

LP04 – Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique.

Chacha & Jojo

Vendredi 3 février 2012

Bibliographie

- [1] J-P. Pérez, “*Mécanique*”. Dunod.
- [2] J. Boutigny, “*Mécanique 2*”. Vuibert.
- [3] R. Feynman, “*Mécanique 1*”. Dunod.
- [4] H. Gié, “*Mécanique 2ème année*”. Tec & Doc.

Rapports du Jury

- ☞ (2011) – “Les candidats ignorent trop souvent les principes de fonctionnement et les performances des gyroscopes modernes.”
- ☞ (2010, 2009) – “Les hypothèses de l’approximation sont très rarement énoncées clairement et encore plus rarement vérifiées dans le traitement des applications. L’équation de précession est un concept utile.”
- ☞ (2008) – “Une illustration expérimentale aide à faire passer le message de cette leçon. Il faut prévoir assez de temps pour traiter le domaine microscopique. Il est rappelé que le moment cinétique et le vecteur rotation ne sont a priori pas colinéaires.”
- ☞ (2006) – “Les équations d’évolution du moment magnétique en présence d’un champ magnétique tournant doivent être clairement établies dans le repère tournant. Les conditions de résonance et les applications de la résonance magnétique doivent être discutées. Le lien avec l’approche quantique peut être évoqué mais il faut éviter de sombrer dans le détail des calculs.”

Prérequis

- ☞ Moment d’inertie
- ☞ Théorème du moment cinétique
- ☞ Magnétisme

Plan

Introduction	2
1 Approximation gyroscopique	2
1.1 Description du mouvement : Angles d’Euler	2
1.2 Approximation gyroscopique	3
1.3 Gyroscopie équilibré : $O = G$	4
1.4 Gyroscopie déséquilibré : $O \neq G$	5
2 Domaine macroscopique	6
2.1 Précession des équinoxes	6
2.2 Effet paradoxal	7
3 Domaine microscopique	8
3.1 Précession d’un moment magnétique ([1], [4])	8
3.2 Vérification de l’A.G. dans le cadre du modèle de Bohr ([1])	8
3.3 Application : RMN ([1], [4])	9
Conclusion	10

Introduction

Nous allons dans cette leçon nous intéresser au cas des solides en rotation et indéformables. Les solides peuvent avoir 6 degrés de liberté : 3 de translation et 3 de rotation. Nous nous intéresserons ici uniquement aux degrés de rotation et plus particulièrement nous verrons qu'est ce qu'il se passe lorsque un degré est "privilegié" par rapport aux autres : c'est ce que l'on va appeler l'approximation gyroscopique.

Nous verrons que cette approximation nous permet grandement de simplifier les difficiles équations du mouvement et de comprendre quels effets sont également liés à cette approximation tant au niveau macroscopique que microscopique.

Mais dans un premier temps nous allons revenir sur le formalisme de la mécanique classique et la description de la rotation d'un solide autour d'un point fixe.

1 Approximation gyroscopique

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction un solide qui tourne autour d'un point fixe possède 3 degrés de liberté de rotation, on a alors besoin de 3 angles pour décrire son mouvement.

1.1 Description du mouvement : Angles d'Euler

On considère un solide S en rotation autour d'un point fixe O . On définit \mathcal{R}_0 , comme le référentiel du laboratoire et \mathcal{R} le référentiel lié au solide.

On passe de \mathcal{R}_0 à \mathcal{R} par trois rotations successives faisant intervenir les trois angles d'Euler.

* *Petite illustration* : Pour mettre en évidence ces trois angles, utilisons une tige en métal ayant un point fixe avec le support (la table) que nous appellerons **centre de rotation**¹.

Le premier mouvement que la barre peut effectuer est un mouvement de haut en bas qualifiée de **nutatio**². Puis la barre peut effectuer un mouvement autour de l'axe verticale : c'est le mouvement de **précession**. Puis la dernière rotation peut être effectuée autour de son axe de symétrie c'est le mouvement de **rotation propre**.

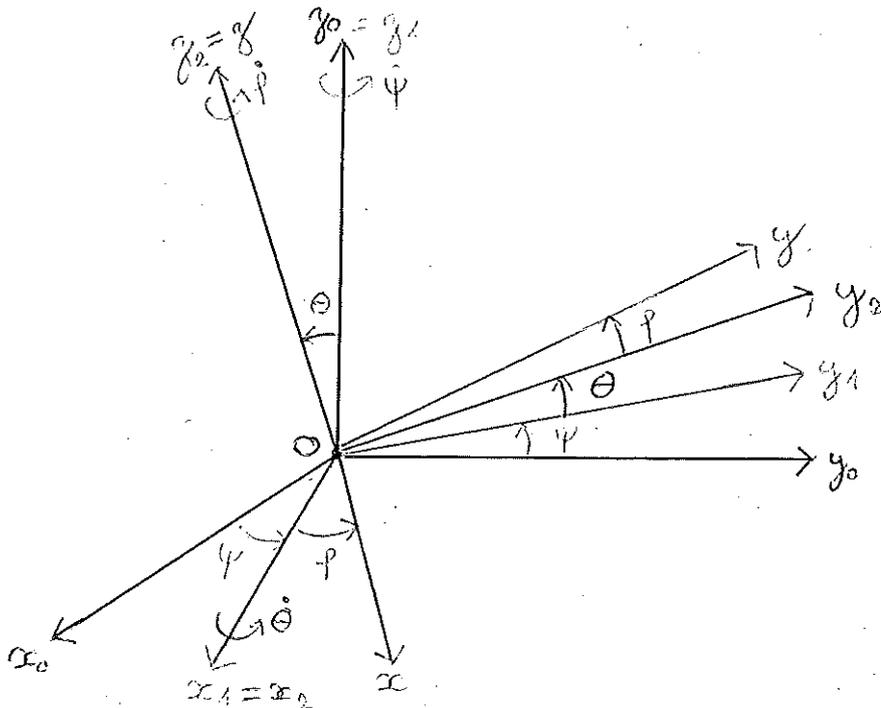


Figure 1: Rotations et angles d'Euler

1. Je vous rappelle que le centre de rotation peut être défini comme le point fixe autour duquel le solide tourne par rapport à un autre référentiel.

2. Du latin *nutatio* (« faire signe par un mouvement de tête »).

Plus formellement, on écrit la rotation en passant du référentiel \mathcal{R}_0 défini par $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au référentiel \mathcal{R} défini par $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On effectue une rotation d'angle Ψ (précession) autour de \vec{z}_0 . On passe au référentiel $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$. Ensuite on effectue une rotation d'angle θ (nutaton) autour de \vec{x}_1 , on définit alors le référentiel³ $\mathcal{R}_2(O, \vec{x}_2 = \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. Puis on fait une dernière rotation d'angle φ (rotation propre) autour de \vec{z}_2 , on retrouve alors le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du solide.

Pour résumer on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) &\xrightarrow[\text{précession}]{\Psi} \mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0) \xrightarrow[\text{nutaton}]{\theta} \\ &\xrightarrow[\text{nutaton}]{\theta} \mathcal{R}_2(O, \vec{x}_2 = \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \xrightarrow[\text{rotation propre}]{\varphi} \mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \end{aligned}$$

Ainsi le vecteur rotation du solide s'écrit comme :

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\Psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\varphi} \vec{z}} \quad (1)$$

Maintenant que l'on a décrit la rotation d'un solide autour d'un point fixe on va étudier ce qu'il se passe lorsqu'une des vitesses de rotation est prépondérante par rapport aux autres.

1.2 Approximation gyroscopique

1.2.1 Hypothèses ([2] - p.144)

Pour définir l'approximation gyroscopique, on va toujours dans la suite considérer un solide de révolution d'axe $(O\vec{z})$, ce qui suppose que :

- S a une forme géométrique de révolution autour de $(O\vec{z})$
- la masse volumique en un point ne dépend que de la distance à cet axe

Ce qui entraîne que le centre de gravité G est sur l'axe de révolution. Et que l'axe $(O\vec{z})$ et tout couple d'axe orthogonaux à $(O\vec{z})$ et orthogonaux entre eux forment des axes principaux d'inertie en O du solide.

La matrice d'inertie $[I]_O$ dans \mathcal{R} liant le moment cinétique au vecteur rotation du solide s'écrit alors :

$$[I]_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

où C est le moment d'inertie autour de $(O\vec{z})$, tandis que A est le moment d'inertie autour de tout axe perpendiculaire en O à $(O\vec{z})$.

On peut maintenant écrire les conditions de l'approximation gyroscopique.

1.2.2 Conditions de l'approximation gyroscopique ([1] - p.416)

On dit que le mouvement, autour d'un point fixe d'un solide, ayant la symétrie de révolution, satisfait à l'approximation gyroscopique lorsque sa vitesse de rotation propre est très grande devant toutes les autres vitesses de rotation, ce que l'on traduit par :

$$\vec{\omega} \approx \dot{\varphi} \vec{z} \quad (2)$$

* *Petite illustration* : Si je lance cette toupie on voit qu'elle satisfait l'approximation gyroscopique car sa vitesse de rotation propre (qui est selon son axe de révolution) est très supérieure à ses autres vitesses.

Une autre manière d'écrire cette approximation est de se servir des angles d'Euler, on a alors

$$\boxed{|\dot{\varphi}| \gg |\dot{\theta}|} ; \quad \boxed{|\dot{\varphi}| \gg |\dot{\Psi}|} \quad (3)$$

On peut alors écrire le moment cinétique dans le référentiel du laboratoire

$$\vec{L}_O = [I]_O \vec{\omega} \approx C \dot{\varphi} \vec{z}$$

3. Ce référentiel est appelé le référentiel de Resal du nom de l'ingénieur français H. Resal

On voit que le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et le moment cinétique \vec{L}_O sont colinéaires et selon l'axe de révolution dans le cadre de l'approximation gyroscopique⁴.

On va maintenant s'intéresser aux propriétés des mouvements gyroscopiques et dans un premier temps on s'intéressera au mouvement d'un gyroscope⁵ lorsque le centre de rotation O est équivalent au centre de gravité G du solide.

1.3 Gyroscope équilibré : $O = G$

1.3.1 Direction fixe et couple gyroscopique ([1] - Chap. Approx. gyro.)

On considère le gyroscope soumis à son unique poids $m\vec{g}$ appliqué en $O = G$. Si les liaisons sont parfaites, alors aucun moment n'est appliqué en O et le théorème du moment cinétique donne :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} &= \vec{\Gamma}_O = \vec{0} \\ \implies \vec{L}_O &= C\dot{\varphi}\vec{z} = \text{cste} \end{aligned}$$

Ainsi l'axe du gyroscope pointe toujours dans une même direction de \mathcal{R}_0 , indépendamment du mouvement de son support

* *Expérience* : On lance la rotation du gyroscope à l'aide de la manivelle et on incline son axe de rotation propre d'un petit angle de nutation, puis on bouge son support dans plusieurs directions, on constate que la direction de son axe de rotation propre ne change pas.

Pour que le gyroscope dans cette manipulation ait pu garder une position fixe, il a fallu qu'il exerce un couple sur l'anneau. On parle de couple car la résultante des forces qui s'exerce en G est nulle mais le moment d'inertie ne l'est pas.

On appelle **couple gyroscopique** le moment qu'exerce un gyroscope sur son support lorsqu'on le contraint à changer de direction.

En appliquant le théorème du moment cinétique en O par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R}_0 , il vient :

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Gamma}_{O, \text{sup.} \rightarrow \text{gyr.}}$$

où $\vec{\Gamma}_{O, \text{sup.} \rightarrow \text{gyr.}}$ est le moment des actions exercées par le support sur le gyroscope, c'est-à-dire, d'après l'opposition des actions réciproques, l'opposé du couple gyroscopique $\vec{\Gamma}_{O, \text{gyr.} \rightarrow \text{sup.}}$. Comme en outre le moment cinétique \vec{L}_O est, dans l'approximation gyroscopique, un vecteur porté par l'axe Δ du gyro, il vient, en introduisant $\vec{\omega}_{\Delta/\mathcal{R}_0}$:

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\Delta} + \vec{\omega}_{\Delta/\mathcal{R}_0} \times \vec{L}_O = \vec{\omega}_{\Delta/\mathcal{R}_0} \times \vec{L}_O = -\vec{\Gamma}_{O, \text{gyr.} \rightarrow \text{sup.}}$$

puisque $\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\Delta} = 0$ d'après ce que l'on a dit précédemment.

Ainsi un gyroscope, soumis à un changement d'orientation, exerce sur le milieu extérieur (support) un couple gyroscopique d'expression :

$$\vec{\Gamma}_{O, \text{gyr.} \rightarrow \text{sup.}} = \vec{L}_O \times \vec{\omega}_{\Delta/\mathcal{R}_0}$$

On peut parler d'une application liée à ces propriétés : à savoir la stabilisation de trajectoire.

4. Si vous voulez voir quand est-ce que ce n'est pas le cas, allez-voir dans [3] fin du §20.3 Le gyroscope.

5. Un gyroscope (du grec *qui regarde la rotation*) est un appareil qui exploite le principe de la conservation du moment angulaire en physique (ou encore stabilité gyroscopique ou effet gyroscopique).

1.3.2 Application

Embarqué dans un véhicule accéléré (navire, avion, cabine spatiale), un gyro permet de maintenir le véhicule sur la trajectoire prévue. En effet, si ce dernier vient à changer accidentellement de trajectoire, l'axe du gyro, fixe par rapport aux étoiles, change d'orientation par rapport au véhicule. Ce changement est alors utilisé pour déclencher un mécanisme chargé de redresser la trajectoire du véhicule.

Remarque : on peut également mettre en évidence la rotation de la Terre.

On va maintenant voir les propriétés d'un gyroscope lorsque cette fois son centre de rotation n'est pas confondue avec son centre de gravité (typiquement une toupie).

1.4 Gyroscope déséquilibré : $O \neq G$ ([1] - Chap. Approx. gyro.)

Une toupie a son centre de rotation en contact avec le support et son centre de gravité surélevé par rapport à ce dernier. Lorsque l'on lance une toupie, on observe (plus facilement au bout d'un certain temps) un mouvement de précession du sommet de la toupie. Interprétons cette expérience dans l'approximation gyroscopique.

Considérons une toupie conique de masse m , de centre de masse G , posée sur sa pointe. Elle est soumise à son poids et à la réaction du support sur la pointe au point O . Le couple associé au poids n'est plus nul, il vient :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{R_0} = \vec{\Gamma}_O = \vec{OG} \times m\vec{g} = \frac{\ell}{L_O} \vec{L}_O \times -mg\vec{z}_0$$

puisque le moment cinétique est parallèle au vecteur \vec{OG} de longueur ℓ . On projette cette équation sur \vec{L}_O et sur \vec{z}_0 . On obtient :

$$\vec{L}_O \cdot \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{R_0} = \vec{L}_O \cdot \left(\frac{mg\ell}{L_O} \vec{L}_O \times \vec{z}_0 \right) = 0 \text{ soit } \frac{dL_O^2}{dt} = \frac{dL_O^2}{dt} = 0 \text{ et } L_O = \text{cste}$$

$$\vec{z}_0 \cdot \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{R_0} = \vec{z}_0 \cdot \left(\frac{mg\ell}{L_O} \vec{L}_O \times \vec{z}_0 \right) = 0 \text{ soit } \frac{dL_{Oz_0}}{dt} = 0 \text{ et } L_{Oz_0} = \text{cste}$$

Ainsi, le moment cinétique \vec{L}_O décrit un cône d'axe Oz_0 , d'angle au sommet constant. La toupie effectue un mouvement de précession autour de l'axe Oz_0 .

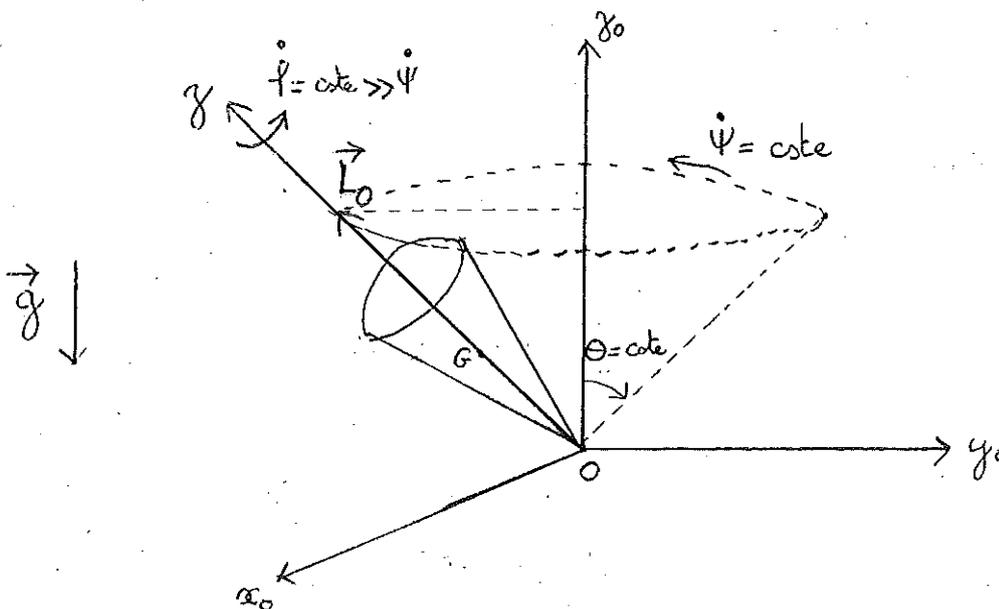


Figure 2: Mouvement de précession de la toupie

Remarque : Ce mouvement de précession à angle constant suppose que l'on ait négligé les forces de frottement. Dans le cas contraire, la vitesse de rotation propre ainsi que la vitesse de précession s'affaiblissent et l'angle de nutation augmente jusqu'à la valeur $\theta = \pi$ à l'équilibre.

L'équation vectorielle précédente, caractéristique du mouvement de précession, s'écrit aussi :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}_O \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}_p = -\frac{m\vec{g}\ell}{L_O} = \frac{mg\ell}{L_O} \vec{z}_0 \approx \frac{mg\ell}{C\dot{\varphi}} \vec{z}_0$$

avec $\vec{\omega}_p$ la vitesse angulaire de précession. On peut calculer un ordre de grandeur pour la toupie.

Ordre de grandeur : Pour une toupie conique de hauteur $h = 5\text{cm}$ et de rayon de base $R_b = 3\text{cm}$, qui tourne à la vitesse $\dot{\varphi} = 30\text{tr/s}$, on trouve, puisque $\ell = 3h/4$ et $C = 3mR_b^2/10$:

$$\omega_p = \dot{\Psi} = \frac{mg\ell}{C\dot{\varphi}} = 7.2 \text{ rad/s} = 1.1 \text{ tr/s}$$

La période de précession est égale à $2\pi/7.2 = 0.8\text{seconde}$.

On voit que l'on vérifie bien l'approximation gyroscopique avec la toupie car on a bien $\dot{\varphi} \gg \dot{\Psi}, \dot{\theta}$.

On va tout de suite mettre en évidence des phénomènes macroscopique quotidien dérivant de ses propriétés. En commençant par l'étude de la précession des équinoxes.

2 Domaine macroscopique

2.1 Précession des équinoxes ([1] - Chap. Approx. gyro.)

On trouve le phénomène de précession que nous venons de décrire également sur la Terre. Les équinoxes qui sont les jours où le Soleil est à la verticale de l'équateur, dépendent de la direction de l'axe de rotation de la Terre. Cet axe fait un angle $\theta_0 \approx 23,5^\circ$ avec la droite perpendiculaire au plan de l'écliptique qui est le plan contenant toutes les planètes du système solaire.

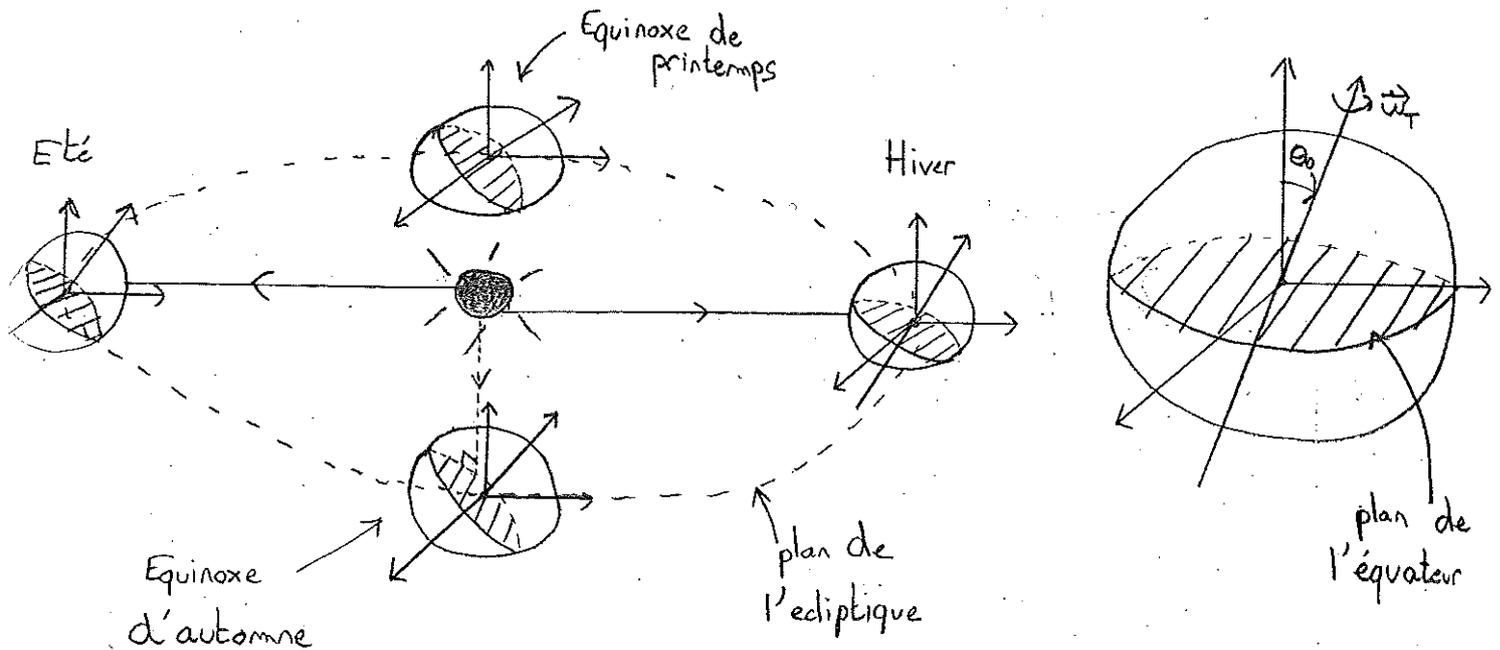


Figure 3: Equinoxes

Comme dans le cas de la toupie, on montre que le centre de gravité et le centre de rotation ne sont pas confondus sur la Terre : on a un gyroscope déséquilibré. Ceci est dû entre autre à la non-sphéricité de la Terre.

On montre que le moment non nul des forces gravitationnelles de la Terre en son centre T a pour expression :

$$\vec{\Gamma}_T = -K \sin(2\theta_0) \vec{x}_2 \quad \text{avec} \quad K = \frac{3}{4}G(C - A) \left(\frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3} \right)$$

où G est la constante de gravitation, C et A les moments d'inertie de la Terre, M_S et M_L sont respectivement la masse du Soleil et celle de la Lune, r_S et r_L sont les distances séparant respectivement la Terre du Soleil et de la Lune.

Par analogie avec ce que l'on a écrit précédemment on écrit la vitesse de précession comme

$$\dot{\Psi} = \frac{-K \sin(2\theta_0) / \sin \theta_0}{C\dot{\phi}} = \frac{-2K \cos \theta_0}{C\dot{\phi}}$$

ce qui correspond à la période de précession :

$$T_p = \left| \frac{2\pi}{\dot{\Psi}} \right| = \frac{C\dot{\phi}\pi}{K \cos \theta_0}$$

$$T_p = \frac{\dot{\phi}\pi}{\cos \theta_0} \frac{4}{3G} \frac{C}{C - A} \left(\frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3} \right)^{-1}$$

Application Numérique (cf. [1]) : $\theta_0 \approx 23.5^\circ$, $\dot{\phi} = 7.3 \text{ s}^{-1}$, $\frac{C}{C - A} = 306$, $M_S = 1.97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $r_S = 1.50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ et $r_L = 3.85 \cdot 10^8 \text{ m}$. On trouve alors une période de précession de

$$T_p = 25\,900 \text{ ans}$$

On peut vérifier encore une fois l'approximation gyroscopique, on a :

$$\frac{\dot{\phi}}{\dot{\Psi}} = \frac{T_p}{1 \text{ jour}} \approx 10^7 \gg 1$$

L'approximation gyroscopique est vérifiée!!!

2.2 Effet paradoxal ([3] - §20.3)

si on lâche bêtement une toupie, l'effet de son poids est de la faire tomber.

Dans le cas d'un mouvement gyroscopique, l'effet de la pesanteur est d'introduire un mouvement dans le plan horizontal.

* *Expérience* : Si on lance la rotation du gyroscope à l'aide de la manivelle et on exerce une force verticale alors on observe un mouvement horizontale. Et inversement si on exerce une force horizontale, on a un mouvement vertical.

Ce comportement du solide diffère donc de son comportement en l'absence de rotation, c'est pourquoi on appelle cet effet l'effet paradoxale (ou effet gyroscopique).

Cette propriété confère au solide en rotation propre dans l'approximation gyroscopique une très grande stabilité.

C'est ce qui explique qu'un cerceau ou une roue de vélo ne tombent pas quand on se penche, mais tournent.

* *Expérience* : Si on met en rotation la roue de vélo selon l'axe horizontale et qu'on essaye de pencher son axe on observe que c'est difficile. Comme on l'a dit précédemment le couple gyroscopique fait son effet. On peut aussi voir que si on se mettait sur un tabouret pivotant en essayant de pencher l'axe de rotation de la roue, il se mettrait à tourner.

C'est aussi ce qui explique qu'un vélo continue sur sa trajectoire quand on lâche le guidon, alors qu'à l'arrêt c'est dur!

On a vu des effets dans le domaine astronomique puis de la vie de tous les jours, on va voir maintenant qu'il y a également des effets dans le domaine microscopique

3 Domaine microscopique

3.1 Précession d'un moment magnétique ([1], [4])

On considère un système (un atome d'hydrogène par exemple) de moment cinétique \vec{J} , et plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = B_0 \vec{z}_0$.

Ce système possède un moment magnétique $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$, où γ est le rapport gyromagnétique.

Le champ magnétique va avoir tendance à aligner le moment magnétique avec le champ, on a donc apparition d'un couple. On peut écrire l'évolution de \vec{J} :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}}{dt} &= \vec{\mu} \times \vec{B}_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{\mu}}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{\mu}}{dt} &= \gamma \vec{\mu} \times \vec{B}_0 = -\gamma \vec{B}_0 \times \vec{\mu} \end{aligned}$$

En posant $\vec{\omega}_L = -\gamma \vec{B}_0$, on a

$$\boxed{\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega}_L \times \vec{\mu}}$$

Ce qui est une équation de précession à la pulsation $\vec{\omega}_L = -\gamma B_0 \vec{z}_0$ appelée précession de Larmor⁶.

Ainsi pour un moment magnétique d'origine purement intrinsèque, l'image classique la plus simple du spin est celle d'une particule en rotation sur elle-même, constituant un gyroscope.

3.2 Vérification de l'A.G. dans le cadre du modèle de Bohr ([1])

On considère le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

On cherche à évaluer ω_L . L'électron suit une trajectoire circulaire de rayon a_0 (rayon de Bohr).

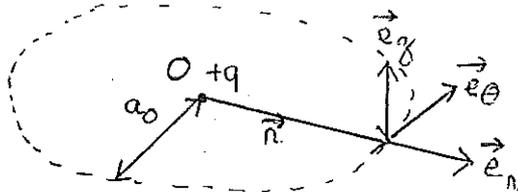


Figure 4: Trajectoire circulaire de l'électron

On détermine $\vec{\mu}$ en considérant une boucle de courant :

$$\vec{\mu} = IS \vec{z}_0 = -\frac{q\omega}{2\pi} \pi a_0^2 \vec{z}_0 = -\frac{q\omega a_0^2}{2} \vec{z}_0$$

où ω est la vitesse de rotation de l'électron sur son orbite.

Le moment cinétique en O s'écrit :

$$\vec{L}_0 = a_0 \vec{e}_r \times m a_0 \omega \vec{e}_\theta = m a_0^2 \omega \vec{e}_z$$

On a donc $\gamma = \frac{\mu}{L_0}$ ce qui nous donne

$$\boxed{\gamma = -\frac{q}{2m}}$$

6. nommée d'après Sir Joseph Larmor (1857-1942), physicien, mathématicien et homme politique irlandais.

Ordre de grandeur : $q \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m \approx 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, on a donc $\gamma \approx -8.8 \cdot 10^{10} \text{ C/kg}$.

Pour un champ magnétique $B_0 \approx 1 \text{ T}$, on a $\omega_L \approx 8.8 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$

On va maintenant comparer ω_L à ω .

Dans le cadre du modèle de Bohr, on a $v = \alpha c = \omega a_0$, ce qui donne $\omega = \frac{\alpha c}{a_0}$ avec α la constante de structure fine.

Ordre de grandeur : $a_0 = 53 \text{ pm}$, $\alpha = 1/137$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. On trouve pour ω :

$$\omega \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

On a donc bien $\omega \gg \omega_L$, l'approximation gyroscopique est encore bien vérifiée.

On en déduit que la perturbation apportée par le champ magnétique au mouvement orbital de l'électron reste faible (cf. théorie des perturbations en mécanique quantique lors du calcul du hamiltonien de l'atome d'hydrogène).

On va maintenant voir une application de la précession du moment magnétique de l'électron : la Résonance Magnétique Nucléaire

3.3 Application : RMN ([1], [4])

En plus du champ magnétique uniforme \vec{B}_0 on soumet des échantillons de matière et donc des dipôles magnétique, à un champ magnétique \vec{B}_1 d'intensité beaucoup plus faible, perpendiculaire à \vec{B}_0 , tournant à la vitesse $\vec{\omega} = \omega \vec{z}_0$.

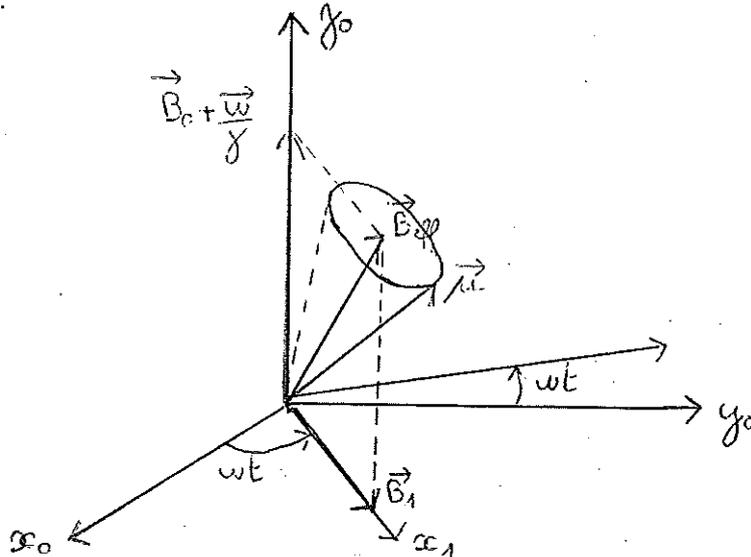


Figure 5: Champ magnétique tournant

Le référentiel terrestre est noté $\mathcal{R}_0(O, x_0, y_0, z_0)$ et le référentiel tournant $\mathcal{R}_1(O, x_1, y_1, z_1)$. Dans \mathcal{R}_0 le théorème du moment cinétique appliqué au dipôle s'écrit :

$$\left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\omega} \times \vec{\mu} = \gamma \vec{\mu} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$$

et dans \mathcal{R}_1 on peut écrire :

$$\left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} - \vec{\omega} \times \vec{\mu} = \gamma \vec{\mu} \times (B_0 \vec{z}_0 + B_1 \vec{x}_1 + \frac{\omega}{\gamma} \vec{z}_0)$$

De même que $\vec{\omega}_L = -\gamma B_0 \vec{z}_0 = \omega_L \vec{z}_0$, la vitesse de précession du dipôle autour du champ tournant est $\vec{\omega}_1 = -\gamma B_1 \vec{x}_1 = \omega_1 \vec{x}_1$, et si on pose $\Delta\omega = \omega - \omega_L$, dans le référentiel tournant on obtient :

$$\left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{\mu} \times (\Delta\omega \vec{z}_0 - \omega_1 \vec{x}_1) = \gamma \vec{\mu} \times \vec{B}_{eff}$$

Le champ $\vec{B}_{eff} = (B_0 + \frac{\omega}{\gamma})\vec{z}_0 + B_1\vec{x}_1$ est le champ magnétique vu par le dipôle dans \mathcal{R}_1 . Donc dans \mathcal{R}_1 où \vec{B}_{eff} est fixe, $\vec{\mu}$ a un mouvement de précession autour de \vec{B}_{eff} .

Maintenant interprétons les cas lorsque l'on fait varier la vitesse du champ tournant.

- ① Si $\omega \gg \omega_L, \omega_1 \implies \Delta\omega \gg \omega_1$, alors \vec{B}_{eff} est pratiquement confondu avec \vec{z}_0 et la précession autour de \vec{B}_{eff} ne modifie que peu la direction du moment magnétique.
- ② Si $\omega \ll \omega_L, \omega_1$, \vec{B}_{eff} fait un très grand angle avec \vec{z}_0 .
- ③ Si $\Delta\omega = 0$, \vec{B}_{eff} est selon \vec{x}_1 et le moment magnétique peut même être complètement retourné. On appelle ce phénomène résonance magnétique, et $\omega = \omega_L$ est la pulsation de résonance.

L'utilisation de la RMN en chimie et en biologie repose sur le fait que l'environnement chimique d'un atome modifie légèrement la valeur du champ magnétique : $B_0 \rightarrow B_0(1 - \delta)$ avec $\delta \approx 10^{-6}$. Le déplacement de la fréquence de résonance qui en résulte donne des informations sur l'environnement chimique de l'atome.

Conclusion

On a vu dans cette leçon comment définir un solide en rotation autour d'un point fixe et quelles étaient les propriétés qui découlaient de cette rotation lorsque qu'elle se déroule préférentiellement sur un axe.

On a étudié deux cas différents l'un où le centre de rotation est confondu avec le centre de gravité et l'autre où ce n'est pas le cas. On a pu mettre en relation notre étude avec un objet de la vie d'un enfant(ou pas) : à savoir la toupie.

Puis on a compris une propriété intéressante du gyroscope à savoir qu'il garde toujours la même direction.

On a compris le phénomène de précession des équinoxes qui met en défaut une partie de l'astrologie.

Finalement on s'est intéressé aux effets dans le domaine microscopique et aux applications utiles comme la RMN. D'ailleurs pour plus de détail je vous renvoie à la leçon traitant de ce sujet, qui incorpore la mécanique quantique à la description.

Pour traiter un peu plus correctement le sujet on aurait pu également rajouter les frottements lors des rotations des solides.

Commentaires personnels

ra

ra

ra