

LP04 : Lois de conservation en dynamique

Le froid conserve tout, même les cons, et les cons-servent parfois.

Enoriël, Reflets d'Acide episode 5

–Vegeta, what does the scouter say about his power level?

–It's over 9000!

DragonBall Z

Bibliographie

- | | |
|-------------------------------------|---|
| ♣Sivardière (chapitre 45) [7] | → Lois de conservation (LE livre de la leçon) |
| ♣Brasselet, mécanique PCSI–MPSI [3] | → Un bon livre de mécanique de sup |
| ♣Salamito PCSI (Sanz) [6] | → Applications : force centrale, Rutherford |
| ♣BFR Méca I [2] | → Applications : cyclotron, Rutherford |
| ♣Hecht, Physique [4] | → Introduction des notions et exemples |
| ♣Melzani–Thibierge [5] | → La référence du pendule de Newton |
| ♣Alles [1] | → Introduction à la cosmologie inhomogène |

Prérequis

- Principe fondamental de la dynamique
- Théorème du moment cinétique
- Théorème de l'énergie cinétique
- Forces centrales et force de Lorentz
- Notions de mécanique des fluides

Expériences ☕

- Choc élastique de mobiles (impulsion)
- Chaise de bureau en rotation (moment cinétique)
- Pendule pesant (énergie)
- Le pendule de Newton

Remarque : ces manips sont des suggestions, je ne les fais pas toutes.

Objectifs

- Unifier les principes de conservation en physique
- Lier les quantités conservées aux invariances et symétries
- Introduire la notion d'intégrale première du mouvement

1	Les lois de conservations usuelles	2
	1.1 Conservation de la quantité de mouvement	2
	1.2 Conservation du moment cinétique	3
	1.3 Conservation de l'énergie	5
	1.4 Les conservations en un exemple	6
2	Premier pas vers un principe de conservation unique	6
	2.1 Quantité de mouvement	7
	2.2 Énergie	7
3	Applications	7
	3.1 Charge dans un champ magnétique uniforme	7
	3.2 Le problème à force centrale	8
	3.3 Expérience de Rutherford (1909)	11
4	Annexe	13
	4.1 Remarques	13
	4.2 Quelques détails sur le pendule de Newton	13

Introduction

Les **lois de conservations** sont légions en physique et ce dans de nombreux domaines : mécanique classique, mécanique des fluides, thermodynamique, optique... et même en relativité ou en mécanique quantique. Ces lois sont des **outils d'analyse physique** puissant, souvent assez direct et d'une capacité déductive qui a fait ses preuves dans l'histoire. Le but de cette leçon est de reprendre les principes de conservations que l'on a déjà rencontré afin d'identifier un **concept fondamental** les soutendant. On cherchera également à introduire la notion d'**intégrale première du mouvement** et leur utilité pour résoudre un problème. Nous nous concentrons ici plutôt sur des problèmes de mécanique.

1 Les lois de conservations usuelles

[7] p765 et [3] p261

Commençons par reprendre trois principes de conservations rencontrés dans des leçons précédentes et les discuter plus en détails. Ces principes vont être discutés comme suit : 1) rappel des théorèmes associés et quantités conservées, 2) lien avec les expressions des potentiels et 3) vérifications expérimentales.

1.1 Conservation de la quantité de mouvement

i) Principe

– Première approche rapide :

Le **principe fondamental de la dynamique** pour un système **isolé** s'écrit :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} . \quad (1)$$

Cette relation s'intègre directement en la **conservation de la quantité de mouvement** :

$$\vec{p} = \vec{cst} . \quad (2)$$

Il s'avère donc que le PFD peut se réécrire dans le cas d'un système isolé comme la conservation de la quantité de mouvement.

Remarque :

De façon moins restrictive, il faut que les forces s'appliquant au système se compensent : on parle de système pseudo-isolé.

Remarque :

Il est également possible dans certains cas de considérer l'impulsion conservée car des forces de norme finie s'appliquent pendant un temps infinitésimal comme lors d'un choc.

– Soyons donc plus formel :

Soit un système placé dans un potentiel scalaire **invariant par translation** suivant la direction x . Supposons également conservatives les forces s'appliquant au système :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 . \quad (3)$$

La deuxième loi de Newton conduit donc à une conservation de la composante de la quantité de mouvement p_x .

Remarque :

Par exemple en répétant la même expérience de la chute libre d'un corps en plusieurs endroits on peut facilement se rendre compte de l'invariance en x et y de ce problème et en déduire la conservation de la quantité de mouvement horizontale lors du mouvement de chute d'un corps (dans la limite où l'on peut négliger les frottements de l'air évidemment).

- On peut généraliser ainsi à plus de dimensions si l'on étudie un système ayant plusieurs invariances par translations. Si le potentiel est invariant par translation suivant les trois directions d'espace alors les forces qui en découlent sont nulles : le système est isolé et la quantité de mouvement est conservée.

Remarque :

Le système étant isolé, sa trajectoire est rectiligne et uniforme (techniquement suit une géodésique) d'après le principe d'inertie. Ceci traduit l'homogénéité de l'espace et l'invariance par translation spatiale des lois de la physique.

ii) Test expérimental et exemples

- Désintégration β , modèle de Pauli et découverte théorique du neutrino ([4] p1190) : c'est dans les années 1920 que des expériences sur la désintégration β présentèrent des résultats inattendus. Les expériences semblaient violer le principe de conservation de la quantité de mouvement. Un neutron au repos se désintégrait en un proton et un électron, cependant ceux-ci ne se propageaient pas suivant des directions opposées. En 1930, Pauli conjectura qu'une particule "invisible" devait être émise lors de ce processus. C'est seulement en 1953 que le neutrino fut observé pour la première fois par Cowan et Reines. Ils précisèrent par la même occasion que la désintégration β émet un antineutrino.
- Choc élastique sur table à coussin d'air
- Exemples "de la vie de tous les jours" : quantité de mouvement de recul d'un canon, propulsion d'une fusée (notion de système ouvert et bilan macroscopique).

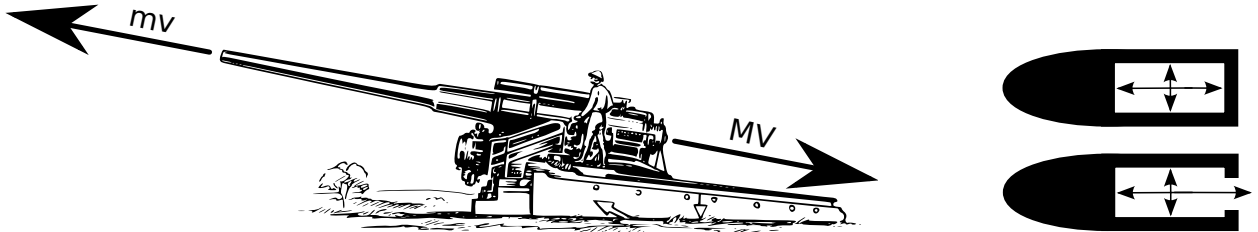


FIGURE 1: ©http://fr.wikibooks.org/wiki/Méthodes_de_propulsion_spatiale/Principes_fondamentaux_de_la_propulsion

1.2 Conservation du moment cinétique

i) Principe

- Le **théorème du moment cinétique** se déduit du principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned}
 \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} &\Rightarrow \vec{OM} \wedge \sum \vec{F} = \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) - \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p} \\
 &= \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) - (\vec{v}_M - \vec{v}_O) \wedge \vec{p} \\
 &= \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) + \vec{v}_O \wedge \vec{p} ;
 \end{aligned} \tag{4}$$

qui se réduit dans le cas où O est fixe et appliqué à un système isolé (ou pseudo-isolé) :

$$\sum \vec{OM} \wedge \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) = \vec{0} ; \tag{5}$$

qui s'intègre en la conservation du moment cinétique :

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \text{cste} . \tag{6}$$

- Considérons une particule soumise à un potentiel bidimensionnel, les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial r} ; \\ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -\frac{1}{m} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} ; \end{cases} \quad (7)$$

qui se réduit, pour un potentiel **invariant par rotation**, à la **conservation du moment cinétique** :

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} . \quad (8)$$

- Pour un système possédant un potentiel invariant par rotation autour d'un axe z , les forces conservatives associées sont nécessairement selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, et la composante du moment cinétique le long de cet axe L_z est constante. Enfin, pour un potentiel invariant par rotation autour d'un point O on peut montrer que le moment cinétique est conservé. Ceci se montre en utilisant le théorème du moment cinétique : pour un potentiel invariant par rotation quelconque les forces associées sont radiales et ne dépendent que de r .

Remarque :

Cette invariance traduit l'isotropie de l'espace qui est une conséquence directe de la symétrie sphérique. Jusqu'à Newton et Kepler, la direction verticale revêtait un rôle particulier.

ii) Test expérimental et exemples

- Exemple classique du patineur en rotation ou du plongeur (non pas la plongée sous-marine!)
- Formation d'un ouragan ([4] p293) : un gradient de température entraîne la montée d'une masse d'air créant une dépression. L'air adjacent à cette dépression va donc converger vers le coeur de la dépression. Cependant cette masse d'air étant initialement en rotation, sa vitesse orthoradiale va augmenter par conservation du moment cinétique.

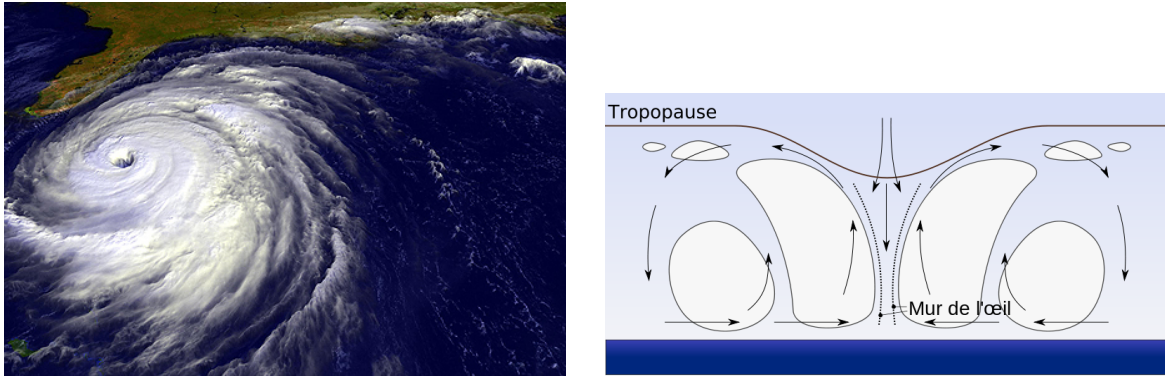


FIGURE 2: ©Public Domain, Ouragan Ivan près de Grenade

- Formation d'une étoile, d'un pulsar (étoile à neutrons en rotation rapide) : un nuage interstellaire initialement en rotation va s'effondrer sous l'effet des forces de gravité. Les dimensions du nuage vont décroître ce qui va aboutir à une augmentation de la vitesse de rotation de ce dernier par conservation du moment cinétique. Cette conservation explique la rotation observée des étoiles. Dans un stade ultérieur de sa vie, une fois l'essentiel de son combustible consommé, une étoile va s'effondrer à cause d'un défaut de production d'énergie ne pouvant plus contrebalancer les forces de gravité. Sous certaines conditions elle peut s'effondrer jusqu'à recombinaison ses protons et ses électrons en neutrons (le processus

précis nécessite de parler de pression de dégénérescence des électrons, le nombre d'électrons chutant la pression associée diminue et l'étoile s'effondre). Ces étoiles peuvent posséder une masse de 1.4 à 3.2 masse solaire, contenue dans un rayon de 10 à 20km, en rotation à quelques dizaines de Hz et possédant des champs pouvant atteindre 10^{11}T .

☕ Chaise de bureau



☹ 1min

Se mettre sur une chaise de bureau et tourner en étirant/rapprochant ses bras.

1.3 Conservation de l'énergie

i) Principe

- Commençons par construire le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \implies m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \implies \frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = P ; \quad (9)$$

avec P la puissance totale des forces appliquées au point M. Ainsi le théorème de l'énergie mécanique pour un système isolé s'écrit :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = (P_{nc} + P_c) - P_c = P_{nc} ; \quad (10)$$

Ainsi il y a **conservation de l'énergie mécanique** d'un système isolé (ou pseudo isolé ou soumis uniquement à des forces conservatives).

- Plus formellement pour des forces dérivant d'un potentiel U :

$$\begin{aligned} \Delta E_c = W &= - \int_1^2 \vec{\nabla} U \cdot d\vec{M} = - \int_1^2 dU + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt ; \\ \implies \Delta E_c + \Delta U &= \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = W_{nc} . \end{aligned} \quad (11)$$

Ainsi, si le potentiel est **indépendant du temps** (i.e. invariant par translation dans le temps) alors l'énergie mécanique se conserve.

Remarque :

Cette conservation est donc une conséquence de l'invariance par translation dans le temps.

- Tout comme pour l'invariance par translation dans l'espace, il est rassurant de supposer que la physique est invariante dans le temps. Deux expériences identiques menées à des temps différents conduisent au même résultat. On peut par exemple comparer la valeur de la constante de Planck pour des photons émis lors du découplage matière/radiation (fond diffus cosmologique émis 380 000 ans après le Big Bang) et des photons produits aujourd'hui (environ $13.8 \cdot 10^9$ ans après le Big Bang, d'après le modèle standard de la cosmologie¹) par un laser. Et en utilisant la relation $h = E\lambda/c$ on peut estimer la valeur de h connaissant l'énergie et la longueur d'onde du photon étudié.

Remarque :

En partant du principe qu'énergie et longueur d'onde d'un photon peuvent ne pas être reliés il faut mesurer ces deux quantités indépendamment : par exemple on peut mesurer la longueur d'onde par spectroscopie et l'énergie en mesurant l'énergie déposée dans un détecteur lors de l'absorption du photon (par élévation de la température par exemple).

1. Une analogie au modèle standard de la cosmologie est disponible dans [1]

ii) Test expérimental et exemple

- Effet Doppler et conservation de l'énergie : il faut considérer le photon et l'atome émetteur.
- Fronde gravitationnelle ([3] p 249).
- Pendule pesant et conversion énergie cinétique/potentielle.

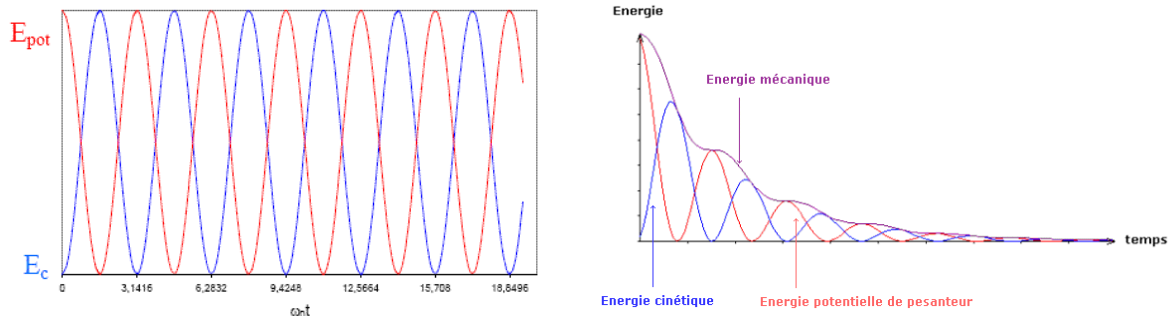


FIGURE 3: ©<http://physique-enligne.univ-lille1.fr/fce/co/chapitre5.4.html>, ©<http://freephysique.free.fr/cours%2043.html>

1.4 Les conservations en un exemple

☞ Pendule de Newton



On peut considérer le système comme pseudo-isolé juste avant et juste après le choc car le poids et la tension des fils se compensent. Comment expliquer la conservation du nombre de pendules en mouvement avant (n) ou après (p) le choc ? Appliquons donc la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

$$E_m = E_c = \frac{1}{2}nmv_i^2 = \frac{1}{2}pmv_f^2 ; \quad (12)$$

$$\vec{p} = nm\vec{v}_i = pm\vec{v}_f . \quad (13)$$

La résolution de ce système conduit simplement à $n = p$, ce qui est confirmé par l'observation.

Ces notions qui semblent de prime abord un peu décousues ne le sont pas tant que ça finalement : on vient de relier les quantités conservées usuelles que sont la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie totale d'un système à des invariances du potentiel. On peut cependant aller plus loin dans la définition d'invariants et établir une approche permettant d'éviter les impairs et de construire ce que l'on appelle les intégrales premières du mouvement.

2 Premier pas vers un principe de conservation unique

[7] p770

Piège n°1 : ne ne pas se contenter de regarder les forces que subit le système. On pourrait être tenté de chercher des quantités conservées lorsque le système est soumis à une **force invariante**. Cependant une telle force peut être associée à un **potentiel qui lui n'est pas invariant**.

- Exemple de la chute libre : le champ de pesanteur supposé uniforme $-\vec{g}$ est associé au potentiel mgz qui n'est pas invariant. L'équation du mouvement s'écrit $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$ et conduit rapidement à l'expression de la quantité de mouvement $mv = -mgt$ suivant $\vec{e}_z$.

Piège n°2 : un système dont la **dynamique ne dérive pas d'un potentiel** peut également posséder des **invariants**, se limiter à l'étude du potentiel est donc également réducteur.

Pour ces différentes raisons, il est plus pertinent (et sûr) de directement étudier les **équations du mouvement** pour en tirer des quantités conservées exploitables : les **intégrales premières du mouvement**. Cependant, utilisable ne signifie pas nécessairement qu'il est aisé de leur donner un sens physique, nous verrons ceci dans quelques exemples.

Remarque :

Un autre outil dépassant le niveau de cette leçon est la formulation lagrangienne et l'utilisation du théorème de Noether. Attention, tout système n'admet pas nécessairement un lagrangien !

Pour illustrer la recherche d'invariant prenons le cas relativement général du mouvement linéaire d'une masse sous l'effet d'une force $F(x, v, t)$. L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = F(x, v, t) . \quad (14)$$

Le but ici est de remettre en cause les raccourcis de réflexion que l'on pourrait utiliser à tort.

2.1 Quantité de mouvement

On suppose l'invariance de l'équation par translation dans l'espace. Ainsi la position x n'intervient pas dans l'équation du mouvement qui se réduit à une équation différentielle du premier ordre en v .

$$m \frac{dv}{dt} = F(v, t) . \quad (15)$$

Les mathématiques permettent de montrer qu'une telle équation admet une solution. Ce qui permet d'obtenir en toute généralité une quantité conservée.

Cependant cet invariant n'est pas nécessairement la quantité de mouvement, comme on peut le voir dans un cas linéaire. Prenons une force de frottement fluide plus une force de Lorentz associé à un champ électrique homogène non constant $F(\dot{x}, t) = -k\dot{x} + qE(t)$. Cette forme de la force conduit trivialement à :

$$mv = -kx + \int qE(t) dt + \alpha . \quad (16)$$

La quantité de mouvement n'est pas conservée dans ce cas, contrairement au coefficient d'intégration α .

2.2 Énergie

On suppose l'invariance de l'équation par translation dans le temps, ce qui se traduit par l'existence d'un invariant qui peut s'identifier à l'énergie dans le cas d'une force indépendante de v :

$$m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = F(x) \implies m \frac{v^2}{2} = \int F(x) dx . \quad (17)$$

Cependant, en toute généralité cet invariant n'est pas nécessairement l'énergie.

Maintenant que l'on a discuté le concept de conservation à la lumière des intégrales premières du mouvement, traitons quelques exemples usuels de mécanique sous un nouvel angle d'approche.

3 Applications

3.1 Charge dans un champ magnétique uniforme

[7] p777 et [2] p65

i) Mouvement cyclotron

Soit une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ $\vec{B}$ uniforme, constant et perpendiculaire à $\vec{v}_0$ la vitesse initiale de la particule. Alors l'équation du mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (18)$$

Cette équation est **invariante pas translation dans l'espace et le temps**. On obtient en projetant cette équation le long de $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y} \implies \dot{x} = \omega_c y ; \\ \ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x} \implies \dot{y} = \omega_c x + \dot{y}_0 ; \end{cases} \quad (19)$$

Ce qui conduit à l'équation $\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0$ et ainsi :

$$\begin{cases} x = \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)) ; \\ y = \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) ; \end{cases} \quad (20)$$

Après résolution standard on peut voir que le module de la vitesse est constant $\omega = -qB/m$. De plus le rayon de courbure est constant $R = mv/qB$. La particule a un mouvement circulaire.

▮ *Exploitions les intégrales premières du mouvement pour décrire la dynamique de ce problème.*

ii) Vecteur invariant de Landau

Utilisons à bon escient les concepts introduits précédemment pour traiter ce problème. Nous allons voir la puissance de raisonnement qu'offre la recherche des **intégrales premières du mouvement**. L'intégration de l'équation du mouvement conduit à :

$$m \vec{v} = q \vec{r} \wedge \vec{B} + \vec{k} ; \quad (21)$$

avec le vecteur invariant $\vec{k} = m\vec{v}_0 + q\vec{B} \wedge \vec{r}_0$ appelé **vecteur de Landau**. L'expression du vecteur de Landau conduit à :

$$m \vec{v} \wedge \vec{B} = q (\vec{r} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \vec{k} \wedge \vec{B} = -qB^2 \vec{r} + \vec{k} \wedge \vec{B} ; \quad (22)$$

l'équation du mouvement permet de reformuler le premier terme et d'obtenir :

$$\frac{m^2}{q} \frac{d\vec{v}}{dt} = -qB^2 \vec{r} + \vec{k} \wedge \vec{B} \implies \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{q^2 B^2}{m^2} \vec{r} = \frac{q}{m^2} \vec{k} \wedge \vec{B}. \quad (23)$$

Ceci correspond en toute généralité à une orbite elliptique, dans notre cas un cercle de centre C et repéré par rapport à l'origine par $\vec{OC} = (1/qB^2) \vec{k} \wedge \vec{B}$. L'invariance de $\vec{k}$ permet d'obtenir les relations suivantes par projection de (21) suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\begin{cases} v_x = \frac{qB}{m} (y - y_c) = -\omega (y - y_c) ; \\ v_y = -\frac{qB}{m} (x - x_c) = \omega (x - x_c) . \end{cases} \quad (24)$$

En ramenant le centre du cercle en O, on observe un mouvement uniforme sur un cercle centré en O tel que $\vec{k} = q\vec{B} \wedge \vec{OC}$ qui conduit à la relation $m\vec{v}_0 + q\vec{B} \wedge \vec{r}_0 = \vec{0}$. On en déduit le rayon de la trajectoire $r_0 = -\frac{mv_0}{qB}$.

3.2 Le problème à force centrale

[3] p222 et [6] p763

i) Présentation du problème

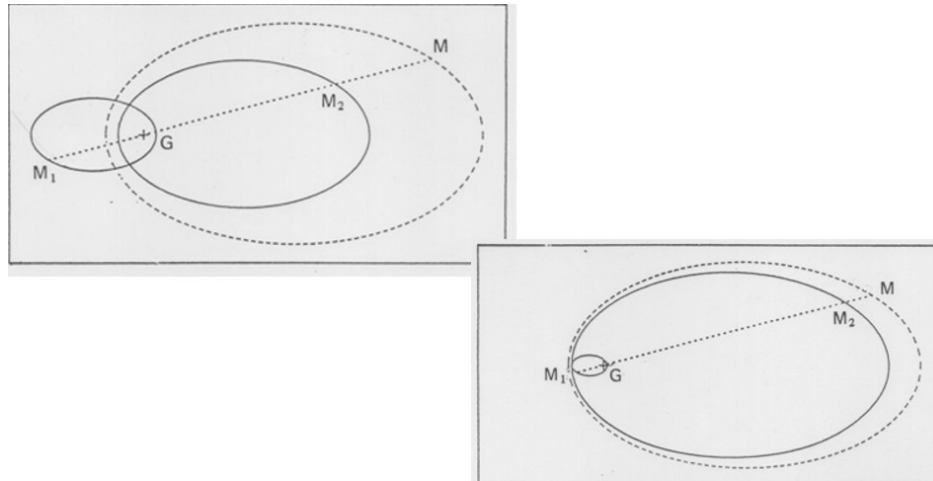


FIGURE 4: Construction des trajectoires individuelles dans le problème à deux corps
©Gie & Sarmant, banque de données agrégation

- Etudions maintenant un problème à deux corps. Tout d'abord il est pratique de se ramener à l'étude du mouvement d'un objet soumis à une force centrale (liée au barycentre de masse).

Remarque :

Théorème de Bertrand : dans le cas d'un potentiel en $1/r$ (force gravitationnelle, électrostatique...) ou harmonique (force de rappel...) on peut montrer que les trajectoires sont fermées ([7] p803).

- On définit le point O, barycentre des masses, par $\overrightarrow{AO} = m_1 \overrightarrow{AM_1} + m_2 \overrightarrow{AM_2}$ et on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_1} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{OM} ; \\ \overrightarrow{OM_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{OM} . \end{cases} \quad (25)$$

avec M la particule fictive. Ainsi cette étude peut se ramener à l'étude d'une particule fictive M de masse réduite $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ subissant une force centrale (conservative et dérivant de E_p) de centre O fixe dans le référentiel d'étude. L'équation du mouvement associée à M est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r ; \quad (26)$$

Remarque :

On peut sauter cette introduction et se contenter de travailler avec une force centrale plutôt qu'un problème à deux points matériels si manque de temps.

L'expression de la trajectoire s'obtient grâce aux formules de Binet en effectuant le changement de variable $u = 1/r$.

■ Ici intéressons nous à l'exploitation des quantités conservées pour discuter du problème.

ii) Conservation du moment cinétique

[3] p41 et p222

On travaille ici avec une **force centrale conservative**, ce qui conduit à la **conservation du moment cinétique** $\vec{\sigma}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \vec{cste}$, ce qui a pour conséquences :

- $\vec{v}$ et $\vec{r}$ sont orthogonaux : **la trajectoire est plane**
- **constante des aires** $\mathcal{C} = r^2 \dot{\theta} : dA = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}\| = \frac{1}{2} \mathcal{C} dt$

iii) Conservation de l'énergie

Seconde quantité conservée : l'énergie, elle nous permet de discriminer entre les **différentes trajectoires possibles**.

$$E = cste = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m \mathcal{C}^2}{2r^2} + E_p. \quad (27)$$

On définit le potentiel effectif par $E_p^{eff} = \frac{m \mathcal{C}^2}{2r^2} + E_p$ ceci permet de ramener le problème au mouvement d'une particule en mouvement unidimensionnel soumise à une force dérivant du potentiel effectif. Dans le cas d'une interaction attractive $E_p = -k/r$, on peut distinguer plusieurs cas :

- $E > 0$, trajectoire non bornée (i.e. système libre) : hyperbole
- $E < 0$, trajectoire bornée (i.e. système lié) : ellipse
- $E = E_{min}$, trajectoire circulaire
- $E = 0$, cas limite : parabole

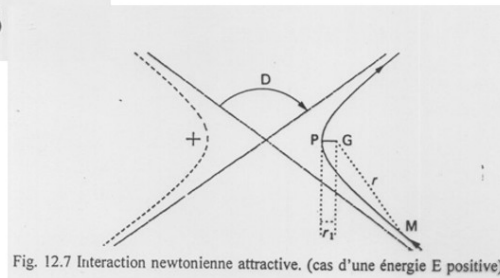
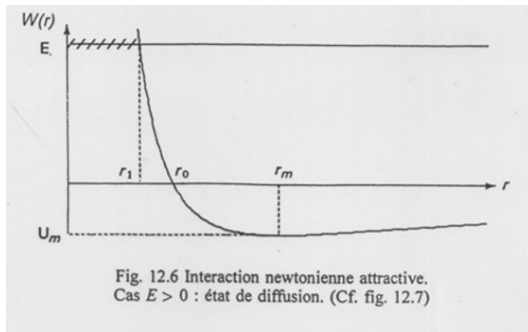


FIGURE 5: Interactions newtoniennes attractives

©Gié & Sarmant, banque de données agrégation

iv) Vecteur invariant de Laplace

[7] p805

On peut dans le cadre de cette étude introduire une nouvelle quantité conservée. Il est facile de se convaincre dans ce problème qu'il existe **deux directions privilégiées** de l'espace : l'axe portant le moment cinétique (perpendiculaire au plan du mouvement) et le grand axe de la trajectoire liée. Le petit axe est aussi une direction privilégiée mais se retrouve grâce au produit vectoriel des deux vecteurs associés aux directions précédentes. Construisons donc ce nouvel invariant dans le cas du problème à force centrale, le vecteur dit de **Hermann–Bernoulli–Laplace–Runge–Lenz** (souvent dit de Runge–Lenz ou Laplace) :

$$\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L} - k \vec{u}_r. \quad (28)$$

Son invariance se montre à partir de l'équation du mouvement,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{k}{mr^2}\vec{u}_r = -\frac{k}{L}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r ; \quad (29)$$

or $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \frac{1}{L}\frac{d\theta}{dt}\vec{L} \wedge \vec{u}_r$, ainsi le moment cinétique vectoriel l'équation précédente conduit à :

$$\vec{L} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} + k\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{0} . \quad (30)$$

Or le moment cinétique $\vec{L}$ étant constant, cette relation traduit l'invariance du vecteur de Laplace.

Remarque :

Nous avons ici postulé ce vecteur mais il est aussi possible de le construire de manière ad hoc depuis l'équation du mouvement, cela revient à montrer l'existence d'un vecteur conservé associé à l'équation du mouvement.

Calculons ensuite la produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{r}$, et voyons quel sens en tirer :

$$\begin{aligned} Ar \cos \theta &= m (\vec{v} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v})) \cdot \vec{r} - kr \\ &= m (r^2 v^2 - (\vec{r} \cdot \vec{v})^2) - kr \\ &= m\mathcal{C}^2 - kr . \end{aligned} \quad (31)$$

Ce dernier résultat permet de remonter à **l'équation polaire de l'orbite** :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} , \text{ avec } p = m\mathcal{C}^2/k \text{ et } e = A/k. \quad (32)$$

On peut également en tirer la valeur de **l'énergie mécanique du système** :

$$\begin{aligned} A^2 &= (\vec{v} \wedge \vec{L})^2 + (k\vec{u}_r)^2 - 2k\vec{u}_r \cdot (\vec{v} \wedge \vec{L}) = v^2 L^2 + k^2 - 2kvL \\ \implies \frac{1}{2}m\frac{A^2 - k^2}{L^2} &= \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{kv}{L} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = E ; \end{aligned} \quad (33)$$

Et enfin en injectant $A = ke$, $L^2 = m^2\mathcal{C}^2 = pkm$ et en utilisant $p = a(1 - e^2)$:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{e^2 k^2 - k^2}{pkm} = \frac{1}{2}k\frac{e^2 - 1}{a(1 - e^2)} = -\frac{k}{2a} . \quad (34)$$

3.3 Expérience de Rutherford (1909)

[6] p781

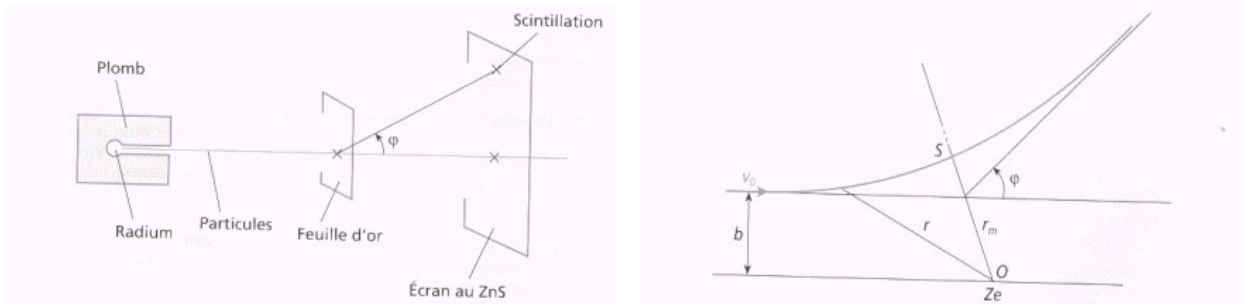


FIGURE 6: ©Bocquet, Faroux & Renault, banque de données agrégation

i) Présentation du problème

- L'expérience historique consiste à bombarder une **fine feuille d'or** ($e = 6\mu\text{m}$) avec des **particules alpha** de vitesse initiale connue ($v_0 = 2.10^7\text{m/s}$). L'essentiel de ces particules alpha passent à travers la feuille, mais contre toute attente (à l'époque) certaines des particules alpha furent déviées par la feuille. À l'époque peu de choses étaient connues sur la structure intime de la matière. Rutherford supposa que cette déviation était due à une **interaction électrostatique** entre des objets massifs de charge positive. De plus, le fait que le nombre de déviations soit faible laissa supposer que les charges réparties sur la feuille d'or étaient très localisées : c'est le noyau atomique.

$$\begin{cases} \vec{f} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r ; \\ E_p = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} . \end{cases} \quad (35)$$

- On en tire aisément, comme précédemment les lois de conservation suivantes sur le moment cinétique et l'énergie :

$$\begin{cases} C = r^2 \dot{\theta} ; \\ E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} . \end{cases} \quad (36)$$

Remarque :

La conservation de l'impulsion nécessiterait de traiter à la fois la particule alpha et le noyau cible lors de leur interaction.

ii) Constantes du mouvement

- La conservation du moment cinétique usuelle dans le cas d'un problème à force centrale s'écrit donc :

$$\vec{L}_0 = m \overrightarrow{OM_0} \wedge \vec{v}_0 = m \overrightarrow{OH} \wedge \vec{v}_0 = mbv_0 \vec{u}_z \implies C = \frac{\|\vec{L}_0\|}{m} = bv_0 . \quad (37)$$

Cette relation n'est pas nécessaire pour la suite mais elle existe.

- Considérons maintenant un **choc frontal**, i.e. une particule incidente repartant en sens inverse. Sa vitesse angulaire est négligeable devant sa vitesse radiale car elle s'approche directement de l'origine de la force. De plus son paramètre d'impact est également nul (le paramètre d'impact représente la distance minimale entre la trajectoire à l'infini de la particule alpha et la cible). Ecrivons l'expression de l'énergie de la particule alpha :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m v_0^2 . \quad (38)$$

La valeur de l'énergie mécanique est estimée pour une particule se trouvant à l'infini à l'instant initial. Quand la distance d'approche est minimale, la vitesse de la particule s'annule (elle va repartir en sens contraire). L'énergie mécanique conduit donc à la relation suivante de laquelle on peut extraire l'expression de r_{min} qui correspond à une borne supérieure du rayon nucléaire en supposant que la particule alpha ne pénètre par la cible. Cette relation permet de remonter à une estimation de la taille des noyaux :

$$\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{min}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \implies r_{min} = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2} . \quad (39)$$

$$\begin{aligned} r_{min} &\sim 3 \cdot 10^{-14} \text{ m}, \\ r_{at} &\sim 1.35 \cdot 10^{-14} \text{ m} \end{aligned}$$

Conclusion

Nous avons donc vu dans cette leçon :

- l'**origine** des principes de conservations rencontrés précédemment
- la relation entre **quantités conservées** et les **invariances et symétries** de l'espace-temps
- la notion d'**intégrale première du mouvement**, quantités pouvant être abstraites mais offrant des possibilités de raisonnements importantes
- l'utilisation de quantités conservées dans de nombreux problèmes

De plus ces notions que nous avons essentiellement traitées dans le cadre de la mécanique peuvent se retrouver dans de nombreux **autres domaines**. Il existe également d'**autres formulations de la physique** pouvant aboutir au développement de notions de conservations dans un cadre théorique cohérent pouvant être utilisés dans de nombreux domaines de la physique : la formulation lagrangienne et le théorème de Noether.

4 Annexe

4.1 Remarques

- Pour aller plus loin et pour le plaisir : un petit topo rapide sur l'approche lagrangienne [7] p782.
- Pour un peu plus de détails sur l'expérience de Rutherford [2] p174.

4.2 Quelques détails sur le pendule de Newton

Lorsque l'on démontre qu'il y a autant de billes qui repartent que de billes qui arrivent, on fait deux hypothèses (motivées par ce qu'on observe) assez fortes : les billes qui impactent la chaîne de billes restent sur place (leur vitesse tombe à 0), et les billes qui décollent de l'autre côté le font toutes ensemble avec la même vitesse. Or, les billes impactant la chaîne pourraient rebondir et repartir légèrement en arrière, et celles qui décollent pourraient le faire avec des vitesses différentes...

Deux étudiants de l'ENS ont justement étudié ce problème lors de leur projet de M1². Il se trouve que les propriétés particulières des billes métalliques et de leur interaction de contact autorisent la propagation d'un soliton. Considérons l'impact d'une seule bille. L'énergie fournie lors de l'impact se propage dans la chaîne sous la forme d'un paquet d'onde qui ne se déforme pas (le soliton), et qui, arrivé en bout de chaîne, transmet toute son énergie et impulsion à la dernière bille, qui décolle. Il n'y a ainsi aucune réflexion lors du passage du soliton d'une bille à l'autre. Ce ne serait pas le cas avec, par exemple, des balles de ping-pong : l'énergie fournie par l'impact serait transmise en partie à la seconde balle, en partie réfléchi à nouveau vers la première balle, qui rebondirait en arrière, idem entre la seconde et la troisième balle, etc... Pour plus de détails (dont une visualisation de la propagation du soliton, et un exemple de mesure des vitesses avant et après impact) voir le rapport précédent.

2. http://perso.ens-lyon.fr/mickael.melzani/documents/Newton_pendule_Melzani.pdf

Bibliographie

- [1] Alexandre Alles. *Inhomogeneous Cosmology : an answer to the Dark Matter and Dark Energy problems ?* 2014.
- [2] Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux, and Jacques Renault. *Cours de Physique, Mécanique 1*. Dunod, 1993.
- [3] Pascal Brasselet. *Mécanique PCSI-MPSI*. Presses Universitaires de France, 2000.
- [4] Eugene Hecht. *Physique*. De Boek Supérieur, 1999.
- [5] Mickaël Melzani and Étienne Thibierge. *Pendule de Newton magnétique*. 2010.
- [6] Bernard Salamito, Damien Jurine, Stéphane Cardini, and Marie-Noelle Sanz. *Physique tout-en-un, PCSI*. Dunod, 2013.
- [7] Jean Sivardière. *La symétrie en mathématiques, physique et chimie*. EDP Sciences, 1995.