin^2 \frac{p\pi}{2}}{2(N+1)}$$

N nombre d'oscillateurs
 $1 \leq p \leq N$
 K raideur des ressorts

On face frequency = $\rho \cdot t \left(\frac{P}{N+1} \right)$ $\rightarrow \uparrow$



On peut essayer de faire un fit en $\sin^2$ (Δ mettre Regressi en radians!),
ou de faire la droite $\omega^2 = \text{fit} \left(\sin^2 \frac{p \cdot \omega_1}{2(N+1)} \right)$

Conclusion synthétique : couplage plus efficace pr des oscillateurs identiques, modes propres, transfert d'énergie, couplage écoute les modes propres.

Courbure : relation de dispersion $\rightarrow$ vers la propagation d'ondes.