

MP36: Couplage des oscillateurs

par David & Sergueï!

2012-2013

Rapports de jury

- 2012** Les candidats peuvent présenter des systèmes couplés simples, en mécanique, en électricité... mais il faut analyser correctement les couplages pour éviter une mauvaise utilisation de formules toutes faites. Le jury met en garde les candidats contre l'utilisation de dispositifs dont la modélisation n'est pas comprise.
- 2011** Le jury met en garde les candidats contre l'utilisation de dispositifs dont la modélisation n'est pas comprise.
- 2010** Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples. D'autre part, il faut réaliser le montage correspondant aux équations que l'on écrit (ou l'inverse), sinon l'interprétation n'est pas correcte. Enfin, les couplages non- linéaires conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, qui ont de nombreuses applications.
- 2006** Les systèmes propagatifs à constantes réparties n'ont leur place dans ce montage qu'à condition de faire référence explicitement au couplage lors de la manipulation présentée.
- 2005** Ce montage ne doit pas se limiter aux filtres passifs. D'autres domaines que l'électronique peuvent également être abordés.
- 2004** L'étude de la phase est trop souvent absente de ces montages alors qu'elle fournit des relations complémentaires non redondantes à celle de l'amplitude.
- 1999** L'étude du couplage d'oscillateurs identiques ne permet pas de couvrir la totalité du sujet.
- 1997** Dans l'étude de deux oscillateurs couplés, il ne faut pas s'apesantir sur la détermination des paramètres des oscillateurs indépendants, mais il faut plutôt considérer les deux régimes, oscillations libres et forcées. Il est aussi possible d'étendre l'étude à des oscillateurs comportant plus de deux degrés de liberté.

Bibliographie

- (i) Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome I, La Mécanique* (Pour le couplage des pendules).
- (ii) Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome IV, Electricité Et Applications (Pour le couplage des RLC)*.
- (iii) Pérez, *Mécanique (Pour le soliton et un peu de théorie en plus.)*.
- (iv) Duffait, *BUP 867, Octobre 2004, Etude expérimentale des oscillateurs mécaniques (Pour vidéocom, les 4 oscillateurs couplés.)*.

Table des matières

	page
1 Pendules pesants couplés par un fil de torsion	3
1.1 Pendule libre	3
1.2 Efficacité du couplage	4
1.3 Pendules couplés	4
1.4 Modes propres	4
1.5 Etude énergétique	4
2 Couplage par mutuelle inductance	6
2.1 Accord des oscillateurs	6
2.2 Mutuelle inductance	6
2.3 Dépendance des modes propres.	7
3 Couplage de 4 oscillateurs	8
3.1 Mesure des fréquences propres	8
3.2 Observation des modes	8
3.3 Relation de dispersion	9
4 Conclusion	9

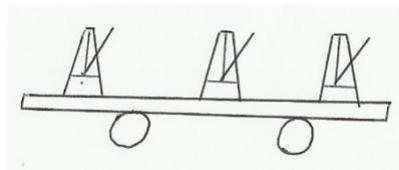
Introduction

Deux systèmes sont couplés s'ils agissent l'un sur l'autre. On dit que deux oscillateurs sont couplés quand chacun exerce une action sur l'autre et modifie son mouvement. L'amplitude de chaque oscillation est alors donnée par une superposition de modes propres dont la fréquence fait intervenir la fréquence propre des oscillateurs individuels ainsi que le couplage.

Expérience d'introduction : Couplage de deux métronomes.

Matériel : 2 métronomes, 1 planche de bois, 2 canettes (vides).

Remarque : vérifier les métronomes avant, il faut que les fréquences soient proches et régulières.



On entend des battements qui disparaissent au bout d'une trentaine de secondes.

Remarque : Il faut utiliser le métronome blanc qui a un lourd contrepois, et permet un meilleur couplage inertiel, proportionnel à l'accélération. Mettre donc les métronomes à une fréquence rapide, par exemple 208 bpm (battements par minute).

On voit qu'il y a couplage et que les métronomes s'accordent. Il y a donc un couplage qui a pour effet de synchroniser les phases ! De façon générale le couplage peut agir sur la phase ou sur l'amplitude des oscillateurs. Ici on ne sait pas décrire le couplage simplement, il est probablement même non linéaire. Dans la suite, on se limitera à des couplages linéaires d'oscillateurs linéaires à 1 degré de liberté. On commencera avec deux oscillateurs.

Remarque : Fonctionne une fois sur deux, il faudrait des métronomes avec plus d'inertie.

Ainsi, l'équation différentielle qui régie l'évolution du mouvement d'un oscillateur s'écrit :

$$a_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 = f(x_2)$$

Selon l'expression de cette fonction, on peut distinguer différents couplages.

Dépendance de f	En électricité	En mécanique
\ddot{x}_2	inductif	inertiel
\dot{x}_2	résistif	dissipatif
x_2	capacitif	élastique

On étudiera un couplage élastique puis un couplage inductif, le couplage en vitesse présentant peu d'intérêt en pratique.

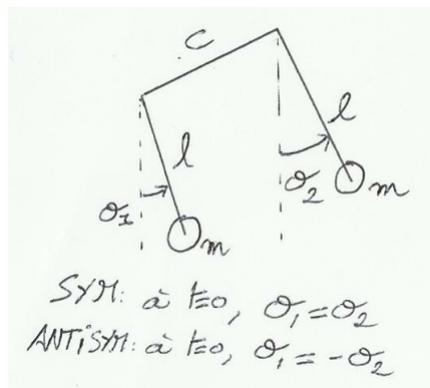
1 Pendules pesants couplés par un fil de torsion

Expérience : Pendules couplés par un fil de torsion.

Matériel : Dispositif ENSL.

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \theta_1 - C(\theta_1 - \theta_2) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g l_2 \theta_2 - C(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$$

Nous allons mettre en évidence le couplage, l'existence des modes et les caractériser.



1.1 Pendule libre

Avant la présentation :

- Vérifier la linéarité du capteur. - Régler les zéros des capteurs en mettant le gain au maximum. Régler le gain en butée pour un calibre de 10V.

- Enlever le couplage. (Ne pas oublier cette étape !)
- Equilibrer les pendules en ajoutant une masse au dessus. Ils ne doivent pas bouger une fois lâchés sans vitesse initiale. En pratique on ne peut pas réaliser cette condition quelquesoit l'angle, car apparemment l'axe ne passe pas par le centre. Penser à faire cette opération avec les supports pour les masses déjà fixés à la bonne hauteur. On effectue cette opération en venant en butée et en réglant jusqu'au décollage du pendule (En tout cas c'est comme ça que j'ai choisi de le faire). Un réglage fin peut être effectué avec les masses qui se vissent au dessus.
- Ajouter les masses en bas. On choisira $m = 1,000 \pm 0,002$ kg à 0,2% près. Cette incertitude provient d'une pesée effectuée avec une simple balance numérique.

Pendant la présentation : (Au choix et selon le temps disponible)

- Mesurer la fréquence propre d'un pendule seul (On a vérifié en préparation que le second avait la même fréquence propre). On utilise synchronie et on fait une TF. On choisit 8192 points et une durée de trois minutes. On mesure f_0 et on en déduit le moment d'inertie d'un pendule avec la formule $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$. On trouve $f_0 = 628$ mHz à 6 mHz près soit 1%. On a $g = 9,810 \pm 0,005$ N/kg soit à 0,5 % près. On mesure également $l = 40$ cm à 0,5 cm près soit 1,25% d'erreur. On en déduit $mgl = 3,9 \pm 0,2$ J à 4% car $\frac{\Delta(mgl)}{mgl} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta l}{l}$. On calcule ainsi l'incertitude sur $I = \frac{mgl}{\omega_0^2}$ soit $\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta(mgl)}{mgl} + 2 \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = 3\%$. Finalement, $I = (2,5 \pm 0,1) 10^{-1}$ kg.m².

Remarque : Pour donner un ordre de grandeur du facteur de qualité à partir d'un signal amorti, on peut utiliser le décrétement logarithmique. $\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right) = \frac{1}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} \simeq \frac{1}{Q}$. Pour le pendule libre on trouve environ $Q=100$. C'est d'ailleurs une mesure possible.

1.2 Efficacité du couplage

- On montre que si les pendules sont désaccordés (pendule 2 avec I différent, on change donc l et non pas m), on obtient un couplage peu efficace car les fréquences propres sont différentes. Pour cela on lance un des deux pendules, on remarque que celui ci devient momentanément immobile seulement si les oscillateurs sont accordés. Ainsi pour étudier le couplage, on va rendre les oscillateurs identiques, dans le sens où leurs fréquences propres seront les mêmes aux incertitudes près.

1.3 Pendules couplés

- On fixe le deuxième pendule, on couple les pendules (veiller à ce que la tige soit au milieu des mandrins) et on recommence. On en déduit la constante de couplage avec la formule $\omega_0^{2'} = \frac{mgl+C}{I}$. On trouve $f_0' = 650$ mHz à 6 mHz près soit 1%. On calcule l'incertitude sur $C = I(\omega_0^{2'} - \omega_0^2)$ donc l'incertitude est de 60%. Finalement, $C = (2,5 \pm 1,4) 10^{-1}$ J.

1.4 Modes propres

- On met donc la même masse sur le deuxième pendule. On lance une acquisition de plusieurs minutes (8192 points car on va faire une TF). On remarque les battements, signe de la superposition de deux fréquences (la période des battements est justement reliée à l'écart entre les fréquences.) Pendant ce temps, on explique au tableau les fréquences attendues des modes après avoir illustré qualitativement le couplage, en décrivant le mouvement apparent des pendules. Il y a transfert d'énergie entre les deux oscillateurs, alors que l'énergie dans chaque mode dépend des conditions initiales. On peut aussi parler des paramètres d'acquisition, de TF... Lire ensuite le résultat après transformée de Fourier, et comparer aux valeurs attendues par le calcul ci dessous.

Le formalisme matriciel est alors bien utile. D'après les formules citées en début de paragraphe, dans l'approximation des petits angles, on cherche :

$$\begin{vmatrix} \omega_0^{2'} - \omega^2 & \omega_0^{2'} - \omega_0^2 \\ \omega_0^{2'} - \omega_0^2 & \omega_0^{2'} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui nous donne $\omega_S = \omega_0$ et $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2C}{J}}$

Soit, tous calculs faits : $f_S = (628 \pm 6)$ mHz et $f_A = (671 \pm 20)$ mHz.

On mesure $f_S = (616 \pm 6)$ mHz et $f_A = (672 \pm 6)$ mHz. On a probablement une erreur à cause de l'accord non parfait entre les deux pendules. La linéarité du capteur ayant été vérifiée.

1.5 Etude énergétique

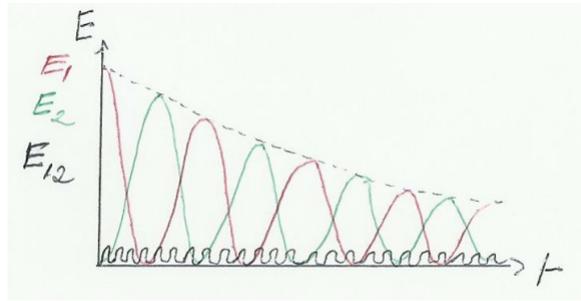
Terminer par une étude énergétique. Montrer l'échange d'énergie entre les deux pendules et la conservation de l'énergie totale, sans oublier l'énergie de couplage. Pour cela on peut faire une acquisition sur 20 secondes avec 1024 points. L'énergie de couplage est maximale pour le mode antisymétrique et nulle pour le mode symétrique. C'est d'ailleurs l'occasion de les montrer si le temps ne commence pas à manquer, et retrouver par TF les fréquences mesurées avant pour chaque mode.

On a : $E_{ci} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}_i$, $E_{pi} = mgl(1 - \cos(\theta_i))$ et $E_{couplage} = \frac{1}{2}C(\theta_1 - \theta_2)^2$.

Remarque : Rien ne sert de s'acharner à faire des lissages à répétition pour avoir une jolie courbe. Il vaut mieux diminuer le nombre de points par unité de temps. (Merci Helmy !)

Voici le code à taper dans synchronie : à savoir que coeff est là pour convertir les volts en radian (Attention le terme gain est réservé par synchronie.) E1 et E2 sont les énergies mécaniques des oscillateurs 1 et 2. E12 est l'énergie de couplage.

```
g=9.81 L=0.4 m=1 I=0.248 C=0.280
coeff=4.56e-2
theta1=(EA0-MOY(EA0))*coeff
theta2=(EA1-MOY(EA1))*coeff
theta1liss=LISSAGE(theta1)
theta2liss=LISSAGE(theta2)
vit1=DERIV(theta1liss,T)
vit2=DERIV(theta2liss,T)
vit1liss=LISSAGE(vit1)
vit2liss=LISSAGE(vit2)
E1=m*g*L*(1-cos(theta1liss))+1/2*I*vit1liss*vit1liss
E2=m*g*L*(1-cos(theta2liss))+1/2*I*vit2liss*vit2liss
E12=1/2*C*(theta1liss-theta2liss)*(theta1liss-theta2liss)
ETOT=E1+E2+E12
```



Remarque : Pour l'étude énergétique, il ne faut pas oublier de convertir la tension en radian. Il est également primordial de soustraire la valeur moyenne même si on a réglé le zéro au début. Enfin, effectuer la dérivée peut donner un signal bruité. Une solution : lisser une fois, dériver puis lisser la dérivée. Ensuite diminuer le nombre de points jusqu'à obtenir une courbe correcte. Le BUP propose aussi ses propres paramètres d'acquisition à ce sujet, et une solution efficace mais à la limite de la triche.

Remarque : Sur l'approximation des petits angles :

Angle	Erreur en %
10	0,5
20	2
30	5
40	9
50	14

Remarque : Un moment d'inertie faible permet de mieux séparer les fréquences des deux modes. De plus, il permet d'observer des oscillations plus rapides.

2 Couplage par mutuelle inductance

2.1 Accord des oscillateurs

Maintenant, on va s'intéresser à deux oscillateurs couplés par mutuelle inductance, ce qui va nous permettre de faire varier la constante de couplage, et ainsi étudier la dépendance des modes symétrique et antisymétrique en fonction de la force du couplage.

Expérience : Couplage par mutuelle inductance de deux circuits RLC.

Matériel : Deux bobines similaires fixées sur banc d'optique. Boîtes de résistance variable. Boîte de capacité variable.

On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + r_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} = 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + r_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne en théorie,

$$\omega_- = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}} \quad \text{et} \quad \omega_+ = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$$

Nous allons vérifier ces relations.

On choisit L élevé et R faible car $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

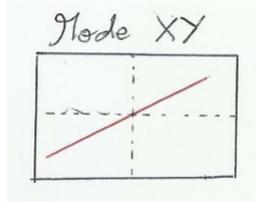
- On éloigne les deux bobines.

- On cherche la fréquence de résonance d'un oscillateur à l'aide d'un oscilloscope en mode XY, puis on accorde l'autre à l'aide de la capacité variable. On se règle sur $f_0 = 5\text{kHz}$.

On mesure au RLC-mètre :

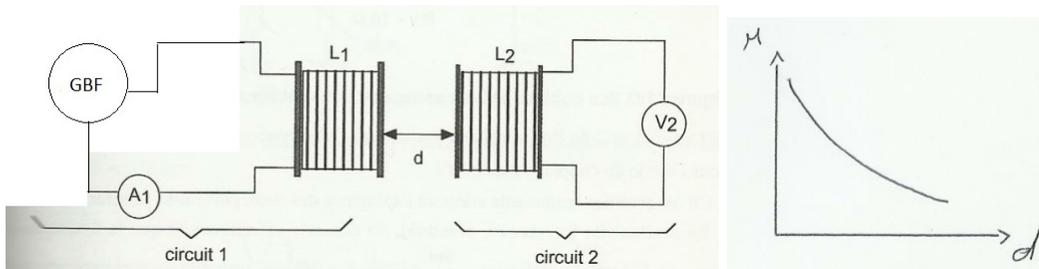
$$L_1 = (45,81 \pm 0,05) \text{ mH} \quad C_1 = (21,96 \pm 0,05) \text{ nF} \quad R_1 = (12,8 \pm 0,2) \Omega$$

$$L_2 = (46,07 \pm 0,05) \text{ mH} \quad C_2 = (21,59 \pm 0,05) \text{ nF} \quad R_2 = (21,5 \pm 0,2) \Omega$$



2.2 Mutuelle inductance

- On mesure le coefficient de mutuelle inductance en fonction de la distance (sans changer de fréquence). Pour cela on excite une bobine avec le GBF et on branche un voltmètre aux bornes de l'autre bobine. La loi de Maxwell-Faraday nous donne $M = \frac{V_2}{I_1 \omega}$. [Reprendre un point].



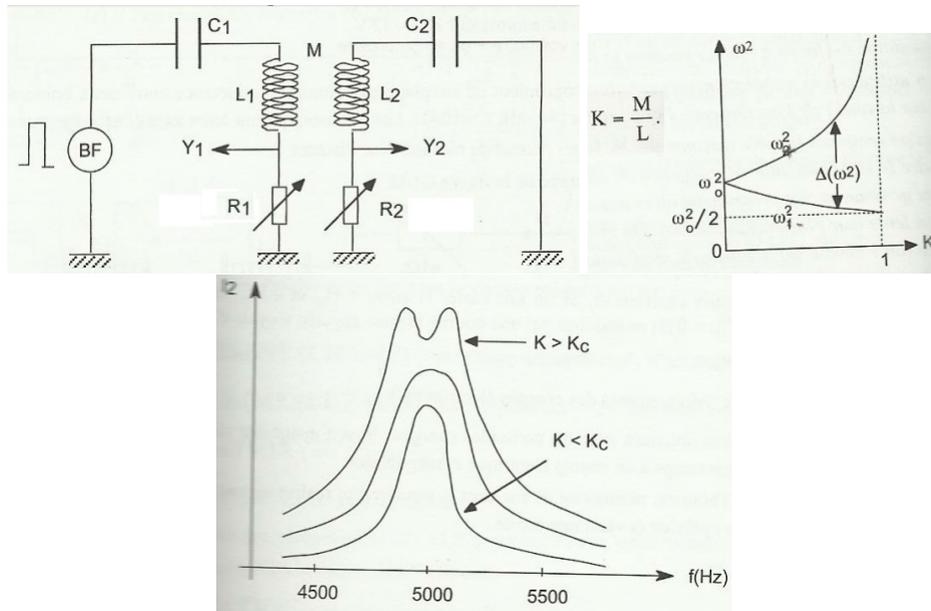
Remarque : On peut éventuellement tenter de modéliser en $\frac{1}{(d-d_0)^b}$. Avec de la chance on trouve b entre 3 et 4.

Remarque : Le couplage est toujours faible car M est petit devant L. On ne dépasse pas un rapport de 0,1. C'est un peu dommage, mais je n'ai pas réussi à l'améliorer. Ceci est peut-être possible sur le couplage capacitif.

2.3 Dépendance des modes propres.

- Pour mesurer les fréquences symétrique et antisymétrique, on excite le premier RLC avec un créneau, et on effectue la transformée de Fourier de l'intensité du second, à l'oscilloscope. On voit qualitativement le doublement du pic de fréquence lorsque le couplage augmente. En mode temporel, il est nécessaire de voir plusieurs battements.

- On mesure ω_- et ω_+ pour chaque distance d et on trace en fonction de M ou de $K=M/L$. On trace sur un même graphe les courbes théoriques et expérimentales avant de discuter les résultats. [Reprendre un point]



Remarque : L'évolution des deux fréquences n'est pas toujours la même et dépend du couplage. De plus, sur nos mesures on ne voit que le début de la courbe et on a donc une impression de symétrie, alors que ce n'est pas le cas. En effet, une solution diverge en $K=1$.

Remarque : Le premier montage était un couplage élastique. Ici il s'agit d'un couplage inductif. Il n'a donc pas vraiment d'analogie mécanique, ou alors avec une masse négative.

Remarque : On constate une erreur systématique sur notre mesure.

3 Couplage de 4 oscillateurs

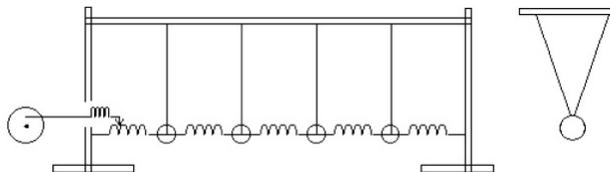
3.1 Mesure des fréquences propres

Expérience : Couplage de 4 oscillateurs

Matériel : Vidéocom ENSL

Soyons fou, on va coupler plus de deux oscillateurs, ici 4 oscillateurs suspendus couplés par des ressorts. On va donc avoir 4 fréquences propres. On va observer les modes en les excitant avec un moteur pas à pas (qui divise par 200 la fréquence de commande).

Le logiciel vidéocom est pour cela très bien fait. Il suffit d'optimiser la puissance des DEL pour avoir de beaux pics qui ne saturent pas. Ensuite on lance l'acquisition et on fait la TF en faisant un clique droit (puis en dessinant un cadre à la souris sur le signal temporel on le sélectionne).



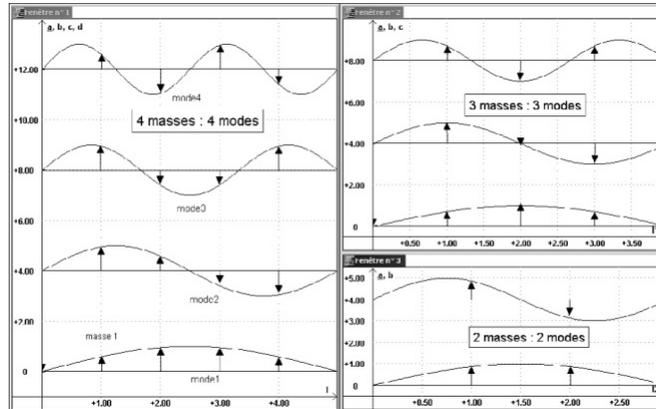
On mesure ainsi les quatre fréquences propres. On peut également noter leurs amplitudes et constater que l'énergie se met préférentiellement dans les modes de basses fréquences, lents et symétriques.

On trouve :

1 oscillateur	$2,30 \pm 0,01$ Hz			
2 oscillateurs	$1,73 \pm 0,02$ Hz	$2,77 \pm 0,02$ Hz		
3 oscillateurs	$1,46 \pm 0,02$ Hz	$2,29 \pm 0,02$ Hz	$2,93 \pm 0,02$ Hz	
4 oscillateurs	$1,313 \pm 0,005$ Hz	$1,987 \pm 0,005$ Hz	$2,622 \pm 0,005$ Hz	$3,013 \pm 0,005$ Hz

3.2 Observation des modes

On observe les modes en les excitant à l'aide du moteur pas à pas. On décrit alors le mouvement de chaque masse.
(mode = nombre de noeuds + 1)



3.3 Relation de dispersion

En bloquant une masse, on peut changer le nombre d'oscillateurs concernés et vérifier la relation de dispersion donnée dans le BUP.

On a

$$m\ddot{x}_n + k(x_n + x_{n-1}) - k(x_{n+1} - x_n) + \frac{mg}{l}x_n = 0$$

On cherche

$$x_n = \sin\left(\frac{p}{N+1}n\pi\right) \cos(\omega t)$$

On obtient

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right) = \omega_0^2 + \omega_1^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

On effectue alors un fit affine par le sinus carré pour retrouver les deux coefficients.

On trouve : $\omega_0^2 = 2,1 \pm 0,2$ rad/s et $\omega_1^2 = 1,2 \pm 0,1$ rad/s.

Remarque : Le Chi2 est de 10, donc élevé. Notre modèle ne rend donc pas compte de l'expérience. Ce n'est pas très étonnant, les oscillateurs ne sont pas identiques et le système n'est pas infini.

Remarque : Bien attacher le ressort sur la vis placée le plus vers le centre de l'axe de rotation du moteur, sinon la résonance est trop forte et on casse le système.

Remarque : Dans un système multirésonnant. Les fréquences ne sont des harmoniques d'une fréquence fondamentale que si le milieu est non dispersif. Ici, ce n'est pas le cas.

Remarque : Attention, cette formule suppose des conditions aux limites périodiques.

C'est un filtre passe-bande. La fréquence de coupure haute est une conséquence de la discrétisation de l'espace et disparaît dans l'approximation des milieux continus.

4 Conclusion

On a vu que le couplage est un transfert d'énergie qui sépare les modes propres. Si l'on continue d'augmenter le nombre d'oscillateurs, on arrive à l'approximation des milieux à constantes réparties (milieux continus), et on peut observer la propagation d'ondes, et même de solitons dans le cas non-linéaire.

Remarques du jury

- Mettre l'expérience des métronomes à la fin.
- Mesurer la période des battements pour éviter l'incertitude de 60% sur la constante de couplage.