

MP34 – PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

7 février 2017

Faut pas respirer la compote, ça fait tousser.

Benjamin Crinquand & Eric Brillaux

Commentaires du jury

- **2016** : Lors de la mesure du coefficient de diffusion du glycérol par déviation de la nappe laser, les candidats doivent être à même d'expliquer précisément la nature de l'image observée sur l'écran et son origine physique.
- **2014** : Le choix des expériences doit veiller à souligner l'aspect transport.
- **2012** : On pensera à exploiter les régimes transitoire et permanent.
- **2012** : Connaître a priori l'ordre de grandeur de quelques coefficients de diffusion est indispensable.

Bibliographie

- *Dictionnaire de Physique Expérimentale - Tome III*, → Expérience de la diffusion du glycérol
Quaranta
- *Exercices et problèmes de thermodynamique*, **Daniel Calecki** → Calculs sur l'expérience du glycérol
- *Physique des électrons dans les solides* **Henri Alloul** → Détails sur la conductivité électrique dans les métaux
- *Thermodynamique* **Bernard Diu** → Vision thermodynamique de la viscosité, Complément 9.C
- *Physique expérimentale* **Jolidon** → Tout le reste ! En plus ces expériences sont 100% recyclables.

Prérequis

- Mécanique des fluides
- Conduction thermique
- Diffusion de particules

Expériences

- ☛ Diffusion du glycérol dans l'eau
- ☛ Conductivité électrique du cuivre
- ☛ Diffusivité thermique du cuivre
- ☛ Écoulement de Poiseuille

Table des matières

1	Conductivité électrique du cuivre	2
2	Conductivité thermique du cuivre	3
3	Diffusion du glycérol dans l'eau	4
4	Écoulement de Poiseuille, diffusion de quantité de mouvement	5

Introduction

De tous temps les hommes ont mis à profit des phénomènes de transport. En vrai, les phénomènes de transport peuvent être compris de manière assez large. Il semble que le transport d'une quantité (scalaire ou vectorielle) peut se faire de différentes manières. On peut distinguer la convection, résultant d'un déplacement macroscopique de matière, la diffusion due à l'inhomogénéité d'un paramètre intensif, se déroulant sans déplacement macroscopique, et la migration provenant de l'action d'un champ de force. Ce montage va s'attacher à décrire essentiellement les phénomènes de migration et de diffusion pour en souligner les similitudes et différences.

Note : Toutes les incertitudes données sont des incertitudes-types.

Conductivité électrique du cuivre

✦ Jolidon, Alloul

Préambule théorique Un métal est couramment représenté comme un gaz d'électrons libres, au sens où les électrons qui se trouvent dans la bande de conduction du métal sont libres de se déplacer sous l'effet d'un champ électrique. Ce champ met en mouvement les électrons chargés mais le mouvement résultant se déroule à vitesse d'ensemble constante. Pour caractériser cela on définit en général la mobilité μ des électrons comme $\mathbf{v}_d = \mu \mathbf{E}$ où \mathbf{E} est le champ électrique et \mathbf{v}_d la vitesse dite "de dérive" des électrons. Cela est caractéristique du phénomène de migration. Le fait que le mouvement soit à vitesse d'ensemble constante découle de l'interaction entre électrons et réseau cristallin : les "chocs" entre électrons et défauts ou déformations du réseau relaxent le mouvement des électrons. Il se trouve que ces deux effets agissent indépendamment sur les électrons. Des arguments expérimentaux et théoriques (voir le Alloul) permettent de postuler que la résistivité électrique d'un métal s'écrit de manière générale comme

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho_1 T.$$

Le terme constant provient des impuretés du réseau et ne dépend logiquement pas de la température. Le terme linéaire résulte de l'accroissement du nombre de phonons, modes de vibrations atomiques du réseau, avec la température. Les électrons sont diffusés par les phonons, ce qui modifie leur quantité de mouvement et chauffe le cristal. La résistivité est proportionnelle à la fréquence de collisions, c'est-à-dire à la concentration en phonons pour le deuxième terme. Au-delà de la température de Debye, celle-ci est proportionnelle à $k_B T$, ce qui justifie l'obtention d'un terme linéaire.

Protocole expérimental On dispose d'une bobine de cuivre dont on veut mesurer la résistivité en fonction de la température. On place cette bobine dans un bain thermostaté pour contrôler la température (vérifiée au thermocouple). Le choix du cuivre permet d'obtenir un échauffement Joule assez faible, ce qui facilite sa thermalisation. Cependant, il faut par conséquent avoir un enroulement conséquent de cuivre pour mesurer avec une bonne précision sa faible résistance. Pour mesurer cette résistance, il faut prendre des précautions afin de ne pas mesurer la résistance des autres composants électriques. Il faut employer un montage à quatre fils, décrit dans le Jolidon, qui sert également en thermométrie pour utiliser la sonde à résistance de platine. L'objectif est de mesurer de manière indépendante la tension aux bornes de la résistance à mesurer R et l'intensité la parcourant. L'ohmmètre fait en effet parcourir un courant i connu dans la résistance et mesure la tension au moyen d'un voltmètre de très haute impédance, branché sans passer par les fils "parasites".

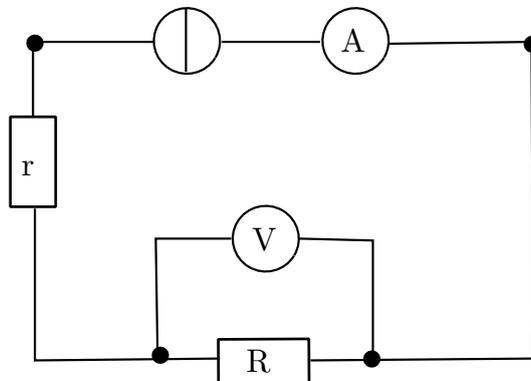


FIGURE 1 – Schéma du montage à quatre fils. Les points en gras correspondent aux points de branchement de l'ohmmètre. La résistance R est celle que l'on veut mesurer, la résistance r est parasite.

Finalement, la mesure de la résistance en fonction de la température imposée permet de remonter à la résistance via la connaissance de la longueur et section du fil composant la bobine. Le multimètre utilisé est le Fluke ... (ref) Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure

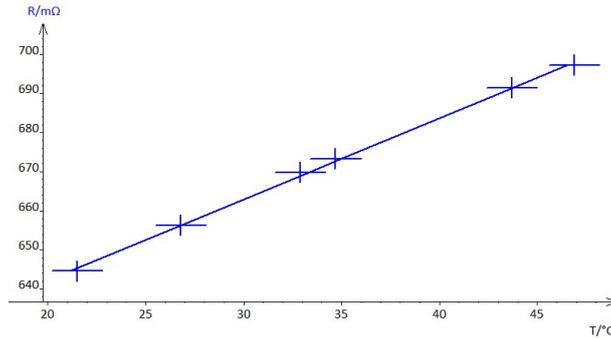


FIGURE 2 – Résistance du cuivre mesurée en fonction de la température.

Conductivité thermique du cuivre

✦ Jolidon

Préambule théorique On s'attaque maintenant à un phénomène de diffusion, présent aussi bien dans les solides que les liquides ou les gaz. Le mécanisme est différent mais la diffusion thermique provient toujours d'une inhomogénéité de température, source d'irréversibilité. Elle est modélisée par la loi de Fourier

$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T,$$

où \mathbf{j} est le flux surfacique de chaleur et λ la conductivité thermique du cuivre. Dans les solides, la diffusion thermique est généralement due aux phonons, considérés comme un "gaz" dans un modèle cinétique. Dans les métaux en revanche, s'ils sont assez purs, ce sont les électrons qui portent la plus grande part du flux de chaleur, et ce à toute température. Cela permet de tracer un parallèle avec les phénomène de conduction électrique : bien que les mécanismes soient différents, dans les deux cas les électrons sont porteurs de la quantité transportée (charge ou énergie). La loi de Wiedemann-Franz permet d'exprimer quantitativement ce raisonnement : à la température T , on doit avoir

$$\lambda \rho \propto T.$$

Cela traduit le fait qu'un bon conducteur électrique est un bon conducteur thermique.

On déduit de la loi de Fourier, par un bilan énergétique, l'équation d'évolution de la température

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T,$$

avec $\kappa = \lambda/\rho c$ la diffusivité thermique du métal (c sa capacité thermique massique et ρ sa masse volumique, plus aisément mesurables). L'étude de l'évolution de la température dans une barre de cuivre 1D en régime instationnaire va nous permettre de remonter à sa conductivité. La barre de cuivre utilisée comporte un capteur de température tous les 5 cm. Un module Peltier placé d'un côté permet d'imposer un flux de chaleur, positif ou négatif selon le signe du courant. En régime sinusoïdal, cela revient à imposer, en $x = 0$ pour une barre 1D de longueur L ,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\Phi_0}{\lambda S} \cos(\omega t),$$

où ω est la pulsation du courant sinusoïdal alimentant le module. La résolution de l'équation de la chaleur en supposant la barre *semi-infinie* est alors simple :

$$T(x, t) = T_0 + \Delta T e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta),$$

où T_0 est la température de la barre à l'infini (température de la pièce), ΔT ne dépend que de la condition aux limites en $x = 0$, et où

$$\delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$$

est l'épaisseur de peau thermique. Cette longueur caractérise la décroissance de la température le long de la barre. Ainsi, l'hypothèse selon laquelle la barre est semi-infinie est vérifiée si l'on a $L \gg \delta$.

Protocole expérimental Il faut d'abord connaître la réponse des capteurs. Cela se fait en imposant un flux thermique (courant continu dans le module Peltier) d'un côté et une température constante de l'autre (il faut actionner les ventilateurs). De ce fait on a une rampe linéaire de température dans la barre. La réponse des capteurs est représentée sur la Figure

On observe que contrairement à ce qui est attendu (le Jolidon nous a bolossés), la réponse des capteurs n'est pas linéaire. Cela nous impose, en faisant l'hypothèse que cette réponse est monotone, de nous intéresser aux déphasages des différents signaux plutôt qu'à leurs amplitudes.

Le choix de la fréquence est imposé par deux contraintes. On doit bien avoir $L \gg \delta$, mais il faut pouvoir utiliser un nombre suffisant de capteurs avant que l'onde thermique ne soit trop atténuée. Pour utiliser avec une précision suffisante quatre capteurs sur les six que comporte la barre, on a utilisé une fréquence de 10 mHz. Il faut alors faire une acquisition pour être certain de se placer en régime permanent (cela prend dans les 30 minutes). L'allure des signaux est représentée en Figure

La mesure de δ , donc de κ se fait en mesurant les déphasages des différents signaux reçus par les capteurs. Pour obtenir une meilleure précision, on peut faire un moyennage sur Python (parce que Latis Pro, c'est vraiment de la merde) puis réexporter sur Regressi, ce qui est montré sur la figure 3.

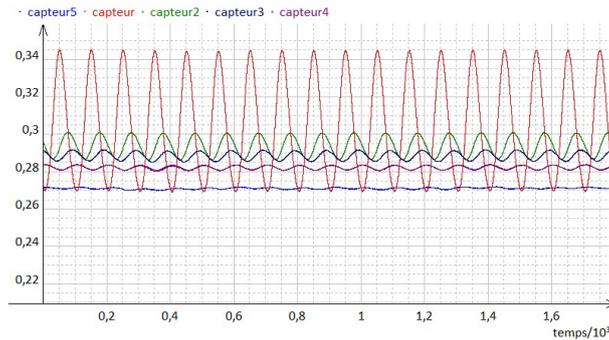


FIGURE 3 – Tensions mesurées sur les différents capteurs après lissage par Python. On arrive de cette manière à exploiter convenablement 5 capteurs sur les 6, au lieu de 4 sinon.

On trace $\ln(A) = f(x)$, connaissant la position x_i de chaque capteur, et $\delta\Phi = f(x)$. Dans ces équation, A est l'amplitude de chaque signal, et $\delta\Phi$ est le déphasage entre le i -ème capteur et le premier capteur. On obtient les résultats présentés sur la figure 4.

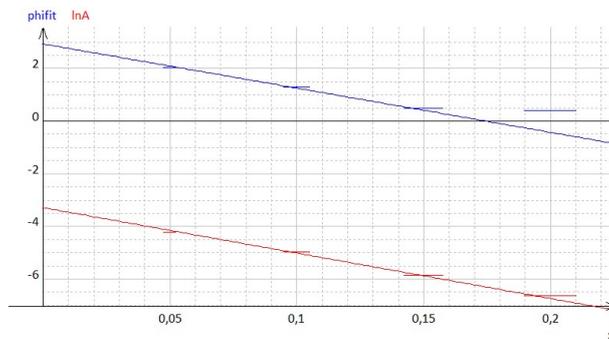


FIGURE 4 – Résultats des deux ajustements par des droites de $\ln(A)$ et $\delta\Phi$. La pente attendue pour ces deux droites est $1/\delta$.

On remarque que les derniers points de l'ajustement en amplitude ne sont plus cohérents. Cela rejoint ce qu'on avait dit sur la linéarité des capteurs, ou du moins la linéarité de la rampe de tension (potentielles fuites thermiques en bout de barre). On utilise l'ajustement par les déphasages qui nous donne $\lambda_{\text{exp}} = 384 \pm 10 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. On n'est pas trop loin de la valeur tabulée $\lambda_{\text{tab}} = 401 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Diffusion du glycérol dans l'eau

✍ Calecki, Quaranta

On s'intéresse maintenant à la diffusion de particules dans les fluides. Cette fois, le paramètre inhomogène causant la diffusion est la concentration ou densité d'une espèce dans une autre. Le mécanisme physique est toujours l'agitation

thermique des particules, qui diffusent par mouvement brownien. De nouveau, ce phénomène est caractérisé par la loi de diffusion de Fick concernant le flux surfacique de particules :

$$\mathbf{j}_n = -D\nabla n,$$

où D est le coefficient de diffusion de l'espèce dans le fluide et n sa concentration. La conservation du nombre de particules impose alors naturellement

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n.$$

Une méthode quantitative pour mesurer la diffusion de particules est optique : elle repose sur la déviation d'un rayon lumineux traversant un milieu d'indice variable. Pourvu que l'épaisseur de fluide e traversée par le faisceau soit faible, on peut supposer que le gradient d'indice $\partial n/\partial z$ y est constant et la déviation angulaire du rayon vaut alors $\theta \approx e\partial n/\partial z$, dans le sens du gradient d'indice.

L'expérience consiste à remplir à moitié une mince cuve d'eau, puis d'insérer DELICATEMENT à la pipette un mélange eau-glycérol¹ au fond de la cuve, sur une épaisseur raisonnable. Cela revient à choisir comme condition initiale pour l'évolution de la concentration en glycérol une fonction de Heaviside centrée sur l'interface. On envoie sur cette cuve une nappe laser, inclinée à 45° , passant par l'interface eau-glycérol. L'inclinaison du faisceau incident décale horizontalement les points d'impact sur un écran placé derrière la cuve des rayons qui ont traversé la cuve à des altitudes différentes. La déviation θ exprimée précédemment est donc proportionnelle à la déviation verticale par rapport à la droite D correspondant à la nappe laser non déviée, comme montré sur la figure 5.

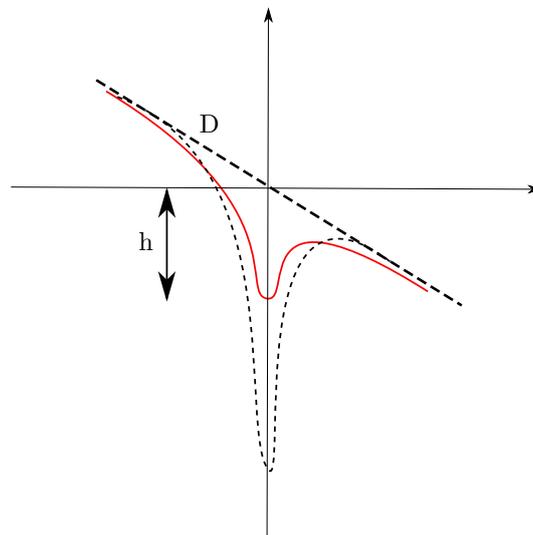


FIGURE 5 – Schéma du montage sur la diffusion du glycérol. La courbe rouge pleine correspond à la nappe laser déviée à un instant ultérieur à la courbe en pointillés. La droite D est la nappe laser non déviée à 45° .

Finalement, la quantité d'intérêt pour la mesure est la déviation $h(t)$ maximale entre la trace laser et la droite D , qui correspond aux rayons ayant traversé la cuve exactement à l'interface. En se limitant aux temps assez longs pour que l'on puisse confondre θ et $\tan \theta$, on peut prouver que

$$h(t) = \frac{eL(n_g - n_e)}{\sqrt{4\pi Dt}},$$

où L est la distance entre la cuve et l'écran, et n_g est l'indice optique du mélange eau-glycérol utilisé, et n_e celui de l'eau. Plus le coefficient D est faible, plus la variation de h est lente à observer. Pour ces raisons, nous déconseillons d'utiliser un mélange eau-glycérol 10-90 ou même 20-80 : la cuve de l'expérience lancée avant la semaine ski n'est toujours pas à l'équilibre. Comme on dit dans le milieu, elle temporise. Un 50-50 entre eau et glycérol marche convenablement. On trace alors la déviation $h(t)$ en fonction du temps.

Écoulement de Poiseuille, diffusion de quantité de mouvement

✎ Diu de thermo, Jolidon

A priori, on pourrait douter de la pertinence de cette expérience dans ce montage. Pourtant, il est possible de présenter les aspects thermodynamiques de la viscosité, ce qui permet d'avoir une vision unificatrice des phénomènes

1. On peut aussi essayer avec du pastis.

de diffusion. On a vu que la diffusion correspondait à l'apparition d'un transport d'une quantité extensive due à un gradient de sa grandeur thermodynamique conjuguée (transport d'énergie associé à ∇T , transport de particules associé à $\nabla \mu$). Ici, la grandeur extensive transportée est la quantité de mouvement \mathbf{p} , et sa variable conjuguée est la vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{p}/M$. En effet, si l'énergie du système s'écrit $E = U + \mathbf{p}^2/2M$, avec U son énergie interne, la différentielle de l'entropie s'écrit

$$dS = \frac{1}{T_0} dU + \frac{P_0}{T_0} dV - \frac{\mu_0}{T_0} dn \quad (1)$$

$$= \frac{1}{T_0} (dE - \frac{\mathbf{p}}{M} \cdot d\mathbf{p}) + \frac{P_0}{T_0} dV - \frac{\mu_0}{T_0} dn. \quad (2)$$

De plus, la quantité de mouvement est une grandeur localement conservée. Pour chaque composante i de la densité de quantité de mouvement \tilde{p}_i , on a une loi locale de conservation

$$\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_i = 0,$$

où \mathbf{j}_i est le flux de quantité de mouvement volumique. Comme pour les lois de Fourier et de Fick, on va alors supposer une relation linéaire entre ce flux et le gradient de la quantité intensive :

$$\mathbf{j}_i = -\eta \nabla u_i.$$

Le coefficient de proportionnalité de cette loi est la viscosité du fluide. C'est ce flux de quantité de mouvement qui est directement à l'origine des forces de cisaillement.

On va considérer un écoulement de Poiseuille dans un capillaire cylindrique, le terme moteur étant un gradient de pression uniforme et constant. Les contraintes visqueuses dues à la diffusion vont provoquer une forte résistance du capillaire à l'écoulement, qu'on pourra éventuellement rapprocher de la loi d'Ohm, tous calculs faits ! Comme souvent, en mécanique des fluides, il faut faire des hypothèses qu'il conviendra de vérifier durant le montage.

1. On suppose l'écoulement laminaire. Pour vérifier cela, on évalue le nombre de Reynolds. Pour un diamètre de $D = 2.4 \pm 0.05$ mm, $U \sim 0.1$ m/s et $\nu_{\text{eau}} \sim 10^{-6}$, on trouve un nombre de Reynolds de l'ordre de $Re \sim 100$. En eau, on admet généralement que le régime laminaire se déstabilise vers $Re \sim \text{MILLE}$, du coup tout va bien.
2. Pour pouvoir connaître le gradient de pression dans l'écoulement, il faut considérer que l'écoulement rampant de Poiseuille se met en place dès l'entrée du tube. Il faut alors négliger la longueur d'établissement devant la longueur du tube $L = 150.2 \pm 0.2$ cm. La théorie de la couche limite nous apprend qu'au bout d'une distance x après l'entrée du tube, l'épaisseur de cette couche limite dans laquelle les effets visqueux sont prépondérants vaut $\delta(x) \sim \sqrt{\nu x/U}$ où U est la vitesse d'entrée de l'eau. La longueur d'établissement l est telle que $\delta(l) \sim D/2$, autrement dit

$$\frac{l}{D} \approx \frac{UD}{\nu} = Re.$$

Dans notre cas, $l \approx 10$ cm, ce qui est à peu près négligeable devant L , mais pas trop. Mais un peu quand même.

3. On suppose que la pression en sortie est la pression atmosphérique. Cela n'est vrai que si l'on néglige les effets de capillarité. S'il y a des aspérités en bout de tube, les particules de fluide vont s'accrocher, et un ménisque courbé va se former, ce qui va entraîner une surpression dans le fluide. Pour éviter cela, on brûle légèrement le bout du capillaire : on le rend ainsi hydrophobe, ce qui évite que des gouttes ne s'y accrochent.

On trouve que le débit volumique dû à l'écoulement de Poiseuille s'écrit

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\eta} \frac{dP}{dx}.$$

Il faut souligner que même si le nombre de Reynolds n'est pas faible devant 1, puisque l'écoulement est parallèle, le terme convectif est identiquement nul. Le nombre de Reynolds intervient surtout pour les hypothèses d'écoulement laminaire et pour la longueur d'établissement. La mesure du débit s'effectue en mesurant la masse sortant du capillaire sur une balance au cours du temps. Le débit est suffisant pour qu'une mesure durant une minute donne une bonne précision. La dernière chose à faire est de mesurer avec précision le gradient de pression dans l'écoulement. Pour cela, on utilise un vase de Mariotte (voir le schéma 6).

Le principe est de faire passer un capillaire reliant le fluide à l'air extérieur. Au début, de l'eau est présente dans le capillaire. Lorsque l'écoulement démarre, une dépression se crée dans l'air présent dans le vase, ce qui appelle l'eau contenue dans le capillaire. A partir d'un certain moment, le capillaire est rempli d'air. Ainsi, d'après les lois de l'hydrostatique, on est certain que la pression au niveau du bas du capillaire est la pression atmosphérique. La différence

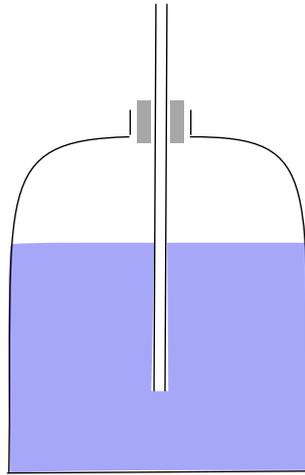


FIGURE 6 – Principe du vase de Mariotte. Le vase utilisé comporte une sortie vers le fond du vase pour générer l'écoulement de Poiseuille.

de hauteur avec le capillaire servant à l'écoulement donne alors directement le gradient de pression hydrostatique dans le capillaire selon

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\rho g h_{\text{eau}}}{L},$$

puisque l'écoulement est parallèle et le gradient de pression constant dans le tube. Il suffit finalement de mesurer la hauteur du capillaire sortant du vase par le haut et la longueur totale de ce capillaire pour mesurer h , et comparer le débit mesuré Q à h .

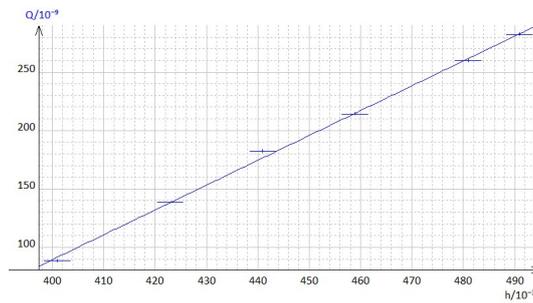


FIGURE 7 – Débit mesuré en fonction de la hauteur d'eau entre le bas du capillaire et l'écoulement.

Conclusion

Flemme intense.

Ces expériences sont méga longues, et très chiantes à présenter en temps limité devant un jury impatient. Dans ces cas-là, faut temporiser.