LP05 – LOIS DE CONSERVATION EN DYNAMIQUE

10 mars 2016

"L'énergie cinétique se transforme en énergie des oscillations."

Justin PEMEJA & Alexandre TORZYNSKI

ALEXEI TSYGVINTSEV

Niveau : Prépa 2e année

Commentaires du jury

Bibliographie

- ♣ *J'intègre tout-en-un PCSI*, **Sanz** → chap 20
- ♣ *Physique PCSI*, **Grécias** →
- ♣ *La symétrie*, **Sivardière** → chap 45 et 47
- ♣ *Physique atomique 1*, **Cagnac** → effet Compton
- ♣ *Physique*, **Hecht** → recul d'un pistolet p141

Prérequis

- Mécanique du point : PFD, TMC, TEC
- Référentiel barycentrique ?
- Notions de méca Q (énergie, impulsion d'un photon)
- Notions de relativité (énergie, impulsion)

Expériences

- ☛ chaise tournante
- ☛ script python pour le mouvement à deux corps (mais pas cette fois)

Table des matières

1 Lois de conservation	2
1.1 Conservation de l'impulsion	2
1.2 Conservation du moment cinétique	2
1.3 Conservation de l'énergie	2
2 Origine des lois de conservation	2
2.1 Impulsion	2
2.2 Moment cinétique	2
2.3 Conservation de l'énergie	3
3 Utilisation des invariants : le problème à deux corps	3
3.1 Position du problème	3
3.2 Conservation de l'impulsion	3
3.3 Conservation du moment cinétique	3
3.4 Conservation de l'énergie	3
3.5 Un invariant adapté : le vecteur de Runge-Lenz ou Laplace	4
4 Effet Compton	4

Introduction

PFD, TMC, TEC... nous permettent de résoudre plus ou moins facilement/intuitivement différents problèmes (ex : pendule simple). Lien entre ces expressions ? Origine ? Utilisation/infos données ?

1 Lois de conservation

1.1 Conservation de l'impulsion

$$\text{PFD} : d_t \vec{p} = \sum \vec{F}$$

Système isolé ($\vec{F} = \vec{0}$) ou pseudo-isolé ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) : impulsion conservée.

NB : première loi de Newton

Exemple : recul d'un pistolet : balle de 8.0g tirée à 352.0 m/s par un pistolet de 0.90kg : vitesse de recul du pistolet de -3.1 m/s.

1.2 Conservation du moment cinétique

$$\text{TMC} : d_t \vec{L} = \sum \vec{M}(\vec{F})$$

Forces centrales ($\vec{M} = \vec{0}$) ou $\sum \vec{F} = \vec{0}$: moment cinétique conservé.

Expérience de la chaise tournante : on rapproche ses mains lestées, la vitesse de rotation augmente.

1.3 Conservation de l'énergie

$$\text{TEC} : \Delta E_c = \sum W(\vec{F})$$

Forces conservatives (dérivent d'une E_p) : $\delta W = -dE_p$ donc $E_m = E_c + E_p = c^{te}$.

Ex : pendule sans frottement : conversion énergie potentielle-énergie cinétique mais énergie mécanique constante.

↓ Les lois de conservation s'expriment sous la même forme : une variation dans le temps, nulle dans des conditions particulières. Origine ?

2 Origine des lois de conservation

Démonstration pour un point matériel soumis à des forces conservatives i.e. dérivant d'un potentiel indépendant du temps.

2.1 Impulsion

Potentiel invariant par translation dans une direction : force nulle dans cette direction, donc impulsion conservée dans cette direction.

2.2 Moment cinétique

Potentiel U invariant par rotation d'angle θ . PFD en coordonnées polaires projeté sur $\vec{e}_\theta$:

$$m [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] = m \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

Donc $r^2\dot{\theta} = c^{te}$: moment cinétique en polaire constant.

2.3 Conservation de l'énergie

Si U dépend du temps et de l'espace :

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot \vec{dr} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

TEC :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}) = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = - \int_1^2 \vec{\nabla}U \cdot \vec{dr} = - \int_1^2 dU + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = -\Delta U + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$\Delta E_c + \Delta U = \Delta E_m = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Donc E_m est conservée si U ne dépend pas du temps.

↓ Maintenant qu'on connaît les lois et leurs origines, on va voir comment s'en servir sur deux exemples : le mouvement de deux astres en interaction gravitationnelle, et l'effet Compton.

3 Utilisation des invariants : le problème à deux corps

3.1 Position du problème

Système isolé : deux astres de masses m_1 et m_2 distants de r en interaction gravitationnelle. Intérêts : astronomie, généralisation à une interaction conservative centrale quelconque.

Pour simplifier, on se place tout de suite dans le référentiel barycentrique, avec $\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}$, $\vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}$, et $\vec{r} = \vec{M}_1 M_2$.

Que nous apporte chaque loi de conservation ?

3.2 Conservation de l'impulsion

Pas grand chose, à part la troisième loi de Newton.

3.3 Conservation du moment cinétique

Force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ centrale donc colinéaire à $\vec{e}_r$, donc moment de la force nul, donc moment cinétique conservé.

En particulier, la direction de $\vec{L}$ est conservée : les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ donc le mouvement restent dans le même plan.

On a vu tout à l'heure que $r^2 \dot{\theta} = C$, d'où la loi des aires ou 2e loi de Kepler : l'aire balayée par le vecteur $\vec{r}$ pendant dt est

$$dA = \frac{1}{2} \times r(t) \times r(t+dt) \times \sin(d\theta) = \frac{1}{2} \times r^2 \times d\theta = \frac{1}{2} C dt$$

au premier ordre, donc la vitesse aréolaire $V = dA/dt$ est constante.

Là je dessine rien dans le poly par manque de temps, mais n'oubliez pas les jolis schémas en couleur au tableau.

3.4 Conservation de l'énergie

Dans le référentiel barycentrique :

$$E_m = E_c + E_p \quad (1)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (2)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (3)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff} \quad (4)$$

Puits de potentiel : mouvement impossible, état lié, état de diffusion.

Là je mettrais bien des jolies simulations en python pour différentes valeurs de l'énergie mécanique, mais vraiment j'ai pas eu le temps de coder le script.

3.5 Un invariant adapté : le vecteur de Runge-Lenz ou Laplace

Mouvement lié : on définit le vecteur de Hermann-Bernouilli-Laplace-Runge-Lenz par

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} - Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r} = \vec{v} \times \vec{L} - \alpha \vec{e}_r$$

On vérifie grâce au PFD que c'est bien une constante du mouvement. Intérêt :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos(\theta) = \dots = mC^2 - \alpha r$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

où $p = mC^2/\alpha$ et $e = A/\alpha$: équation d'une conique. Si mouvement d'un astre léger autour d'un lourd : première loi de Kepler.

Vitesse aréolaire $V = C/2$: on en déduit $CT/2 = \pi ab$ en intégrant sur une période T , puis la 3e loi de Kepler.

4 Effet Compton

Collision d'un photon incident de fréquence ν_0 et d'un électron immobile : l'électron est mis en mouvement dans la direction d'angle φ et un photon de fréquence ν est émis dans la direction d'angle θ .

	avant la collision	après la collision
photon	énergie $h\nu_0$, impulsion $h\nu_0/c$	énergie $h\nu$, impulsion $h\nu/c$
électron	énergie m_0c^2 , impulsion 0	énergie $\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$, impulsion p

On a 4 inconnues (ν , θ , p et φ) et 3 équations (conservation de l'énergie, conservation de l'impulsion dans deux directions). On exprimera donc p , ν et φ en fonction de θ qui devient un paramètre d'observation.

Conclusion

On a vu les lois de conservation associées à l'impulsion, le moment cinétique et l'énergie. Dans notre cas, ces lois sont vérifiées sous certaines conditions sur le système.

On a pu appliquer ces lois pour expliquer le mouvement des planètes et démontrer les lois de Kepler, ainsi que l'effet Compton. En physique, l'autre intérêt des lois est la prédiction : par exemple, la violation apparente de la conservation de l'impulsion dans des expériences de désintégration a permis de postuler l'existence du neutrino.

Enfin, le lien entre invariances et symétries est plus général que la courte démo donnée ici, et se fait avec le théorème de Noether pour les systèmes admettant un lagrangien.

Questions et remarques