

LP4:Approximation Gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique.

Augustin Ernoult, Raphaël Poryles

2012-2013

Références

- [1] J.P. Pérez "Mécanique Fondements et applications", éd. Dunod.
- [2] P.Brasselet "Mécanique PCSI - MPSI, 1^{ère} année",p.200, Physique Chimie Prépa, éd. puf.
- [3] M.Bertin, J.P.Faroux, J.Renault "Mécanique 2 : mécanique du solide et notions d'hydrodynamique", éd. Dunod Université.
- [4] J.C.Radix, "Aspect modernes des gyroscopes", BUP 587
- [5] Claude Cohen-Tannoudji, "Mécanique quantique", Hermann

Pré-requis

- Théorème du moment cinétique
- Magnétisme

Table des matières

1	Généralités sur l'approximation gyroscopique	1
1.1	Angle d'Euler [1]	1
1.2	Approximation Gyroscopique	1
2	Effet dans le domaine macroscopique	2
2.1	Hypothèse sur le solide et conséquence sur son moment cinétique	2
2.2	Gyroscope centré ($G = O$) [1, 4]	2
2.3	Solide soumis à un couple extérieur [1, 3, 4]	2
2.3.1	Couple gyroscopique	2
2.3.2	Mouvement de précession	4
3	Effets dans le domaine microscopique	6
3.1	Rapport gyro-magnétique [1]	6
3.2	Précession du moment magnétique [1]	7
3.3	Résonance Magnétique [5]	7

Rapport du jury

2012, 2011 "Les candidats ignorent trop souvent les principes de fonctionnement et les performances des gyroscopes modernes."

2010, 2009 "Les hypothèses de l'approximation sont très rarement énoncées clairement et encore plus rarement vérifiées dans le traitement des applications. L'équation de précession est un concept utile."

2008 "Il est rappelé que le moment cinétique et le vecteur rotation ne sont a priori pas colinéaires."

2006, 2007 "Une illustration expérimentale aide à la compréhension de cette leçon. Un temps suffisant doit être consacré au domaine microscopique. Les équations d'évolution du moment magnétique en présence d'un champ magnétique tournant doivent être clairement établies dans le repère tournant. Les conditions de résonance et les applications de la résonance magnétique doivent être discutées. Le lien avec l'approche quantique peut être évoqué mais il faut éviter de sombrer dans le détail des calculs."

- 2005 "La réalisation d'expériences est toujours appréciée dans cette leçon, surtout si elles sont mises clairement en relation avec les résultats théoriques. Comme dans toute leçon de mécanique, les référentiels doivent être correctement définis. La notion de référentiel barycentrique, quand elle est introduite, est souvent confuse. Le temps imparti au domaine microscopique est trop court."
- 2002 "Les applications citées ou les expériences présentées pour illustrer la notion de couple gyroscopique sont souvent très mal comprises. L'aspect paradoxal peut être évoqué. Pour la résonance magnétique nucléaire, il faut décrire soigneusement le dispositif, dégager l'origine physique du mot résonance et préciser la nature du signal détecté. Le magnétisme atomique ne peut pas être limité au magnétisme orbital."
- 2000 "Cette leçon doit comporter une illustration expérimentale. Les applications dans le domaine microscopique doivent être présentées de façon crédible, en particulier la R.M.N., pour laquelle une interprétation quantique peut être donnée."
- 1998 Dans l'approximation gyroscopique, il est important de souligner à la fois le caractère constant du module du moment cinétique et celui de sa projection sur la direction d'action de la force appliquée.

Introduction

Un mobile (solide ou particule) "libre" dans l'espace, à six degrés de liberté, 3 de translations et trois de rotations. Nous nous intéresserons ici à l'étude d'un solide dont les trois degrés de translation sont bloqués. Nous nous restreignons à l'étude de ces mobiles dans une approximation particulière ayant des effets dans la physique à différentes échelles : du mouvement des planètes à celui d'électrons : l'approximation gyroscopique.

1 Généralités sur l'approximation gyroscopique

1.1 Angle d'Euler [1]

Commençons par fixer les paramètres qui seront utiles à notre étude. On définit 4 repères tous en rotations les uns avec les autres autour d'un même point fixe, O .

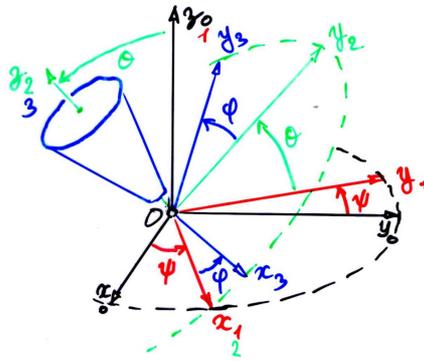


FIGURE 1 – Schéma des angles d'Euler

Le repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un référentiel galiléen.

Le repère $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est obtenu par une rotation d'angle ψ autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$: ψ est appelé angle de **précession**.

Le repère $\mathcal{R}_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est obtenu par une rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$: θ est appelé angle de **nutation**.

Le repère $\mathcal{R}_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est obtenu par une rotation d'angle φ autour de l'axe $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$: C'est le repère rattaché à notre mobile. φ est appelé angle de **rotation propre**.

La vitesse de rotation du mobile dans \mathcal{R}_0 s'écrit alors :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\varphi} \vec{z}_3 \quad (1.1)$$

Dans notre problème on étudiera le déplacement global du mobile dans \mathcal{R}_0 . On étudiera pour cela le mouvement du repère \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_0 , ce qui nous permettra de s'astreindre du mouvement de rotation propre dans la compréhension du mouvement. Pour cela on écrit la vitesse de rotation de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_0 (ici dans le repère \mathcal{R}_2) :

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad (1.2)$$

1.2 Approximation Gyroscopique

L'approximation gyroscopique consiste à supposer que la vitesse de rotation propre du mobile est très grande devant les autres vitesses de rotations :

$$\begin{cases} |\dot{\varphi}| \gg |\dot{\theta}| \\ |\dot{\varphi}| \gg |\dot{\psi}| \end{cases}$$

La vitesse de rotation du solide peut alors être approximée par :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{3/0} \approx \dot{\varphi} \vec{z}_3 \quad (1.3)$$

2 Effet dans le domaine macroscopique

2.1 Hypothèse sur le solide et conséquence sur son moment cinétique

On suppose que notre solide à une symétrie de révolution autour de son axe de rotation propre. Son moment d'inertie en son centre de gravité G s'écrit alors dans son repère propre \mathcal{R}_3 :

$$I_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B = A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_3} \quad (2.1)$$

De plus, cela implique $\overrightarrow{OG} = a\vec{z}_3$. En posant m la masse totale du solide on a alors :

$$I_O = \begin{bmatrix} A + ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & A + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_3} = \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_3} \quad (2.2)$$

Le moment cinétique du solide s'écrit alors au point O :

$$\overrightarrow{L_{O \in \mathcal{R}_3/0}} = I_O \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \approx C \dot{\varphi} \vec{z}_3 \quad (2.3)$$

Dans l'approximation gyroscopique le moment cinétique est donc quasiment parallèle à l'axe de rotation propre.

2.2 Gyroscope centré ($G = O$) [1, 4]

Intéressons nous au cas d'un gyroscope centré : $G = O$. Le moment du poids est donc nul, et si aucune autre force extérieure n'est appliquée, on a, d'après le théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O \in \mathcal{R}_3/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} \quad (2.4)$$

$$C \left(\frac{d\dot{\varphi}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} \vec{z}_3 + C \dot{\varphi} \left(\frac{d\vec{z}_3}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} \quad (2.5)$$

En remarquant que \vec{z}_3 et sa dérivé au cours du temps sont perpendiculaire et en projetant sur l'un puis l'autre vecteurs, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\varphi} &= \text{cste}_{\mathcal{R}_0} \\ \vec{z}_3 &= \text{cst}_{\mathcal{R}_0} \end{cases} \quad (2.6)$$

La vitesse de rotation propre est donc conservée. De plus, et c'est ce qui est remarquable, la direction de rotation propre du solide est constante dans tous référentiels galiléen. Cette propriété implique de nombreuses applications.

Utilisation en tant que "boussole" non magnétique dans les véhicule tel que les fusées, sous-marins, avions etc. En effet il permet de garder fixe une direction, que ce soit le cap, où l'horizontale.

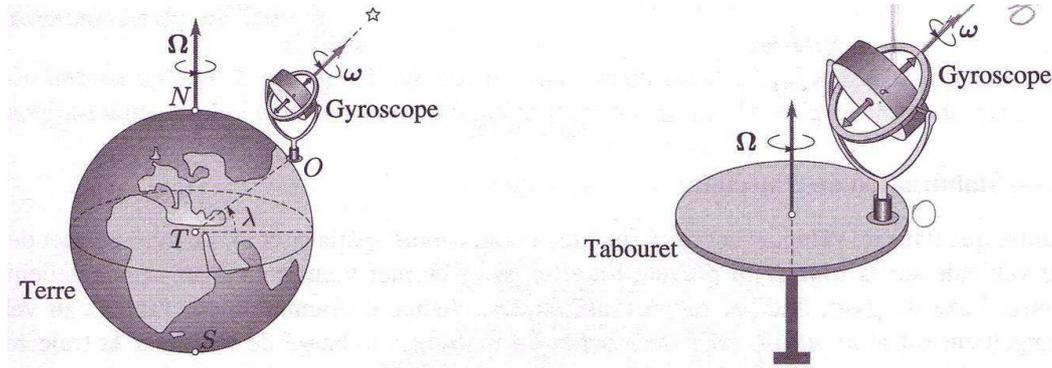
Application : Mesure de la vitesse de la rotation de la Terre : cela suppose une vitesse de rotation entretenu par un moteur "embarqué" et un équilibrage parfait de la masse et des frottements, pour la raison que nous allons voir tout de suite.

2.3 Solide soumis à un couple extérieur [1, 3, 4]

2.3.1 Couple gyroscopique

Supposons maintenant qu'on applique un couple extérieur $\overrightarrow{\Gamma_{ext}}$ sur le solide afin de modifier la direction de l'axe rotation propre. L'objectif n'étant pas ici de modifier la vitesse de rotation propre on prendra $\overrightarrow{\Gamma_{ext}} \perp \vec{z}_3$. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O \in \mathcal{R}_3/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{L_{O \in \mathcal{R}_3/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{L_{O \in \mathcal{R}_3/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{ext}} \quad (2.7)$$



Rotation de la Terre

J.P Pérez, Mécanique 6ème édition

FIGURE 2 – Conservation de l’axe de rotation

En projetant sur le vecteur \vec{z}_3 , on obtient la conservation du moment cinétique dans le repère \mathcal{R}_2 soit $\dot{\varphi} = cste$. Le théorème du moment cinétique s’écrit alors :

$$\left. \frac{dL_{O \in \mathcal{R}_3/0}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge L_{O \in \mathcal{R}_3/0} = \vec{\Gamma}_{ext} \quad (2.8)$$

En écrivant cette équation sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C\dot{\varphi} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} = \begin{bmatrix} \Gamma_{ext}^{(x_2)} \\ \Gamma_{ext}^{(y_2)} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad (2.9)$$

ou encore sous la forme d’un système :

$$\begin{cases} \Gamma_{ext}^{(x_2)} = \Omega_{2/0}^{(y_2)}(C\dot{\varphi}) = \dot{\psi} \sin \theta (C\dot{\varphi}) \\ \Gamma_{ext}^{(y_2)} = -\Omega_{2/0}^{(x_2)}(C\dot{\varphi}) = -\dot{\theta}(C\dot{\varphi}) \end{cases} \quad (2.10)$$

On voit ici apparaître ce qui est appelé l’**effet paradoxale**. En effet, contrairement à ce qu’on attend pour un solide qui n’est pas en rotation, ici lorsque l’on applique un couple autour de l’axe \vec{x}_2 on obtient une rotation autour de l’axe \vec{y}_2 et inversement.

Illustration expérimentale.

On voit aussi ici, que si on impose une rotation autour d’un autre axe que celui de rotation propre, le solide impose alors un couple normal à son axe de rotation propre et à l’axe de la rotation induite à son socle. On appelle ce couple le **couple gyroscopique** qui s’écrit :

$$\vec{\Gamma}_g = L_{O \in \mathcal{R}_3/0} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} \quad (2.11)$$

On peut aussi le voir comme un couple d’inertie, due à la rotation du référentiel \mathcal{R}_2 par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_0 de la même manière qu’apparaissent des forces d’inertie dans des référentiels accélérés par rapport aux référentiels galiléens. Application : Gyroscope anti-roulis ([1]) :

Un gyroscope d’axe de rotation propre vertical peut être placé dans un bateau. Un capteur détecte le roulis (oscillations babord/tribord) et entraîne une rotation horizontale (avant/arrière) pour que le gyroscope impose un couple gyroscopique contrant le roulis. Cela permet d’améliorer le confort ou la stabilité de la marchandise.

ODG :

$$\begin{aligned} m &\approx 5 \cdot 10^4 \text{kg} \\ r &\approx 1 \text{m} \\ \dot{\varphi} &\approx 15 \times 2\pi \text{rad.s}^{-1} \\ \dot{\theta} &\approx 1 \text{rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

On obtient alors un couple gyroscopique de l'ordre de :

$$|\Gamma_g| = L_O \Omega_{2/0} \approx m r^2 \dot{\varphi} \psi \approx 5 \cdot 10^4 \times 15 \times 2\pi \approx 4,5 \cdot 10^6 \text{N.m} \quad (2.12)$$

Soit l'équivalent de l'ajout ou l'allègement d'une masse d'environ 10 tonnes de chaque côtés d'un bateau d'une largeur de l'ordre de la dizaine de mètres.

2.3.2 Mouvement de précession

Supposons le cas d'un couple créé par une force constante au cours du temps et uniforme dans un référentiel galiléen. On peut alors redéfinir le repère \mathcal{R}_0 tel que la force soit parallèle à \vec{z}_0 . Par définition d'un couple, il est normal à la direction de la force qui en est la cause, on a donc $\vec{\Gamma}_{ext} \perp \vec{z}_0$. En ajoutant l'hypothèse que $\vec{\Gamma}_{ext} \perp \vec{z}_3$ on montre que $\vec{\Gamma}_{ext} \parallel \vec{x}_2$. D'après les formules précédentes on a donc $\theta = cste$ et on aura donc à priori juste une vitesse de précession. Retrouvons cela d'une autre manière.

En projetant l'équation précédente sur ce vecteur \vec{z}_0 , on obtient :

$$\frac{d\left(\overrightarrow{L_{O \in 3/0}} \cdot \vec{z}_0\right)}{dt} \Bigg|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d\left(L_{O \in 3/0} \cos \theta\right)}{dt} \Bigg|_{\mathcal{R}_0} = 0 \quad (2.13)$$

De plus en multipliant les deux membres de l'équation par le moment cinétique on obtient :

$$\overrightarrow{L_{O \in 3/0}} \cdot \frac{d\overrightarrow{L_{O \in 3/0}}}{dt} = \overrightarrow{L_{O \in 3/0}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{L_{O \in 3/0}}\right) \quad (2.14)$$

$$\frac{d\left(L_{O \in 3/0}\right)^2}{dt} \Bigg|_{\mathcal{R}_0} = 0 \quad (2.15)$$

On voit alors apparaître ici deux propriétés intéressantes du moment cinétique : sa norme et sa projection sur l'axe de la force sont conservées dans le repère \mathcal{R}_0 au cours du mouvement. Le moment cinétique $\overrightarrow{L_{O \in 3/0}}$ décrit alors un cône autour de l'axe \vec{z}_0 . L'angle de nutation θ est constant, et la vitesse de précession est constante :

$$\dot{\psi} = \frac{\Gamma_{ext}}{C \dot{\varphi} \sin \theta} \quad (2.16)$$

On parle ainsi de mouvement de précession.

FIGURE 3 – Schéma du mouvement de précession

On appelle alors **équation de précession** toutes équations de la forme :

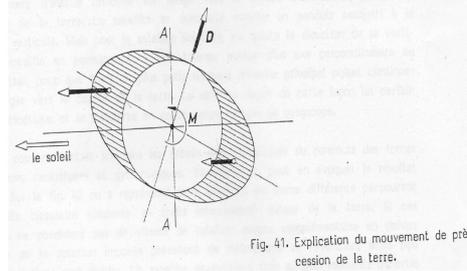
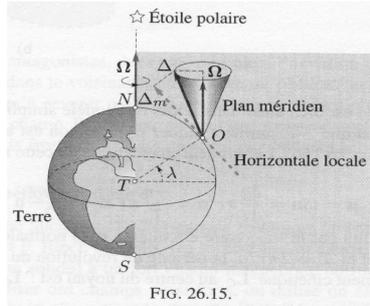
$$\frac{d\overrightarrow{L_{O_i n 3/0}}}{dt} \Bigg|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\omega}_p \wedge \overrightarrow{L_{O \in 3/0}} \quad (2.17)$$

où ω_p est appelée **vitesse de précession** (attention, a priori, ce n'est pas forcément la vitesse de précession au sens des angles d'Euler).

Remarque : si on a des frottements θ varie et l'axe de rotation propre tend à s'aligner avec la force qui a donné naissance au couple, où encore le moment cinétique s'aligne avec le vecteur vitesse de précession.

Application au gyro-compas (si on a le temps) [4, 1] et surtout [3] : en effet la Terre, de part sa rotation force la précession d'un gyroscope entretenu fixé à sa surface. Si on lui laisse pour seul degré de liberté, la rotation dans le plan horizontal, au bout de plusieurs jours, il fini par s'orienter avec le méridien. Ensuite, en ne lui

LA TERRE ET L'EFFET GYROSCOPIQUE



Fichier :08PME202
 Titre :La terre et l'effet gyroscopique
 Sources :Mécanique,Perez,fig 26.15 p423,Dunod & notice gyroscope,Phywe fig 4.1 p71
 Cote :ME2

FIGURE 4 – Gyrocompas et Précession des équinoxe

laissant plus que la rotation dans le plan vertical+ méridien de libre, il fini par s'orienter avec l'axe de rotation de la Terre. Ceci est utilisé d'après le BUP de 1976, en topologie, ou dans les sous-marins...

Cas du poids :

Supposons un solide non centré, on a alors $\vec{OG} = a\vec{z}_3$. Le poids induit alors un couple en O qui s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_p = (a\vec{z}_3) \wedge (-mg(\cos\theta\vec{z}_3 + \sin\theta\vec{y}_2)) \tag{2.18}$$

$$= mga \sin\theta\vec{x}_2 \tag{2.19}$$

On trouve alors d'après les expressions précédentes :

$$\dot{\psi} = \frac{mga}{C\dot{\varphi}} \tag{2.20}$$

On a donc bien un mouvement de précession autour de la verticale du lieu.

Illustration expérimentale

Application : Précession des équinoxe ([1], il y a un autre calcul peut être plus intuitif mais plus long dans [2])

On peut montrer que le couple appliqué par le Soleil et la Lune sur la Terre à cause de sa non sphéricité s'écrit (fig 4) :

$$|\Gamma_{S+L \rightarrow T}| = a \sin(2\theta)G(C - A) \left(\frac{M_L}{D_L^3} + \frac{M_S}{D_S^3} \right) \tag{2.21}$$

où les M_i représentent les masses des astres et les D_i leur distance à la Terre. C et A sont les coefficients du moment d'inertie de la Terre et G la constante de gravitation. On voit ici que ce moment est du à la non sphéricité de la Terre ($C \neq A$). Dans le cadre de l'approximation gyroscopique on a vue que la vitesse de précession est :

$$\dot{\psi} = \frac{\Gamma_{S+L \rightarrow T}}{C\dot{\varphi}} \tag{2.22}$$

Or d'après la troisième loi de Kepler on a que $GM_A/D_A^3 = (2\pi/T_a)^2$ où T_a est la période annuelle. On sait de plus que $\dot{\varphi} = 2\pi/T_j$ où T_j est la période journalière, d'où :

$$\dot{\psi} \approx 2\pi \frac{C - A}{C} \left(\frac{T_j}{T_a} \right)^2 \tag{2.23}$$

avec $(C - A)/C \approx 1/300$, $T_j = 1$, $T_a \approx 300$, on a :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\psi}} \approx 9.10^4 T_a \quad (2.24)$$

Soit une précession de période 90000 ans. En réalité on est plutôt autour de 26000ans. Bon ordre de grandeur. On peut maintenant vérifier l'approximation Gyroscopique : on a bien $T \gg T_j$ et donc $\dot{\psi} \gg \text{psi}$.

Exemple moto vélo (de moi...) :

Si on a le temps, pour casser les idées pré-conçues sur le couple gyroscopique.... ODG :

$$\begin{aligned} a &\approx 1m \\ r &\approx 0,3m \\ v_{moto} &\approx 30m/s \\ v_{velo} &\approx 3m/s \end{aligned}$$

La vitesse de rotation de la roue est alors :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{moto} &= \frac{v_{moto}}{2\pi r} \approx 20 \text{rad/s} \\ \dot{\varphi}_{velo} &\approx 2 \text{rad/s} \end{aligned}$$

La vitesse de précession dans un tournant est de l'ordre de $\dot{\psi} \approx 0,5 \text{rad/s}$. On peut donc faire l'approximation gyroscopique pour la moto, mais pas pour le vélo !!

On vient de voir un effet de l'approximation gyroscopique à l'échelle des planètes sur des temps très long. Comme dit en introduction, cette approximation peut aussi avoir des effets dans le domaine microscopique. Nous allons nous y intéresser maintenant.

3 Effets dans le domaine microscopique

Nous allons dans un premier temps, étudier l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr et voir en quoi on peut retrouver une approximation gyroscopique.

3.1 Rapport gyro-magnétique [1]

(ATTENTION : L'histoire de l'analogie de Pérez avec un barreau magnétique est un peu pourri...)

L'hydrogène, dans le modèle de Bohr, est constitué d'un électron de charge $-e$, situé à une distance a_0 d'un proton et tournant avec une période T autour de celui ci. On peut alors identifier cet électron par une spire de rayon a_0 parcouru par un courant $I = \frac{\delta q}{\delta t} = \frac{-e}{T}$. Le moment magnétique d'une telle spire est alors, en se plaçant en coordonnée cylindrique :

$$\vec{\mu} = I \vec{S} = \frac{-e}{T} \pi a_0^2 \vec{e}_z = \frac{-evr}{2} \vec{e}_z \quad (3.1)$$

où \vec{e}_z est le vecteur normale à la surface délimitée par la spire et v est la vitesse de l'électron. De plus le moment cinétique de l'électron calculé au centre du noyau est :

$$\vec{L}_C = (a_0 \vec{e}_r) \wedge (m_e v \vec{e}_\theta) = a_0 m_e v \vec{e}_z \quad (3.2)$$

On remarque alors que l'on peut écrire :

$$\vec{\mu} = \gamma_e \vec{L}_C \quad (3.3)$$

où $\gamma_e = \frac{-e}{2m_e}$ est appelé le **coefficient gyromagnétique**. On peut généraliser ce rapport de proportionnalité entre moment cinétique et moment magnétique à toute particule chargée. Ceci est particulièrement intéressant en mécanique quantique où il existe une relation entre le moment magnétique et le *spin* des particules.

3.2 Précession du moment magnétique [1]

Plaçons un tel moment magnétique (relié à un moment cinétique) dans un champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{z}_0$ uniforme et constant dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 . Ce dernier applique alors un couple sur le moment magnétique et on obtient l'équation suivante :

$$\left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 \quad (3.4)$$

$$= \gamma \vec{L}_C \wedge \vec{B}_0 \quad (3.5)$$

$$= (-\gamma \vec{B}_0) \wedge \vec{L}_C \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \omega_0 \wedge \vec{L}_C \quad (3.7)$$

On reconnaît ici une équation de précession, à condition d'être dans le cadre de l'approximation gyroscopique. La vitesse de précession, $\omega_0 = -\gamma \vec{B}_0$ est appelée pulsation de **Larmor**. Vérifions l'approximation gyroscopique dans le cas de la représentation de Bohr de l'atome d'hydrogène.

Prenons : $B_0 = 1\text{T}$, $a_0 = 0,5 \cdot 10^{-10}\text{m}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, $v \approx 10^6\text{m/s}$ et $m_e \approx 10^{-30}\text{kg}$. On a alors $\dot{\varphi} = v/a_0 \approx 2 \cdot 10^{16}\text{rad/s}$ et la pulsation de Larmor est de l'ordre de $\omega_0 \approx 10^{11}\text{rad/s}$. On a donc bien ici $\dot{\varphi} \gg \omega_0$, et on vérifie donc bien l'approximation gyroscopique. Le moment magnétique précesse donc autour de \vec{B}_0 .

3.3 Résonance Magnétique [5]

On ajoute maintenant un champ $\vec{B}_1 = B_1 \vec{x}_1$ normal à \vec{B}_0 et tournant à la vitesse $\dot{\psi} = \omega$ autour de \vec{z}_0 dans le référentiel \mathcal{R}_0 . Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)) \wedge \vec{L}_C \quad (3.8)$$

$$= (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t)) \wedge \vec{L}_C \quad (3.9)$$

où $\vec{\omega}_1 = -\gamma B_1 \vec{x}_1$. Écrivons, ce théorème du moment cinétique dans le repère tournant \mathcal{R}_1 :

$$\left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \omega \vec{z}_0 \wedge \vec{L}_C \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{L}_C \wedge (\Delta\omega \vec{z}_0 - \omega_1 \vec{x}_1) \quad (3.11)$$

avec $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. En posant $\vec{B}_{eff} = \frac{1}{\gamma} (\Delta\omega \vec{z}_0 - \omega_1 \vec{x}_1)$, on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\left. \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = -\gamma \vec{B}_{eff} \wedge \vec{L}_C \quad (3.12)$$

Le moment magnétique a donc un mouvement de précession autour de \vec{B}_{eff} dans le repère \mathcal{R}_1 .

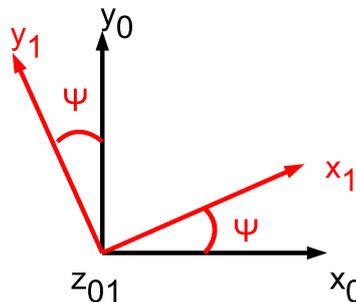
Si $\omega \ll \omega_0$, on a $\vec{B}_{eff} \approx \vec{B}_0$. La projection sur \vec{B}_0 du moment magnétique va donc être quasiment constante. Mais si on se place à la résonance $\omega = \omega_0$, on a alors : $\vec{B}_{eff} \approx \vec{B}_1$, et le signe de la projection du moment magnétique sur \vec{B}_0 alterne donc de signe au cours du temps. On parle de **résonance magnétique**.

Dans une molécule, la présence des atomes modifie localement la valeur du champ magnétique B_0 : on parle de blindage. Les techniques de RMN permettent de mesurer très précisément la pulsation de résonance pour certains atomes (par exemples les atomes d'hydrogènes) qui sera alors caractéristique de son environnement.

Conclusion

Commentaires des correcteurs

- Cette leçon est entièrement à reprendre.
- la première grosse erreur est sur la définition même de l'approximation gyroscopique. En effet elle ne porte pas sur les vitesses de rotations mais sur le moment cinétique. Et cela consiste à faire l'approximation que le moment cinétique est porté par un axe propre du système.
- Il apparaît qu'avec cette définition on ne puisse pas vraiment parler d'approximation au sens propre pour ce qui est de la résonance magnétique. Il s'agit plutôt de comportement similaire étant donné que les deux mouvements sont régis par la même équation : l'équation de précession.
- Il semblerait que les angles d'Euler, bien qu'incontournable soient difficile à être appréhendé par l'auditoire, il faut donc les expliquer clairement. Il a été aussi proposé d'utiliser une représentation plus "fractionnée" de ces angles, du type :



- Enfin cette leçon est beaucoup trop calculatoire.

Voici des pistes qui ont été données par les correcteurs sur un déroulement possible de la leçon, ou plutôt ce que j'en ai retenu...

1. Commencer par une petite expérience : prenons une toupie, si on la pose sur sa pointe sans vitesse de rotation propre elle tombe. Si on lui donne une vitesse de rotation propre elle reste sur sa pointe et est même très stable, comment expliquer cela ??
2. Introduire les paramètres nécessaire pour décrire le mouvement de la toupie : on néglige les mouvements de translations qui ne nous intéressent pas vraiment ici, on a alors seulement trois degrés de rotations que l'on décrit avec les angles d'Euler. On pose aussi la matrice d'inertie qui décrit le solide.
3. On peut alors appliquer le TMC avec un couple extérieur quelconque, on voit alors que c'est horrible (on peut poser ici les équations d'Euler pour l'illustrer..)
4. On se propose une première simplification du problème : le solide n'est soumis à aucun couple extérieur. Cela sous-entend en particulier que la toupie est équilibrer (pas de couple due au poids). On montre alors la conservation du moment cinétique.
Le peu d'information et d'interprétation physique qu'on tire de ce cas me laisse pensif sur la nécessité de l'aborder.
5. On retourne au cas avec un couple extérieur. Cherchons les approximations que l'ont peut faire pour simplifier notre problème. On remarque que lorsque la toupie est lancée, son moment cinétique est porté plus particulièrement selon un de ses axes propres : l'axe de rotation propre. Cela se traduit alors par :

$$\begin{aligned} |C\dot{\varphi}| &\gg |A\dot{\psi}| \\ |C\dot{\varphi}| &\gg |A\dot{\theta}| \end{aligned}$$

et on peut donc écrire que $\vec{L}_O \approx C\dot{\varphi}\vec{z}_3$. On appelle cette approximation : "l'approximation gyroscopique".

6. A partir de là, on peut alors traiter le TMC et obtenir les résultats de la partie "Gyroscope soumis à un couple extérieur". Bien insister sur l'interprétation physique des résultats et notamment sur la stabilité de l'objet (si l'objet est par exemple soumis à un couple due à son poids, il ne tombe pas mais précesse, etc...).
7. On illustre tout ça avec des exemples. La précession des équinoxe ne doit pas être traité entièrement (cela prend beaucoup trop de temps), mais il faut dans tous les cas avoir compris le principe car des questions seront posées dessus.
8. Passons au domaine microscopique. On peut là aussi partir d'une situation concrète, par exemple, en RMN, on cherche à obtenir des informations sur l'environnement électro-magnétique d'un ions faisant partie d'une molécule. Pour ça on cherche à mesurer très précisément le champ local B_0 modifié par cet

environnement par rapport au champ global imposé par l'expérimentateur. Commençons par caractériser notre atome.

9. Modèle de Bohr : atome \approx moment magnétique
10. rapport gyromagnétique : lien entre moment cinétique et moment magnétique.
11. On sait qu'un objet possédant un moment magnétique subit un couple lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique. Essayons de voir si le mouvement induit par ce couple ne nous permet pas de remonter à la valeur du champ ressenti B_0 !
12. Et ça marche! En effet on retrouve une équation de précession où la vitesse de précession dépend du champ ressenti.
13. Ce mouvement de précession modifie la trajectoire de l'électron, notre calcul du rapport gyromagnétique n'est peut être plus valable. On le vérifie alors avec un ordre de grandeur. C'est cette approximation qui consiste à considérer que la trajectoire de l'électron reste circulaire qui se rapproche le plus de ce qu'on a appelé l'approximation gyroscopique dans le domaine macro. En effet cela assure que le moment cinétique est porté selon un axe propre de notre système.
14. Le problème c'est de maintenant réussir à mesurer cette vitesse de précession. On sait mesurer par induction la variation d'un moment magnétique, mais pour l'instant il varie très peu d'orientation, et sa projection sur l'axe du champ ne varie même pas du tout. On cherche à lui induire un retournement sans perdre l'information donnée par la vitesse de précession. On va alors ajouter un champ B_1 orthogonal au premier champ B_0 . Pour que ce nouveau champ retourne efficacement le moment magnétique il faut qu'il suive celui-ci dans son mouvement de précession.
15. Le champ B_1 est alors un champ tournant et il apparaîtra un phénomène de résonance magnétique lorsque qu'il tournera exactement à la vitesse de précession du moment magnétique (un tel champ tournant n'est très difficile à créer car il suffit d'alimenter une bobine par un courant sinusoïdal de même fréquence).
16. On peut ainsi, en mesurant la variation du moment magnétique dans le référentiel galiléen, détecter la résonance magnétique, remonter à la valeur du champ local et finalement obtenir des informations sur l'environnement de l'atome. C'est ce principe qui est utilisé en RMN ou en IRM.