

PLAN, PRÉREQUIS ET BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRASSET, Mécanique PCSI, PUF
- [2] SIVARDIÈRE, La symétrie, EDP sciences (*origine des lois*)
- [3] HECHT, Physique (*exemples d'application et enrobage*)
- [4] SANZ, Physique PCSI, Dunod (*p731 ; signe – bizarre*)
- [5] CAGNAC, Physique atomique, Dunod (*effet Compton*)

Prérequis : – Lois de Newton (PFD...)
 – Théorème du moment cinétique (TMC)
 – Théorème de l'énergie cinétique (TEC)
 – Problème à deux corps : mobile fictif et réf. bary.
 – Expressions mathématiques des coniques
 – Notions de cinématique relativiste



I ► Origines, énoncés et illustrations des lois de ...

- I.1. ... conservation de l'énergie [1,2,3]
- I.2. ... conservation de la quantité de mouvement [1,2,3]
- I.3. ... conservation du moment cinétique [1,2,3]

II ► Mouvement à force centrale conservative

- II.1. Position du problème [1]
- II.2. Conservation du moment cinétique : loi des aires [1]
- II.3. Conservation de l'énergie : nature du mouvement [1] [4]↓
- II.4. Conservation du vecteur de Runge-Lenz : nature de la trajectoire

III ► Effet Compton

- III.1. Position du problème [5]
- III.2. Inconnues, équations et solvabilité du problème [5]
- III.3. Interprétation des observations expérimentales [5]

LP n° 4

LOIS DE CONSERVATION EN DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

Extraits des rapports du Jury des années antérieures :

Jusqu'en 2013, le titre était : « Exemples d'utilisation des lois de conservation en dynamique des systèmes. »

[2010] « Le titre est général. Les lois de conservation sont à illustrer absolument et la physique est généreuse en exemples variés. Les exemples les plus pertinents sont ceux où les deux corps sont de masses comparables. Il est très maladroit d'insister sur des illustrations où, justement, il n'y a pas de conservation simple, le système étudié n'étant par exemple pas isolé. »

Jusqu'en 2009, le titre était : « Utilisation des lois de conservation dans le problème à deux corps. Applications. »

[2009] « Le titre est général. Les lois de conservation sont à illustrer absolument et la physique est généreuse en exemples variés. Les exemples les plus pertinents sont ceux où les deux corps sont de masses comparables. Pour la leçon Exemples d'utilisation des lois de conservation en dynamique des systèmes, le jury attend que le candidat choisisse un nombre d'exemples limité, mais qu'il les analyse en profondeur. »

Commentaires du book sur ce montage :

Jusqu'en 2013, le titre était : « Exemples d'utilisation des lois de conservation en dynamique des systèmes. »

[2013] – Note : 07/20 – « Pour la Terre autour du Soleil, est-ce qu'il y a des grandeurs conservées autres que le moment cinétique et l'énergie ? Pour le pendule pesant : quelle est la propriété fondamentale qui permet la conservation de l'énergie ? J'ai fait le choc frontal avec les billes : est-ce qu'on peut toujours résoudre le problème des chocs, même en 2D ou 3D ? En parlant avec le jury le jour des résultats, ils m'ont dit qu'il fallait **prendre du recul** sur les conservations des grandeurs, les **relier à l'invariance du système** (invariance par rapport au temps donc conservation de l'énergie dans le cas du pendule), qu'il fallait chercher des grandeurs qui se conservent par exemple le **vecteur de Runge-Lenz**, et que le choc des billes est à une dimension donc ne reflète pas la réalité : en général on ne sait pas résoudre le problème. Traiter plutôt l'**effet Compton**. »

[2012] – Note : 08/20 – « Quand peut-on dire d'un objet qu'il est à l'équilibre ? Quand le moment cinétique se conserve-t-il ? Les lois de conservations permettent-elles de déterminer les vitesses des objets après le choc ? À une, deux, trois dimensions ? »

Jusqu'en 2009, le titre était : « Utilisation des lois de conservation dans le problème à deux corps. Applications. »

[2008] – Note : 08/20 – « Quelques questions sur les coniques, sur l'allure des énergies potentielles effectives en général et sur les trajectoires : à quelles conditions sont-elles elliptiques ? fermées ? »

Introduction

Nous avons précédemment vu les lois de la mécanique classique (lois de Newton, TMC, TEC) qui nous ont permis de résoudre de nombreux problèmes, où l'expression des forces était simple et connue. Dans cette leçon, nous allons adopter une autre approche pour décrire la mécanique : celle des lois de conservation. On les énoncera dans un premier temps, et on verra qu'elles sont directement associées à des principes d'invariance, ce qui leur confère un caractère très général.

On tentera de mettre en avant le fait que les lois de conservation fournissent des méthodes d'analyse souvent plus simples que celles qui consistent à résoudre analytiquement les équations auxquelles on aboutit en utilisant les lois de la mécanique, notamment en traitant deux exemples particuliers : le mouvement dans un champ de force centrale et les collisions au travers de l'effet Compton.



Amalie Emmy Noether (23 mars 1882 - 14 avril 1935) est une mathématicienne allemande spécialiste d'algèbre abstraite et de physique théorique. Décrite par Albert Einstein comme « le génie mathématique créatif le plus considérable produit depuis que les femmes ont eu accès aux études supérieures », elle a révolutionné les théories des anneaux, des corps et des algèbres. En physique, le théorème de Noether explique le lien fondamental entre la symétrie et les lois de conservation.

NB : j'en parle car c'est une des très rares femmes dont on trouve la trace dans les livres de physique (et aussi un peu parce que je me suis aperçu qu'on avait la même date de naissance). On trouve en outre des informations absolument passionnantes sur son enfance sur Wikipédia :

Elle est aimée par ses parents. Ses résultats scolaires ne sont pas remarquables, bien qu'elle soit connue pour être intelligente et aimable. Elle est myope et, durant son enfance, parle avec un défaut de prononciation. Un ami de la famille racontera, bien des années plus tard, comment Emmy avait résolu rapidement des énigmes lors d'un goûter réunissant plusieurs enfants, montrant ainsi un grand esprit de logique à un âge précoce. Emmy apprend à cuisiner et à faire le ménage — comme la plupart des petites filles de cette époque (c'était mieux avant diront les réacs ☺) — et prend des leçons de piano. Aucune de ces activités ne la passionne, à l'exception de la danse.

I – Origines, énoncés et illustrations des lois de conservation

I.1. Conservation de l'énergie

• Énoncé :

Le théorème de l'énergie cinétique, appliqué à un point matériel subissant la force totale $\vec{F}$, dans un référentiel galiléen, s'écrit lors d'un déplacement élémentaire :

$$dE_c = \delta W(\vec{F}) \quad \vec{F} : \text{extérieur / intérieur}$$

$$dE_c = \delta W(\vec{F}_c) + \delta W(\vec{F}_{nc}) \quad \text{en décomposant} \quad \vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

Or le travail des forces conservatives est égal à la diminution de l'énergie potentielle :

$$\delta W(\vec{F}_c) = -dE_p$$

L'énergie mécanique d'un point, dans un référentiel donné, est par définition la somme de ses énergies cinétique et potentielle : $E = E_c + E_p$. Etant définie de la sorte, elle dépend du référentiel considéré et est définie à une constante additive près, liée à la référence choisie pour l'énergie potentielle.

Au final :
$$dE = d(E_c + E_p) = \delta W(\vec{F}_{nc})$$

On énonce la conservation de l'énergie mécanique de la façon suivante : « Dans un référentiel galiléen, si un système n'est soumis qu'à des forces conservatives, on sait que son énergie mécanique est constante ».

$$E = \text{cste}$$

• Origine :

Supposons que le potentiel auquel est soumise une masse m dépende du temps : $U(\vec{r}, t)$.

Ceci se produit par exemple si m est placée dans le champ gravitationnel ou électrique créé par des particules mobiles. On peut écrire le théorème de l'énergie cinétique (intégré) :

$$E_{c2} - E_{c1} = \Delta W = \int_1^2 \frac{\vec{\nabla}(U)}{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dU + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad \text{avec} \quad d\vec{u} = \vec{\nabla}(U) d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

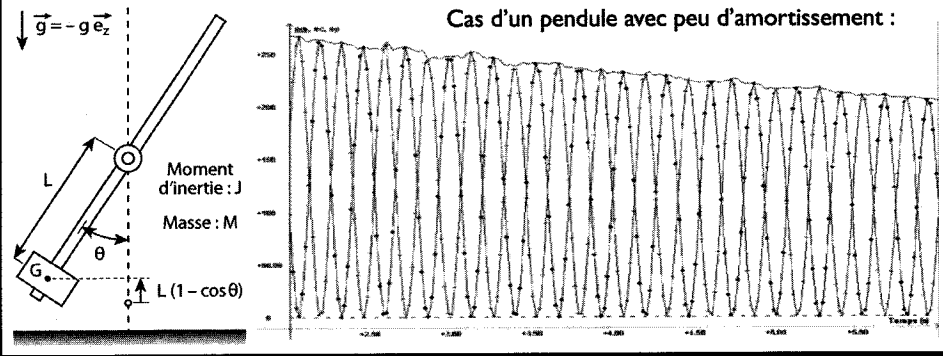
Par conséquent :
$$\Delta E = (E_{c2} + U_2) - (E_{c1} + U_1) = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Si U est indépendant du temps, on voit que l'énergie mécanique se conserve. Bien que cet exemple ne constitue pas une démonstration rigoureuse, il a le mérite d'exhiber un des résultats énoncés et démontrés par la mathématicienne allemande Emmy Noether : « la conservation de l'énergie est une conséquence de l'homogénéité temporelle de l'univers, c'est à dire de l'invariance par translation dans le temps ».

• Exemple d'application : le pendule pesant

Expérience : Il faut commencer par étalonner la mesure d'angle en faisant correspondre la tension délivrée par le capteur à l'angle du pendule. Attention : le réglage de l'offset est crucial pour l'étude énergétique qui suit. On commence par faire remarquer que la tige (prise seule) est équilibrée, puis on fixe une masse M à l'une des ses extrémités.

On lance une acquisition (sur quelques périodes). Ensuite, au moyen des bonnes fonctions (après avoir déterminé J par la période et converti la tension en angle via l'étalonnage), on trace sur un même graphique E_p , E_c et $E_m = E_c + E_p$.



Le système est soumis à :
 – son poids : $E_p = MgL(1 - \cos\theta)$ Référence : $\theta = 0$.
 – la réaction du support, qui sous hypothèse de liaison parfaite ne travaille pas.

L'énergie cinétique est : $E_c = 1/2 J \dot{\theta}^2$

Pour accéder à l'énergie mécanique, il est donc nécessaire de connaître J . On le détermine expérimentalement grâce à la période des oscillations. Quelle est son expression ?

$$E_p + E_c = MgL(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \text{cste}$$

on dérive : $MgL\dot{\theta}\sin\theta + J\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{MgL}{J}\sin\theta = 0$ (idem au PFD)

Si on se place dans l'approximation des petits angles, on obtient une équation classique d'oscillateur harmonique. La relation liant la période et le moment d'inertie J est :

$$\omega_0 = \sqrt{MgL/J}$$

On constate expérimentalement que l'énergie mécanique est conservée. Il y a inter-conversion entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Bien entendu, sur un grand nombre de périodes, on voit la diminution de l'énergie mécanique, due aux frottements (celui de l'air mais surtout celui dû à la liaison non parfaitement parfaite). La non-conservation de l'énergie mécanique permet d'ailleurs dans bien des cas de caractériser les frottements !

1.2. Conservation de la quantité de mouvement

• Enoncé :

Si la somme des forces appliquées à une particule M est nulle, le PFD appliqué dans un référentiel R galiléen donne :

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_R = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p} = \text{cste}}$$

Dans ce cas, la quantité de mouvement de M dans R est conservée au cours du temps. Cela se produit si la particule est isolée ou pseudo-isolée, c'est-à-dire si les forces qui s'exercent sur elles se compensent. Ce résultat constitue la première loi de Newton qu'on peut énoncer ainsi : « Dans un référentiel galiléen, si la résultante de toutes les forces externes agissant sur un système est nulle, la quantité de mouvement du système reste constante ».

NB : à ce stade on remarque que la conservation de la quantité de mouvement est contenue en substance dans le PFD (on a simplement intégré) : elle n'apporte donc pas d'information supplémentaire. L'intérêt est d'avoir une approche différente, souvent plus simple à mettre en œuvre, qu'on discutera dans les exemples.

Les quantités de mouvement des diverses parties en interaction d'un système isolé peuvent certainement varier, mais chaque variation de la quantité de mouvement d'un objet est accompagnée par une variation exactement opposée de la quantité de mouvement de l'objet qui interagit avec lui. Ceci constitue la troisième loi de Newton, ou loi des actions réciproques.

• Origine :

Considérons une masse placée dans un champ de forces conservatif indépendant du temps U . Supposons que U soit invariant par translation selon la direction x , alors U ne dépend que des variables d'espace y et z , et alors :

$$U(y,z) \Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Ceci implique, par application de la deuxième loi de Newton, la constance de composante p_x de la quantité de mouvement : $p_x = \text{cste}$.

On comprend aisément que si U est invariant par translation dans l'espace, alors la quantité de mouvement totale est une constante du mouvement. Là encore, cet exemple ne constitue pas une démonstration rigoureuse, mais il a le mérite d'exhiber un autre des résultats énoncés et démontrés par Noether : « la conservation de la quantité de mouvement est une conséquence de l'homogénéité spatiale de l'univers, c'est à dire de l'invariance par translation dans l'espace ».

• Exemple d'application :



Un pistolet de masse $m_P = 1 \text{ kg}$ tire une balle de masse $m_B = 10 \text{ g}$ horizontalement avec une vitesse $v_B = 350 \text{ m/s}$.

Le système {balle + pistolet} n'est soumis à aucune force horizontale externe et peut donc être considéré comme isolé dans le référentiel galiléen du laboratoire. On lui applique alors la conservation de la quantité de mouvement entre l'instant initial avant l'explosion où la balle est immobile dans le réservoir et un instant ultérieur où sa vitesse est mesurée hors du canon :

$$m_B v_{Bi} + m_P v_{Pi} = 0 = m_B v_{Bf} + m_P v_{Pf} \rightarrow v_{Pf} = -\frac{m_B}{m_P} v_{Bf} = -\frac{0,010}{1} 350 = -3,5 \text{ m/s}$$

Le fusil a ce qu'on appelle un mouvement de recul, ici de vitesse $3,5 \text{ m/s}$. Ceci correspond dans le référentiel du laboratoire à une énergie cinétique du fusil d'environ 6 J , énergie intégralement absorbée par le bras du tireur au moment de l'explosion. Dans certaines armes, un système permet de récupérer une partie de cette énergie pour éjecter la douille vide !

L'intérêt de la conservation de la quantité de mouvement dans cet exemple est manifeste : en effet, les forces exercées au moment de l'explosion sont inconnues !

La conservation de la quantité de mouvement permet de la même manière d'expliquer la force qu'on ressent quand on tient une lance à incendie, ou encore comment les fusées sont propulsées par éjection des gaz de combustion.

1.3. Conservation du moment cinétique

• Enoncé :

Si la somme des moments en O des forces appliquées en M est nulle, le théorème du moment cinétique appliqué en O, fixe dans R galiléen, donne :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_R = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_O = \text{cste}$$

Dans ce cas, le moment cinétique en O dans R est une constante du mouvement. On peut écrire la loi de conservation comme suit : « Dans un référentiel galiléen, lorsque le moment résultant des forces extérieures agissant sur un système est nul, son moment cinétique reste constant, en module et en direction ».

NB : là encore, la conservation n'apporte pas plus d'information que le TMC.

• Origine :

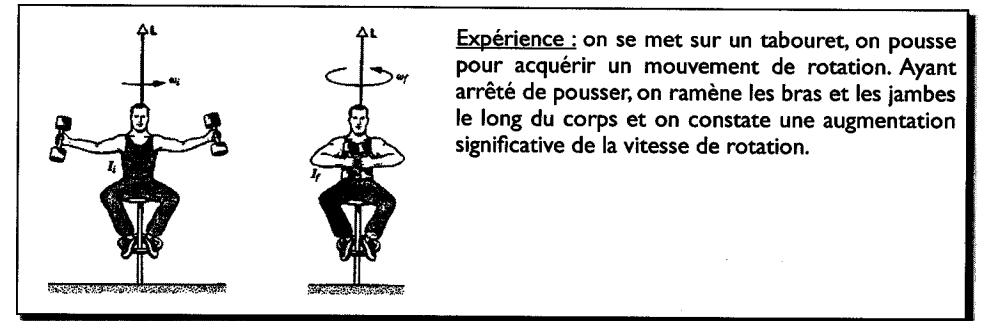
Considérons une particule soumise à un potentiel U tridimensionnel, qu'on considère dans le système de coordonnées sphériques. Si ce potentiel est invariant par rotation dans l'espace, c'est à dire s'il ne dépend que de la coordonnée radiale r, alors on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = -\vec{OM} \times \text{grad}(U) \quad \text{avec} \quad \text{grad}(U) = \left[\frac{\partial U}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right]$$

$$U(r, \theta, \varphi) \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = -r \vec{e}_r \times \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_O = \text{cste}$$

On illustre ici un autre volet du théorème de Noether : « la conservation du moment cinétique est une conséquence de l'isotropie de l'univers, c'est à dire de l'invariance par rotation dans l'espace ».

• Exemple d'application : mouvement sur tabouret



Expérience : on se met sur un tabouret, on pousse pour acquérir un mouvement de rotation. Ayant arrêté de pousser, on ramène les bras et les jambes le long du corps et on constate une augmentation significative de la vitesse de rotation.

Lorsqu'on est en rotation et ne pousse plus, on peut considérer le système {nous + assise du tabouret} comme isolé, en négligeant les frottements de l'air et de liaison du tabouret. Ce système possède au départ, dans le référentiel R galiléen du laboratoire, une vitesse de rotation ω_i qui correspond à un cas de moment d'inertie important où l'on a les bras et les jambes relativement éloignés de l'axe de rotation du tabouret.

Rappel : $I_{\Delta} = \iiint d(M, \Delta)^2 d\tau$ avec $d(M, \Delta)$ la distance du point M à l'axe de rotation.

Le moment cinétique s'écrit alors : $\vec{L}_i = I_i \vec{\omega}_i$

S'il ramène les bras le long du corps au cours du mouvement de rotation, on observe une augmentation de sa vitesse de rotation. Ceci s'explique bien en écrivant la conservation du moment cinétique pour le système isolé :

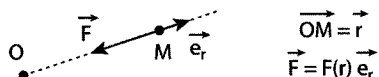
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Leftrightarrow I_i \vec{\omega}_i = I_f \vec{\omega}_f$$

En ramenant ses membres près de l'axe de rotation, l'opérateur diminue le moment d'inertie du système et la conservation du moment cinétique impose l'augmentation de la vitesse de rotation ! C'est ce qu'utilisent notamment les patineurs sur glace lors de leurs figures.

II – Mouvement à force centrale conservative

II.1. Position du problème

On va s'intéresser dans cette partie au mouvement d'un point M, de masse m, se déplaçant dans un référentiel R galiléen. Ce point a la particularité d'être soumis uniquement à une force conservative centrale. Cette force est centrée sur O fixe dans R.



Cette situation représente de nombreux cas de figure concrets :

→ Attraction gravitationnelle : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$; $E_p(r) = -\frac{K}{r}$ avec $K = G \cdot m_1 \cdot m_2 > 0$

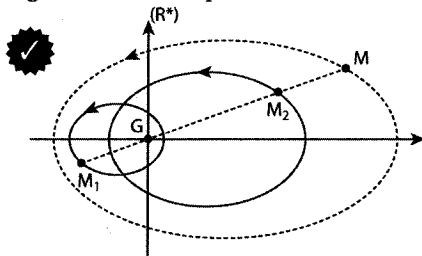
→ Interaction électrostatique : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$; $E_p(r) = -\frac{K}{r}$ avec $K = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

→ Force élastique de rappel : $\vec{F} = -k(1-l_0) \vec{e}_r$; $E_p(l) = \frac{1}{2} k(1-l_0)^2$ avec $k > 0$

Dans les deux premiers cas, la force et le potentiel sont qualifiés de Newtoniens.

• Généralité du problème :

Dans le cas très général du problème à deux corps (M1 et M2), on introduit la notion de particule fictive (M), dont on étudie le mouvement dans le référentiel barycentrique R*. Si le système des deux particules est isolé (cas considéré ici), alors le référentiel barycentrique est galiléen, et tout se passe comme si dans R* la particule fictive ne subissait qu'une force centrale, égale à celle s'exerçant entre les deux corps : on est alors est dans la configuration générale ci-dessus avec $R \rightarrow R^*$ et $O \rightarrow G$. De plus, si jamais l'une des particules est de masse très supérieure à l'autre, l'identité des problèmes est immédiate : la particule lourde est alors quasiment confondue avec le centre de gravité du système total ($m_{\text{soleil}} \approx 10^5 m_{\text{terre}}$ ou encore $m_{\text{proton}} \approx 10^3 m_{\text{electron}}$), et on est ramené à étudier le seul mouvement de la particule légère autour de la particule lourde dans le référentiel barycentrique galiléen !



$$\begin{cases} \vec{GM}_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{GM} \\ \vec{GM}_2 = +\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{GM} \end{cases}$$

II.2. Conservation du moment cinétique : loi des aires

On a vu dans la partie précédente que dans le cas où le point considéré est soumis uniquement à des forces centrales conservatives, alors son moment cinétique est une constante du mouvement :

$$\vec{\sigma}_O(M) = \text{cste}$$

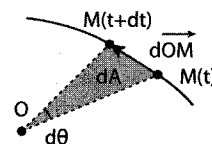
• Première conséquence. Puisqu'on a la relation $\vec{\sigma}_O = m \vec{r} \times \vec{v}$, alors il est évident que tout au long du mouvement, $\vec{r}$ et $\vec{v}$ se trouvent dans le plan orthogonal à $\vec{\sigma}_O$. La trajectoire est donc plane ! Dans le cas du mouvement de la Terre autour du Soleil par exemple, le mouvement se fait dans un plan appelé plan de l'écliptique.

• Deuxième conséquence. Si on se place en coordonnées polaires, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r \\ \vec{v} &= r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \vec{e}_r \\ \Rightarrow \vec{\sigma}_O(M) &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m C \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \boxed{C \equiv r^2 \dot{\theta}} \end{aligned}$$

avec C une constante nommée « cste des aires »

Ceci va nous permettre de démontrer la loi des aires (aussi appelée deuxième loi de Kepler).



Intéressons nous à l'aire dA balayée par le rayon-vecteur OM au cours d'un temps élémentaire dt.

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{OM}(t) \times d\vec{OM}(t)| = \frac{1}{2} |(r \vec{e}_r) \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)| dt = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} dt$$

$$\text{d'où : } \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}}$$

Ce résultat constitue la loi des aires que l'on peut énoncer ainsi : « durant des intervalles de temps égaux, le vecteur position de la particule balaye des aires égales ».

• Bilan : La conservation du moment cinétique nous a permis d'obtenir de façon quasi-immédiate des caractéristiques fondamentales du mouvement dans un champ de force centrale. Bien entendu, il est possible de trouver les mêmes résultats via le PFD, puisqu'on connaît a priori l'expression de la force : on obtient que l'accélération, à l'instar de la force, est radiale, et la nullité de l'accélération orthoradiale conduit à la loi des aires. Ceci dit, cette approche est bien moins directe et naturelle !

II.3. Conservation de l'énergie : nature du mouvement

La centralité de la force a fait émerger des caractéristiques importantes du mouvement. En outre, la force considérée ici étant conservative, l'énergie mécanique du système se conserve. On va voir comment la donnée de la seule énergie mécanique totale du système permet de déterminer la nature de la trajectoire.

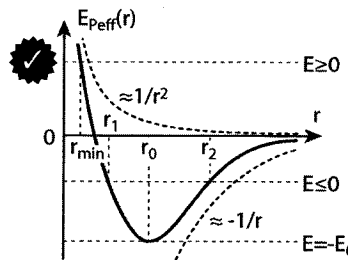
En utilisant la constante des aires, il est possible de n'exprimer l'énergie qu'en fonction de r :

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{C^2/r^2}) \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{peff}}(r) \quad \text{avec} \quad E_{\text{peff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$$

Par la suite : $E_{\text{peff}}(r) = E - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \Rightarrow E_{\text{peff}} \leq E$ Référence : énergie nulle à l'infini.

Sous cette forme, l'énergie peut être interprétée comme celle d'une particule en mouvement unidirectionnel, repérée par l'abscisse r et soumise à une force dérivant de l'énergie potentielle effective $E_{\text{peff}}(r)$. Le problème est très simple avec cette approche énergétique et en particulier ne fait pas intervenir le temps.

• Cas d'une interaction newtonienne attractive (gravitationnelle ou coulombienne) :



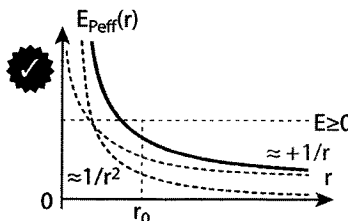
Forme du potentiel effectif : $E_{\text{peff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$ $K > 0$.

• $E \geq 0$: la partie de la courbe vérifiant la condition $E_{\text{peff}} \leq E$ comprend des points d'abscisse r aussi grande que désiré : la particule arrive de l'infini, atteint une distance minimale d'approche r_{min} et repart à l'infini : la particule se trouve dans un état « de diffusion ».

• $E \leq 0$: dans la zone accessible, r est borné par r_1 et r_2 . La particule est dans un état « lié ». On comprend d'ores et déjà la nécessité d'avoir un potentiel en forme de cuvette pour avoir un état lié...

• $E = -E_0 \rightarrow r = r_0 = \text{cste}$: la particule adopte une trajectoire circulaire.

• Cas d'une interaction newtonienne répulsive :



Forme du potentiel effectif : $E_{\text{peff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{|K|}{r}$ $K < 0$.

Dans ce cas, le potentiel ne présente pas de minimum et la particule se trouve toujours dans un état de diffusion.

II.4. Conservation du vecteur de Runge-Lenz : nature de la trajectoire

L'approche énergétique est donc extrêmement utile : la nature du mouvement est apparue avec un minimum d'effort. Néanmoins, la nature exacte des trajectoires reste un mystère. Pour la déterminer, on va utiliser une nouvelle grandeur conservée : le vecteur de Runge-Lenz.

Définition : $\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{\sigma}_0 - K \vec{e}_r$

Montrons tout d'abord que A est une constante du mouvement :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{\sigma}_0 + \vec{p} \times \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} - K \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad \xrightarrow{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{K}{mr^2} \vec{e}_r \times \vec{\sigma}_0 - K \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{or } \vec{\sigma}_0 = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{Kmr^2 \dot{\theta}}{mr^2} \vec{e}_r \times \vec{e}_z - K \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{0} \Rightarrow \boxed{A = \text{cste}}$$

Calculons ensuite le produit $\vec{A} \cdot \vec{r}$, qui va conduire à l'équation des trajectoires :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{r}{m} (\vec{p} \times \vec{\sigma}_0) \cdot \vec{e}_r - K r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \frac{\sigma_0^2}{m} - Kr$$

A étant constant, on peut choisir arbitrairement l'axe des x dans sa direction. Alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = A r \cos \theta \quad (A > 0)$$

$$A r \cos \theta = \frac{\sigma_0^2}{m} - Kr \Leftrightarrow r(\theta) = \frac{\sigma_0^2 / Km}{1 + \frac{A}{K} \cos \theta}$$

Reste à exprimer la norme de A avec des paramètres plus explicites, comme l'énergie. Pour cela on développe le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{A}$, puis en utilisant la relation $E_m = \frac{p^2}{2m} - \frac{K}{r}$:

$$A^2 = K^2 \left(1 + 2 \frac{E}{mK^2} \sigma_0^2 \right) \Rightarrow A = |K| \sqrt{1 + 2 \frac{E}{mK^2} \sigma_0^2}$$

Au final :

$$r(\theta) = \frac{\sigma_0^2 / |K| m}{\frac{|K|}{|K|} + \sqrt{1 + 2 \frac{E}{mK^2} \sigma_0^2} \cos \theta} \Leftrightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{p}{\varepsilon + e \cos \theta}}$$

On reconnaît l'équation générique des coniques avec $\varepsilon = \pm 1$, $p = \sigma_0^2 / |K| m = \text{cste}$ et enfin

$$\text{l'excentricité } e = \sqrt{1 + 2 \frac{E}{mK^2} \sigma_0^2}.$$

• Si l'interaction est répulsive ($K < 0$), alors $\varepsilon = -1$, et la trajectoire est une branche d'hyperbole.

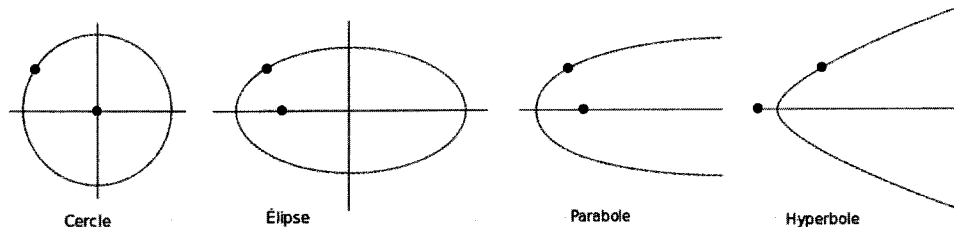
• Si l'interaction est attractive ($K > 0$), alors $\varepsilon = +1$ et plusieurs cas se présentent en fonction de la valeur de l'excentricité e :

• $e > 1 \Leftrightarrow E > 0$: trajectoire hyperbolique.

• $e = 1 \Leftrightarrow E = 0$: trajectoire parabolique.

• $1 > e > 0 \Leftrightarrow E < 0$: trajectoire elliptique.

• $e = 0 \Leftrightarrow e = -E_0 = -\frac{1}{2} \frac{m K^2}{\sigma_0^2}$: trajectoire circulaire.



En conclusion, notre étude a prouvé la puissance de l'utilisation des lois de conservation. Connaissant l'expression analytique des forces, il serait possible de mettre en œuvre une approche via le PFD, mais celle-ci est en réalité plus compliquée à mettre en œuvre. En effet, avec les lois de conservation, on aboutit assez directement aux équations paramétriques des trajectoires, sans jamais faire apparaître le temps.

→ Ici on avait l'expression des forces, mais comment faire lorsqu'on ignore la nature des interactions en jeu ? L'objectif de la partie suivante est de montrer comment les lois de conservation nous permettent de contourner le problème !



Johannes Kepler (27 décembre 1571 - 15 novembre 1630), est un astronome allemand célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique de Nicolas Copernic, affirmant que la Terre tourne autour du Soleil et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas autour du Soleil en suivant des trajectoires circulaires parfaites mais des trajectoires elliptiques.

Kepler a découvert les trois relations mathématiques, aujourd'hui dites lois de Kepler, qui régissent les mouvements des planètes sur leur orbite. Les deux premières sont publiées en 1609 dans un livre intitulé *Astronomia Nova*. La troisième survient seulement en 1618, et quantifie le rapport entre longueur du demi-grand axe et période de révolution. Ces relations sont fondamentales car elles furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour mettre au point sa théorie de la gravitation universelle.

III – Effet Compton

III.1. Position du problème

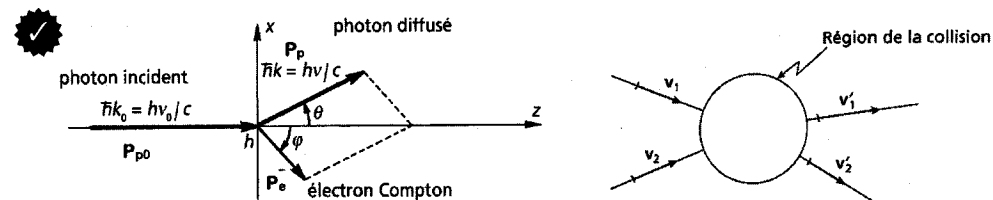
$\delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 4,8 \sin^2(\theta/2)$ en pm

Source de rayons X
Cible en graphite
Détecteur
θ = 0°
θ = 30°
θ = 90°

Expérience de Compton (1923) : Il envoie sur une cible de graphite fixe un pinceau de rayons X à peu près monochromatique, à la longueur d'onde λ_0 , et de direction bien définie (notée Oz). Il recueille sur la fente d'entrée d'un spectromètre à cristal la partie du rayonnement diffusée dans une direction particulière, faisant un angle θ avec la direction Oz incidente. La figure ci-dessus représente les spectres obtenus pour différentes valeurs de l'angle θ . Le spectre du rayonnement diffusé fait apparaître deux raies, sur lesquelles on peut faire les observations suivantes :

- Une raie à la longueur d'onde λ_0 du rayonnement incident, appelée composante Thomson, et qui correspond à une diffusion classique de l'onde incidente.
- Une raie à une longueur d'onde $\lambda > \lambda_0$, inexplicable par la théorie classique, appelée composante Compton. Les mesures réalisées par Compton conduisent à la formule ci-dessus :
 - $\delta\lambda > 0$: la raie Compton a une longueur plus grande que la composante Thomson.
 - l'écart $\delta\lambda$ est une fonction croissante de θ .
 - l'écart $\delta\lambda$ ne dépend que de θ , et pas de λ_0 ni de la nature de matériau composant le bloc.

On va tenter de répondre à ce problème en appliquant la théorie des collisions. On considère ici la collision entre un photon incident et un électron d'un atome de la cible. Cet électron est considéré fixe dans le référentiel du laboratoire, et libre : en effet, l'énergie de liaison des électrons des couches électroniques externes est très largement inférieure à l'énergie des photons incidents. Compton suppose que l'électron absorbe le photon incident de fréquence ν_0 et réémet un photon de fréquence ν .



La collision de deux particules se manifeste par une discontinuité des vitesses à la traversée d'une petite région de l'espace où les particules se trouvent simultanément et interagissent fortement. On fait l'hypothèse que l'interaction entre les particules est négligeable en

dehors de la zone de collision ; ceci se justifie très bien dans le cas de la diffusion Compton car l'interaction entre particules subatomique a une portée très réduite.

– En dehors de la zone de collision, en l'absence de toute force extérieure, l'électron d'une part et le photon d'autre part constituent chacun des systèmes isolés, dont les énergies et les quantités de mouvement individuelles se conservent.

– Au moment de la collision, quelle que soit la manière exacte dont se produit l'interaction (c'est là la force du raisonnement, cette interaction étant a priori très difficile à exprimer simplement), l'électron, le photon incident et le photon diffusé forment un système isolé auquel on peut appliquer les lois de conservation. Ces lois vont nous permettre de déterminer les caractéristiques des particules diffusées (en particulier celles du photon) en fonction de celles connues des particules à l'état initial, et donc de résoudre le problème qui nous intéresse.

III.2. Inconnues, équations et solvabilité du problème

La détermination de $\mathbf{p}_e$ et $\mathbf{p}_p$ (soit six composantes) à partir de $\mathbf{p}_{e0}$ et $\mathbf{p}_{p0}$ nécessite six équations scalaires. La conservation de la quantité de mouvement totale en fournit trois. Le système étant isolé pendant le choc, on peut appliquer la conservation de l'énergie. Cette dernière fournit une équation de plus, ce qui ne suffit toujours pas à résoudre le problème.

En fait, le problème est soluble car le détecteur enregistre ce qui se passe dans une direction donnée de l'espace. Ceci revient à fixer la direction de $\mathbf{p}_p$, c'est à dire deux paramètres angulaires scalaires. En réduisant le nombre d'inconnues de deux, on obtient le bon nombre d'équations par rapport à celui des inconnues, ce qui permet de tout calculer, dont surtout la longueur d'onde du photon ici, pour une direction donnée d'observation. La direction θ revêt donc un caractère de paramètre expérimental contrôlé.

$\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_p$	6 inconnues scalaires (4)	Conservation de l'impulsion	3 équations scalaires (2)
Direction d'observation fixée	– 2 inconnues scalaires (– 1)	Conservation de l'énergie	1 équation scalaire
4 inconnues scalaires (3)		4 équations scalaires (3)	

On peut voir les choses légèrement différemment. En effet, la conservation de l'impulsion totale impose que la somme des impulsions de l'électron et du photon dans l'état final soit égale à l'impulsion du seul photon dans l'état initial, ce qui impose la planéité de problème, et justifie au passage le schéma ci-avant. Il y a donc invariance autour de l'axe Oz et le seul paramètre fixé lors de l'observation est l'angle θ . Les inconnues sont réduites au nombre de trois (quatre composantes des vecteurs impulsion moins le paramètre angulaire θ), en même temps que les équations (la conservation de l'impulsion ne fournit plus que deux relations scalaires).

NB : Le choc est qualifié ici d'élastique : la nature et le nombre de particules restent constants au cours du processus. Dans le cas macroscopique, l'hypothèse élastique revient à considérer l'énergie interne des particules constante au cours du choc, ce qui revient à considérer la conservation de l'énergie cinétique totale du système, en opposition aux collisions dites inélastiques.

III.3. Interprétation des observations expérimentales

On fait le bilan en comptabilisant ce qui change au cours de l'interaction :

	Avant l'échange (onde incidente)	Après l'échange (onde diffusée)
Ondes	énergie $h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$	$h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ ✓
	quantité de mouvement $\left\{ \begin{array}{l} \text{module } \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h}{\lambda_0} \\ \text{direction Oz} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{module } \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \\ \text{angle } \theta \text{ avec Oz} \end{array} \right.$
Électron	énergie $m_0 c^2$	$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$
	quantité de mouvement $\left\{ \begin{array}{l} \text{nulle} \\ \text{électron immobile} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{module } p \\ \text{angle } \varphi \text{ avec Oz} \end{array} \right.$

En projetant la conservation de la quantité de mouvement sur les axes Oz et Ox (perpendiculaire à Oz), on obtient les relations :

$$\text{énergie : } h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (1)$$

$$\text{impulsion : } \left\{ \begin{array}{l} \text{projeté sur Oz : } \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos \theta + p_e \cos \varphi \quad (2) \\ \text{projeté sur Ox : } 0 = \frac{h\nu}{c} \sin \theta - p_e \sin \varphi \quad (3) \end{array} \right.$$

Nous obtenons bien trois équations avec trois inconnues (ν , p_e et φ) si on considère θ comme un paramètre fixé. Pour exprimer dans un premier temps ν en fonction des grandeurs connues (ν_0 et θ), il est nécessaire d'éliminer p_e et φ . Pour ce faire, on peut exprimer p_e à partir des équations (2) et (3) d'une part, et de l'équation (1) d'autre part :

$$(2,3) \Rightarrow p_e^2 = p_e^2 \cos^2 \varphi + p_e^2 \sin^2 \varphi = \frac{h^2}{c^2} (\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0 \nu \cos \theta)$$

$$(1) \Rightarrow p_e^2 c^2 = [h(\nu_0 - \nu) + m_0 c^2]^2 - m_0^2 c^4$$

En égalisant les deux expressions de p_e^2 , on peut simplifier considérablement les choses, et on obtient au final (en remplaçant les fréquences par des longueurs d'ondes) :

$$\boxed{\delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 2,4 \text{ pm}$$

L'écart $\delta\lambda$ ainsi calculé possède bien les propriétés expérimentales (positif, croissant avec θ et indépendant de λ_0). Le préfacteur numérique, appelé longueur d'onde de Compton, correspond parfaitement lui-aussi. L'accord numérique entre les valeurs théoriques et expérimentales confirme l'interprétation du phénomène !

***NB :** On ne s'est intéressé ici qu'au photon diffusé. Les calculs se déroulent aussi simplement pour l'électron. Un point important, découlant directement de la conservation de la quantité de mouvement, est que l'électron et le photon sont envoyés de part et d'autre de l'axe Oz. De même φ n'est jamais supérieur à $\pi/2$ et l'électron est toujours envoyé vers l'avant.*

Ce problème a permis d'illustrer un peu d'avantage la puissance et l'intérêt des lois de conservation, qui nous permis de résoudre le problème et ce malgré la méconnaissance des interactions mises en jeu lors du choc.

Conclusion

Après avoir fait émerger le caractère fondamental des lois de conservation en illustrant leur lien avec les opérations de symétrie de l'espace-temps, on a illustré sur de nombreux exemples l'intérêt pratique des lois de conservation. Elles permettent de résoudre plus simplement certains problèmes où le PFD s'avère difficile à mettre en équation, voire impossible, comme dans le cas de l'effet Compton.

Le respect des lois de conservation est donc un outil fondamental pour le physicien. On peut illustrer cette assertion en citant un exemple historique : en 1930, la communauté des physiciens est confrontée à une énigme : la désintégration β ne semble pas respecter les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement ni du moment cinétique (spin). C'est pour satisfaire à ces principes que Pauli postule l'existence d'une nouvelle particule, de charge électrique nulle, qui sera nommé « neutrino » trois ans plus tard par Fermi.