LP 02 : Gravitation

1er novembre 2017

Jonathan Lalieu & Thomas Boquet

La force qui semblable à la gravitation nous incite à recherher notre bien-être ne peut être contenue que par les obstacles qui lui sont opposés
Cesare Beccaria

Niveau : L2

Commentaires du jury

2016 : Les analogies entre l'électromagnétisme et la gravitation classique présentent des limites qu'il est pertinent de souligner

2015 : Deux nouvelles leçons ont ete ajoutées [dont] une leçon intitulée "Gravitation" pour laquelle les candidats s'attacheront dans le cadre de la physique classique à développer quelques caractéristiques de l'intéraction gravitationnelle.

Bibliographie

- ✍ *Anneaux de Saturne et limite de Roche*, **Culture science** ⟶ Calcul des forces de marées et de la taille maximale du satellite
- ✍ *Mécanique*, **Pascal Brasselet** ⟶ Présente de façon claire la force de marée (peut aussi servir pour d'autres leçons cf LP 03)
- ✍ *BUP 858 : De Kepler à Newton*, ⟶ Présentation historique

Prérequis

- ➢ Électrostatique
- ➢ Mécanique du point
- ➢ Référentiel non-galiléen
- ➢ Conique

Expériences

- ☕ Une expérience paraîtrait superflue dans cette leçon. Vous pouvez faire tomber une craie en introduction si vous y tenez vraiment.

Table des matières

Introduction

La gravitation est l'une des 4 interactions fondamentales avec les interactions faible, forte et électrostatique. La gravitation ou force gravitationnelle est la force qui le plus souvent gouverne le mouvement des planètes dans l'univers ou la chute des objets sur terre.

1 Force gravitationnelle

La gravitation est un phénomène étudié de longue date :

- Galilée a étudié le temps de chute de corps de différentes formes et natures.
- Copernic a soutenu que les planètes tournent autour du soleil.
- Kepler a énoncé 3 lois basées sur l'observation des planètes et étoiles :
  1. Dans le système solaire les planètes décrivent des ellipses dont le soelil est l'un des foyers
  2. Les trajectoires suivies par les planètes vérifient la loi des aires : les aires balayées par un rayon reliant le soleil à la planète pendant la même durée sont égaux.
  3. Dans le cas d'une force newtonienne :
  $$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(M+m)}a^3$$

1.1 Énoncé de la loi de Newton

En s'appuyant sur les observations de ses collègues, Newton formalise en 1689 la notion de gravitation :

Deux points matériels quelconques exercent l'un sur l'autre des forces d'attractions directement opposées, dirigées suivant la droite qui les joint, proportionnellement à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de la distance qui les sépare

$$\overrightarrow{F}_{M\to m} = -\overrightarrow{F}_{m\to M} = -\mathcal{G}\frac{mM}{\|\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}\|}\overrightarrow{u}_{1\to 2}$$

Avec $\mathcal{G} = -6.67\ 10^{-11} m^{-3}.kg^{-1}.s^{-2}$ la constante gravitationnelle.

La valeur de la constante gravitationnelle peut être déterminée expérimentalement (experience du pendule de Cavendish en 1799). On peut remarquer plusieurs choses sur cette force :

- C'est une force centrale ($\overrightarrow{F}_g = F\overrightarrow{e_r}$).
- Cette force est uniquement attractive, car la masse est toujours positive.

On va voir qu'à partir de ces considérations, on peut définir un champ de gravitation.

1.2 Champ gravitationnel

1.2.1 Définition et analogie avec le champ électrostatique

La force qui s'exerce entre deux charges ponctuelles séparées d'une distance r a été précédemment étudiée :

$$\overrightarrow{F}^{el}_{1\to 2} = -\frac{q\ q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_{1\to 2} = q\ \overrightarrow{E}$$

Étant donnée la forme analogue des deux forces on peut réécrire la force gravitationelle sous la forme :

$$\overrightarrow{F}^g_{1\to 2} = m_1 \underbrace{\frac{-\mathcal{G}m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{1\to 2}}_{\overrightarrow{G}\text{ : Champs gravitationnel}} = m_1\overrightarrow{G}$$

On a donc vu qu'il existe une forte ressemblance entre les deux forces mais l'analogie ne s'arrête pas là :

Force	$\overrightarrow{F}^g = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{\lVert\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}\rVert}\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{F}^{el} = -\dfrac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}$
Charge	m_1	q
Champ	$-\mathcal{G}\dfrac{m_2}{r^2}$	$\dfrac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
Théorème de Gauss	$\iint \overrightarrow{G}.\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$	$\iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
Caractère de la force	Attractif	Attractif ou répulsif $\Rightarrow$ Écrantage

1.2.2 Calcul de G dans le cas d'une distribution de masse à symétrie sphérique

On va se placer dans le cas d'une distribution homogène et à symétrie sphérique de masse.

Nous allons appliquer le théorème de Gauss en gravitation pour le système. Pour cela nous allons déterminer la direction de $\overrightarrow{G}$ et ses dépendances.

Les plans de symétries sont les suivants : $\Pi_1 = (M, \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta)$ $\Rightarrow \overrightarrow{G} = G\overrightarrow{e}_r$

$\Pi_2 = (M, \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta)$

De plus, la répartition de charge est invariante par rotation d'angle θ et $\phi \Rightarrow G(r,\theta,\phi) = G(r)$

On applique le théorème de Gauss :

$$\iint \overrightarrow{G}\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

Si on choisit comme surface de Gauss une sphère, elle présente la même symétrie que la répartition de masse, $\overrightarrow{G}$ est parallèle à $\overrightarrow{dS}$ et sur cette surface $G(r) = cste$

$$G\iint dS = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$
$$4\pi r^2 G = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$
$$G = -\mathcal{G}\frac{M_{int}}{r^2}$$

On a donc la disjonction de cas selon si le point M est :

- En r<R : $M_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$
- En r>R : $M_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$

On obtient donc l'expression suivante du champ :

$$G = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho r\mathcal{G} & \text{si } r < R \\ \frac{4}{3}\pi\rho\dfrac{R^3}{r^2}\mathcal{G} & \text{si } r > R \end{cases}$$

2 Trajectoire d'un astre soumis à un unique champ de pesanteur

2.1 Planéité de la trajectoire

Nous allons tout d'abord montrer que la trajectoire d'un astre soumis à un unique champ de pesanteur est forcément plan.

Pour cela on va se placer dans le référenciel de l'astre attracteur, R_a que l'on va supposer galiléen.

On va appliquer le théorème du moment cinétique au centre de masse de l'astre attracteur :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{\vec{F}_{ext}}}$$

Dans le cas où l'astre n'est soumis qu'à un seul champ de gravitation, le moment de la force de gravitation est nul au centre de masse de l'astre attracteur car :

$$\vec{M}_{F_g} = r\vec{e}_r \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$$

Donc $\vec{L} = \overrightarrow{cste}$ et le plan de la trajectoire est défini par $(\vec{e}_r, \vec{v}_0)$, avec $\vec{v}_0$ le vecteur vitesse initiale.
De plus si on exprime la valeur du moment cinétique, on trouve la valeur de la constante :

$$\vec{L} = r\vec{e_r} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta} = mC$$

Rmq : On retrouve ici la deuxième loi de Kepler, avec C la constante des aires.

2.2 Expression de la trajectoire

On sait maintenant que le mouvement est plan. On peut donc se placer dans la base polaire et chercher la trajectoire sous la forme $r(\theta)$.
On va donc appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R_a :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

(On va ici utiliser la relation suivante : $\vec{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$)
On termine le calcul (...) et on trouve :

$$r(\theta) = \frac{c^2}{\mathcal{G}M(1+ecos(\theta)} = \frac{p}{1+ecos(\theta)}$$

On peut essayer de relier ces paramètres à des quantités définissant le système et notamment son énergie. En effet la force de gravitation dérive d'un potentiel :

$$\vec{F}_g = -\overrightarrow{grad}(E_p) \qquad \text{avec } E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

Le système n'est donc soumis qu'à des forces conservatives $\Rightarrow E_m$ se conserve.

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p}_{E_{peff}} \end{aligned}$$

Graphique représentant l'énergie potentielle effective en fonction de r, en explicitant les 4 trajectoires possibles en résultant (tracer des droites horizontales pour l'énergie mécanique conservée) :

Rmq : On retrouve la première loi de Kepler dans le cas particulier du système solaire.
On pourrait faire le calcul et réexprimer l'excentricité de la conique en fonction de l'énergie :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_mC^2}{m\mathcal{G}^2M^2}}$$

On voit donc bien que c'est l'énergie qui gouverne la forme de la trajectoire.

On va maintenant s'intéresser à des cas où un astre peut être soumis à plusieurs champs de gravitation et à leur variation de ceux-ci sur la taille de l'astre.

3 Le phénomène de marée

3.1 Origine et approche qualitative du phénomène

Notre planète n'est pas la seule dans l'univers, elle subit donc des attractions gravitationelles des autres planètes et étoiles :

	Soleil	Lune	Venus	Mars	Jupiter
M(kg)	$2*10^{30}$	$7*10^{22}$	$5*10^{24}$	$6*10^{23}$	$2*10^{27}$
D(m)	10^{11}	$4*10^{8}$	$4*10^{10}$	$8*10^{10}$	$6*10^{10}$
G($N.m^{-2}kg^{-2}$)	10^{-2}	$3*10^{-4}$	$2*10^{-7}$	$6*10^{-9}$	$4*10^{-7}$

En ce qui conserne la Terre les influences qui sont importantes sont celles du Soleil et de la Lune.

3.2 Calcul du terme de marée

Dans ce cours nous allons nous limiter au cas des marées statiques c'est-à-dire l'action de la force de marée sur la croûte.

Pour cette étude nous allons nous placer dans le référentiel associé au centre de gravité de la planète que nous allons noter R_p (non galiléen). Ce référentiel est en translation autour du référentiel héliocentrique (supposé galiléen).

On va appliquer le théorème de la résultante cinétique dans R_p :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{G}_s(P) + \sum_i m\overrightarrow{G}_i(P) + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic}$$

Ce référentiel est en translation autour du référentiel héliocentrique ($\overrightarrow{\omega}_{R_p/R_h} = \overrightarrow{0}$) donc
$\overrightarrow{F}_{ic} = -2m\overrightarrow{\omega}_{R_p/R_h} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Pour calculer la force d'inertie d'entraînement on se place dans le référentiel héliocentrique et on étudie le mouvement du centre de masse de la planète :

$$M\overrightarrow{a_h} = \sum_i M\overrightarrow{G_i}(T) = M\overrightarrow{a_e}$$

Donc $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\sum_i \overrightarrow{G_i}(T)$

On obtient donc dans le référentiel de la planète :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{G_s}(P) + \underbrace{m(\sum_i \overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T))}_{\text{Terme différentiel de marée}}$$

Si on explicite un peu plus ce terme de marée, avec D la distance entre les astres et d la taille caractéristique de l'astre étudié :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_m} &= \sum_i \overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T) \\ &= \sum_i \mathcal{G}M_i\Big(\frac{1}{(D_i-d)^2} - \frac{1}{D_i^2}\Big) \\ &= \sum_i \frac{2\mathcal{G}M_i d}{D_i^3}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{F_m} = \sum_i \frac{2\mathcal{G}M_i d}{D_i^3}$$

	Soleil	Lune	Venus	Mars	Jupiter
$F_m\ (m.s^{-2})$	$5 * 10^{-7}$	10^{-6}	$7 * 10^{-11}$	10^{-12}	$8 * 10^{-12}$

ODG :
Si l'on observe les marées statiques on peut avoir un déplacement de la croûte terrestre à l'équateur de l'ordre de quelques dizaines de centimètres. Cette déformation est très petite devant la déformation dûe a la force d'inertie d'entraînement de la Terre qui est de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres.
http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/maree-deformation.xml

3.3 Limite de Roche

On peut remarquer que les forces de marées et de gravitation peuvent être du même ordre de grandeur.
Reprenons le cas de deux astres en interaction, de masses respectives M_1 et M_2. Si on écrit l'équilibre d'un morceau du premier astre, de masse m', à la surface du-dit astre :

$$\overrightarrow{F_m} + \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{N} = 0$$

Il y a destruction de l'astre (donc séparation de m' de la surface) lorsque $\overrightarrow{N} = 0$ et $F_m > F_g$.
On peut donc écrire le cas limite où il y a égalité entre les deux forces :

$$\frac{2\,\mathcal{G}\ m'\ M_2\ d}{D^3} = \frac{\mathcal{G}\ m'\ M_1}{d^2}$$
$$\frac{M_2\ 2d}{D^3} = \frac{M_1}{d^2}$$
$$D = d\sqrt[3]{\frac{2M_2}{M_1}}$$

On obtient donc la limite de Roche qui est la distance en deça de laquelle il y a destruction d'un astre par les forces de marées crées par l'astre adjacent :

$$D = l\sqrt[3]{\frac{M}{m}}$$

On peut notamment appliquer ceci aux anneaux de Saturne et on obtient que la limite de Roche pour Saturne est de l'ordre de $D = 10^7 m$ pour des astéroïdes, avec $d = 10 - 100km$.
http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Roche.xml

4 Conclusion

Dans ce cours nous avons exprimé la force de gravitation, l'énergie potentielle ainsi que le champ associés. Nous avons résolu les équations du mouvement dans le cas d'un système soumis à un seul champ de gravitation, puis le cas des marées statiques. Nous pourrions néanmoins nous intéresser à des interactions à N corps (par simulation informatique) ou au cas des marées dynamiques (pour les océans).

Complement

1. Détermination de la masse de la Lune : http ://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/determination-masse-lune.xml
2. Quizz ordre de grandeur gravitation : http ://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/quizz/quizz-ordre-de-grandeur-astro
3. On pourrait aussi traiter le cas des points de Lagrange pour les satellites

Commentaires/remarques/suggestions/pause cafe ?