LP06 – Cinématique relativiste

4 février 2016

Pierre Soulard & Lucile Favreau

"Vers l'infini et au-delà !"
Buzz l'Éclair

Commentaires du jury

2015 : Le jury rappelle qu'il n'est pas forcément nécessaire de mettre en oeuvre des vitesses relativistes pour être capable de détecter et de mesurer des effets relativistes.
2014 : Cette leçon exige une grande rigueur dans l'exposé tant sur les notions fondamentales de relativité restreinte que sur les référentiels en jeu. Elle invite les candidats à faire preuve d'une grande pédagogie pour présenter des notions a priori non intuitives et faire ressortir les limites de l'approche classique. Un exposé clair des notions d'invariant relativiste est attendu.

Bibliographie

✍ *Mécanique 1*, **BFR**
✍ *Relativité restreinte*, **Semay**
✍ *Relativité et quantification*, **Perez**
✍ *Introduction à la relativité restreinte*, **Hladik**

Prérequis

➢ Optique

➢ Mécanique Newtonienne

➢ Electromagnétisme

Table des matières

Introduction

✍ Perez p.15 et Hladik p.5

A la fin du XIX^{ème} siècle, la plupart des physiciens étaient persuadés que l'ensemble des phénomènes physiques pouvaient être interprêtés par la mécanique de Newton ou l'électromagnétisme de Maxwell. Il restait cependant deux problèmes :

- La catastrophe ultraviolette qui sera résolue par l'introduction de la mécanique quantique,
- La propagation de la lumière

En effet, nous verrons que la vitesse de la lumière dans le vide contredit la loi de composition des vitesses classique. Ainsi, nous serons mener à montrer les insuffisances de la mécanique classique dans une première partie, nous poserons ensuite les hypothèses qui nous ont mené à l'introduction de la mécanique relativiste.

1 La cinématique classique et ses limites

On va partir des notions de mécanique classique que l'on a déjà vues pour introduire les notions utiles à cette leçon, puis nous verrons les limites de cette vision classique.

1.1 Relativité classique : transformation de Galilée

✍ Semay p.2 et BFR p.13

Lorsqu'on étudie des mouvements, toute mesure doit être faite par rapport à un référentiel. Il s'agit d'un système d'axes de coordonnées liés à un observateur auquel on ajoute une horloge pour mesurer le temps. On postule l'existence de référentiels privilégiés qu'on appelle référentiels galiléens dans lesquels tout corps conservera son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, en l'absence de forces extérieures agissant sur lui (c'est la 1ère loi de Newton). Notons qu'un référentiel en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Nous travaillerons ici uniquement avec des référentiels galiléens en TRU les uns par rapport aux autres. On considère deux référentiels galiléens *(R)* et *(R')*. On définit un évènement comme l'ensemble des quatre grandeurs scalaires (x, y, z, t) qui donnent la position d'un point à un instant t. En mécanique classique, on suppose l'espace homogène, on aura donc invariance par translation dans l'espace. L'espace est également isotrope, d'où l'invariance par rotation. De plus, on suppose qu'il existe une horloge universelle de temps. Quelque soit le référentiel, le temps s'écoule de manière identique en tout point et pour tous les référentiels. On parle de temps absolu, et ceci implique une invariance par translation temporelle. On introduit alors la transformation qui permet de décrire un évènement après changement de référentiel galiléen : la transformation de Galilée.

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{1}$$

où $\vec{v_e}$ est la vitesse de (R') par rapport à (R).

Si on dérive ce système d'équations par rapport au temps, on obtient la loi de composition des vitesses habituelle :

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_e} \tag{2}$$

En dérivant une seconde fois, on obtient que les accélérations sont égales dans les deux référentiels, et donc d'après le PFD, il y a égalité des forces.

Ceci soutient le postulat de la relativité galiléenne énoncé par Poincaré au XX^{ème} siècle : "'Toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen."'

La mécanique classique et la transformation de Galilée forment donc un tout cohérent et satisfaisant au principe de relativité.

1.2 Insuffisances de la transformation, incompatibilité avec l'électromagnétisme

✍ BFR p.215

Le problème qui se pose est l'incompatibilité des lois de l'électromagnétisme, et plus particulièrement avec des équations de Maxwell, avec la relativité classique. Pour les équations de Maxwell, nous n'avons jamais fixé de référentiel d'étude. On a une propagation des ondes dans le vide à la vitesse :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{3}$$

c est une constante fondamentale, alors dans quel référentiel cette vitesse est-elle définie ? On a deux hypothèses contradictoires :

- Les équations de Maxwell ne sont valables que dans un référentiel privilégié qui a un caractère absolu et qui se distingue dans la vitesse de propagation des phénomènes électromagnétiques vaut c. La transformation de Galilée reste ainsi valable, mais cette hypothèse mène à l'abandon du principe de relativité.
- Les équations de Maxwell sont valables dans tous les référentiels, donc c est indépendante du référentiel donc le cadre spatio-temporel de la physique ne peut pas être la mécanique classique, cette hypothèse mène donc à l'abandon des transformations de Galilée. Le principe de relativité resterait alors valable.

On croira d'abord à la première hypothèse, c'est-à-dire que l'on garde une vision de mécanique classique. Cependant, dès 1851, Fizeau réalise une expérience qui contredit cette hypothèse.

1.3 Expérience de Fizeau (1851)

On garde donc le principe de relativité. En 1905, Einstein élabore la théorie de la relativité restreinte.
✍ Perez p.42

Fizeau a mesuré la vitesse de la lumière dans un fluide d'indice n animé par une vitesse $\vec{u}$ par rapport au référentiel du laboratoire. On a ici $u \ll c$. On a un système optique interférentiel de type fentes d'Young.

Si l'eau est au repos : On obtient pour deux fentes très fines distantes de a, on obtient sur l'écran un réseau de franges d'interférences distantes de $\frac{\lambda f}{a}$ où f est la distance focale de la lentille de projection, car on a une différence de marche qui vaut $\frac{xa}{f}$.

Si on a un courant d'eau : On a un décalage du système de franges.

Prévision Newtonienne : on a $v_2 = \frac{c}{n} + u$ et $v_1 = \frac{c}{n} - u$ donc

$$\Delta L_N = c\left(\frac{l}{\frac{c}{n} - u} + \frac{l}{\frac{c}{n} + u}\right) = \frac{2lcu}{\frac{c^2}{n^2} - u^2} \approx \frac{2lun^2}{c} \tag{4}$$

soit un décalage $\Delta p_N = \frac{\Delta l_n}{\lambda} = \frac{2lun^2}{c\lambda}$.

Ordres de grandeur :

- u=7m/s
- c=3.10^{8}m/s
- l=1,5m
- λ=530nm
- n=1,33

Soit un décalage de $\Delta p_N = 0,23$ franges. Expérimentalement, Fizeau trouve une valeur proche de 0,1 franges. On voit donc qu'il y a une incohérence de la transformation de Galilée, et de la formulation classique de la mécanique. A partir de cette expérience et de l'expérience de Michelson et Morley, on rejette donc la première hypothèse, on considère désormais que le principe de relativité est exact mais qu'il faut introduire une nouvelle transformation pour remplacer la formulation classique. C'est pourquoi nous introduisons maintenant les bases de la relativité restreinte.

2 Bases de la relativité restreinte

2.1 Les postulats

✍ Semay p.15 et BFR p.219

La relativité restreinte est basée sur 2 postulats simples :

1er postulat : "'Tous les référentiels galiléens sont équivalents."' Autrement dit, toutes les formulations mathématiques des lois de la physique doivent être les mêmes quelque soit le référentiel.

2ème postulat : "'Le module de la vitesse de la lumière dans le vide est indépendant de l'état de mouvement de la source"'. On a donc invariance de c, qui vaut $c = 299792458m/s$. On voit ici que la loi de composition des vitesses classique n'est plus valable, et qu'il va donc falloir trouver une nouvelle transformation pour passer d'un référentiel galiléen à un autre.

2.2 Transformations de Lorentz

✍ Perez p.20 et BFR p.221

On appelle transformation spéciale de Lorentz, la transformation qui satisfait l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide par rapport à deux référentiels (R) et (R').

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - x\frac{v_e}{c^2}) \\ x' = \gamma(x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{5}$$

où $\vec{v_e}$ est la vitesse de translation de (R') par rapport à (R) selon x, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est le facteur relativiste entre les deux référentiels, et $\beta = \frac{v_e}{c}$. On peut réecrire ce système d'équation sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{6}$$

On parle de transformation spéciale car les axes x et x' coïncident avec la direction de $\vec{v_e}$.

Cas des faibles vitesses : Si on prend la limite où $\beta = \frac{v_e}{c} \ll 1$ donc $\gamma \approx 1$, on trouve :

$$\begin{cases} t' = t - x\frac{v_e}{c^2} \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{7}$$

Ordre de grandeur de $x\frac{v_e}{c^2}$:

- $x \approx 6,4.10^6 m$ rayon de la Terre
- $v_e \approx 10^2 m/s$ vitesse d'un avion
- $c \approx 3.10^8 m/s$ vitesse de la lumière dans le vide

d'où $x\frac{v_e}{c^2} \approx 2.10^{-8}s$ très souvent négligeable, on retrouve alors la transformation de Galilée.

A partir de la nouvelle transformation, on peut établir la nouvelle loi de composition des vitesses.

2.3 Loi de composition des vitesses

On différencie le système d'équations :

$$\begin{cases} dt' = \gamma(dt - dx\frac{v_e}{c^2}) \\ dx' = \gamma(dx - v_e dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \tag{8}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v_e}{1 - \frac{v_e}{c^2}\frac{dx}{dt}} \\ \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_e}{c^2}\frac{dx}{dt}} \end{cases} \tag{9}$$

On définit $v_{//}$ la composante de la vitesse selon la direction de $\vec{v_e}$ et $\vec{v_\perp}$ le vecteur vitesse orthogonal à la direction de $\vec{v_e}$. d'où la loi de composition des vitesses :

$$v'_{//} = \frac{v_{//} - v_e}{1 - \frac{v_e v_{//}}{c^2}} \qquad et \qquad \vec{v'_\perp} = \vec{v_\perp} \frac{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_e v_{//}}{c^2}} \tag{10}$$

On montre qu'on retrouve la loi de composition des vitesses classique lorsque $v_e \ll c$.

Cette nouvelle loi de composition des vitesses a permis d'expliquer les résultats de l'expérience de Fizeau réalisée en 1851.

2.4 Retour sur l'expérience de Fizeau

✍ Perez p.42

Si on reprend l'expérience de Fizeau, on peut maintenant voir ce que prédit la mécanique relativiste.

On a maintenant : $v_2 = \frac{\frac{c}{n}+u}{1+\frac{u}{nc}}$ et $v_1 = \frac{\frac{c}{n}-u}{1-\frac{u}{nc}}$ donc

$$\Delta L_R = c\left(\frac{l(1-\frac{u}{nc}}{\frac{c}{n}-u} + \frac{l(1+\frac{u}{nc}}{\frac{c}{n}+u}\right) = \frac{2lu}{c}(n^2-1) \tag{11}$$

soit un décalage $\Delta p_R = \frac{2lu(n^2-1)}{c\lambda}$.

Ordres de grandeur :

- u=7m/s
- c=3.10^{8}m/s
- l=1,5m
- λ=530nm
- n=1,33

D'où un déplacement de $\Delta p_R = 0.086$ franges, ce qui est en excellent accord avec l'expérience.

Maintenant que l'on a vu les bases de la cinématique relativiste, on va en voir les principales conséquences.

3 Conséquences de la relativité restreinte

3.1 Perte de simultanéité

✍ BFR p.236

On a deux référentiels (R) et (R') dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. On considère deux évènements (1) et (2) dans (R) et (R') galiléens. On suppose que les deux évènements ont lieu au même instant t' de (R'), soit $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$, dans les lieux différents, par exemple, $\Delta x' = x'_2 - x'_1 \neq 0$.

On a alors : $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \Delta x' \frac{v_e}{c^2}) = \gamma \frac{v_e}{c^2} \Delta x' \neq 0$. Ainsi, les deux évènements qui étaient simultanés dans (R') ne le sont plus dans (R). C'est un phénomène nouveau, et contre-intuitif qu'on appelle perte de simultanéïté.

On a donc perdu la notion de temps absolu existant en mécanique classique.

3.2 Dilatation du temps

✍ BFR p.236

Soit une horloge de (R'), c'est à dire un système fixe dans (R') qui donne des signaux réguliers séparés par des laps de temps égaux $\Delta t'_0$. $\Delta t'_0$ est la période propre de l'horloge (mesurée dans le référentiel dans lequel elle est au repos). On peut déterminer le laps de temps Δt séparant deux signaux consécutifs dans le référentiel (R) par rapport auquel l'horloge est en mouvement. D'après la transformation de Lorentz, $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \Delta x' \frac{v_e}{c^2})$ avec $\Delta x' = 0$. Ainsi,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} > \Delta t'_0 \tag{12}$$

Ainsi, la période dans (R) parait plus grande que la période propre. On parle de dilatation du temps. On peut ici apporter une confirmation expérimentale par l'étude de la désintégration des muons dans la haute atmosphère. Les muons sont des particules de charge $\pm e$ et de masse $207m_e$ qui prennent naissance dans la haute atmosphère du fait du rayonnement cosmique. Ils ont une durée de vie limitée et se désintègrent :

$$\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu} \tag{13}$$

On peut observer cette désintégration au laboratoire avec des muons initialement au repos. La loi de désintégration est donnée par :

$$N(t) = N_0 exp(-\frac{t}{\tau'_0}) \quad où \quad \tau'_0 = 2,2.10^{-6}s \quad \text{période propre de désintégration des muons} \tag{14}$$

Pour des muons en mouvement, on peut compter le nombre de muons N_1 traversant un premier compteur, puis le nombre N_2 qui traversent un second compteur à une altitude différente. Il y a une différence d'altitude h entre les deux compteurs. Dans l'expérience de Frisch et Smith, en 1963, ils avaient sélectionné des muons de vitesse v telle que : 0,9950c <v <0,9954c. Avec h=1907m, ils trouvent :

- N_1=563 muons/heure
- N_2=408 muons/heure

Dans cette expérience, la durée du trajet est $\Delta t = \frac{h}{v} = 6,4.10^{-6}s$ pour $v = 0.9952c$. L'application de la loi de désintégration donne :

$$N(\Delta t) = N_1 exp(-\frac{\Delta t}{\tau'_0}) = 31\text{muons/heure} \neq N_2 \tag{15}$$

Par contre, si on fait intervenir la dilatation du temps, Δt est un temps impropre car il est évalué dans le référentiel par rapport auquel les particules sont en mouvement, on a donc :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad où \quad \Delta t'_0\text{durée propre dans le référentiel des muons} \tag{16}$$

Ainsi, $\Delta t'_0 = 9,8.10^{-2}\Delta t$. D'où $N(\Delta t'_0) = 423$ muons/heure, qui est beaucoup plus proche de N_2, la différence se joue sur l'incertitude portant sur v. On a donc ici une vérification expérimentale directe de la dilatation du temps.

Quid des variables spatiales ?

3.3 Contraction des longueurs

✍ BFR p.245

On définit de manière analogue à la période propre, la longueur propre d'un objet comme la longueur de cet objet dans le référentiel dans lequel il est au repos. On considère deux référentiels (R) et (R') dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. Soit une règle de longueur propre L'_0 fixe dans (R'). Elle est disposée selon l'axe x' donc $\Delta x' = L'_0$. Pour connaître la longueur $L = \Delta x$ de cette règle dans le référentiel (R), on utilise la transformation de Lorentz :

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v_e \Delta t) \quad avec \quad \Delta t = 0 \tag{17}$$

d'où $L = \frac{L'_0}{\gamma}$ <L'_0. On dit qu'il y a contraction des longueurs dans le sens du mouvement. En effet, $\Delta y = \Delta y'$ et $\Delta z = \Delta z'$, donc la longueur d'une régle placée perpendiculairement à la direction du mouvement est la même dans les deux référentiels. La règle apparaît plus courte dans le référentiel (R) par rapport auquel elle est en mouvement.

La dilatation des durées et la contraction des longueurs sont des notions extrêmement liées et traduisent ce que l'on appelle l'invariance de l'intervalle.

3.4 Invariance de l'intervalle

✍ BFR p.224

Si on prend deux évènement (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) repérés dans (R), on appelle carré de l'intervalle :

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \tag{18}$$

Le carré de l'intervalle est invariant par changement de référentiel galiléen. Si on repère les deux évènements dans (R'), on aura $\Delta s'^2 = \Delta s^2$. C'est un invariant relativiste.

Analogie avec la mécanique classique : On avait $\Delta t' = \Delta t$, temps absolu et $(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)^{1/2} = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$, invariance des longueurs.

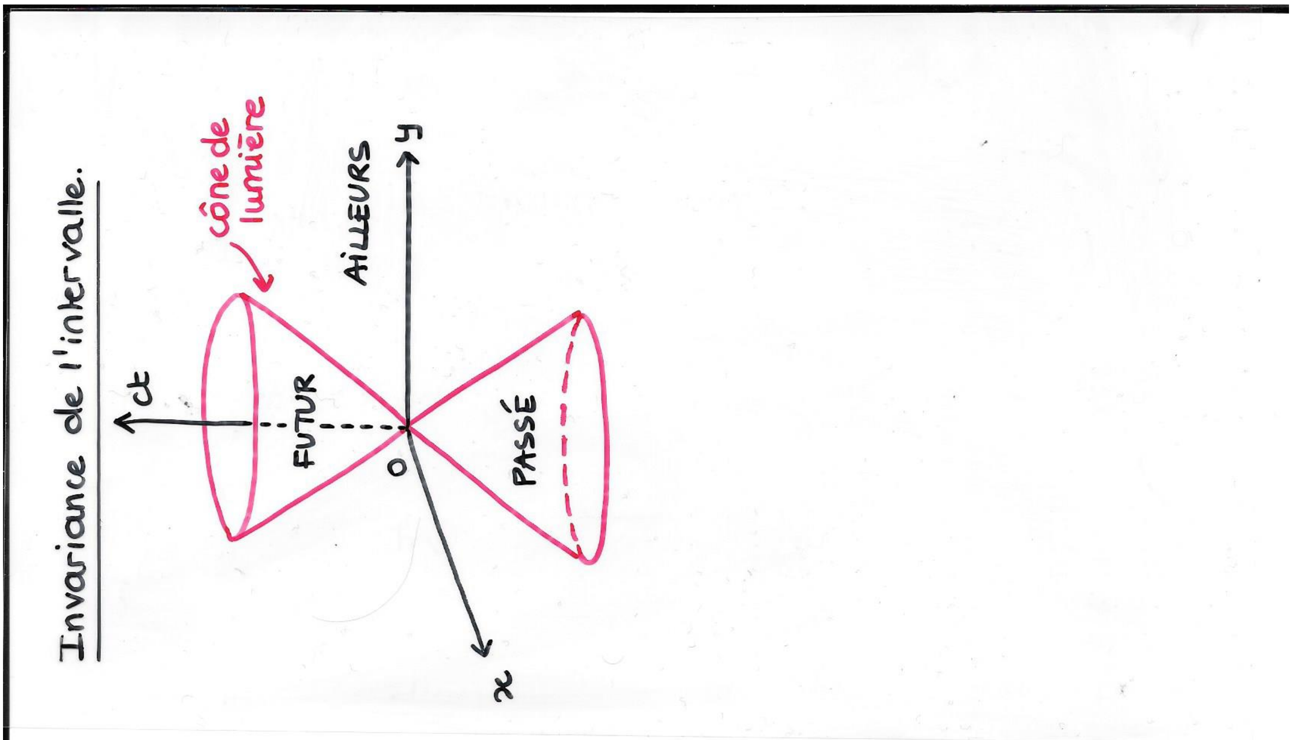
Pour un évènement $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t)$ par rapport à l'origine $(0,0,0,0)$, il y a trois catégories possibles :

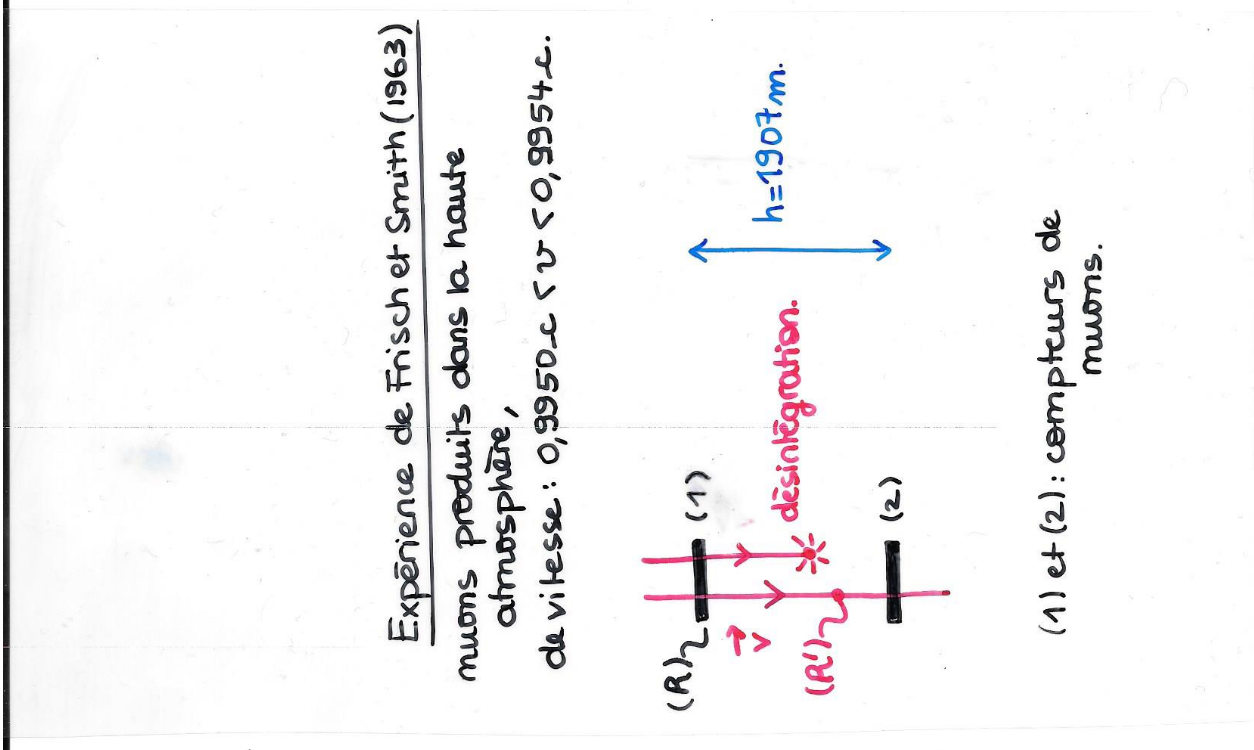
- Δs^2 <0 : Ailleurs (évènements de genre espace, pas de relation de cause à effet possible),
- Δs^2 >0 et Δt <0 : Passé,
- Δs^2 >0 et Δt >0 : Futur (évènements de genre temps).

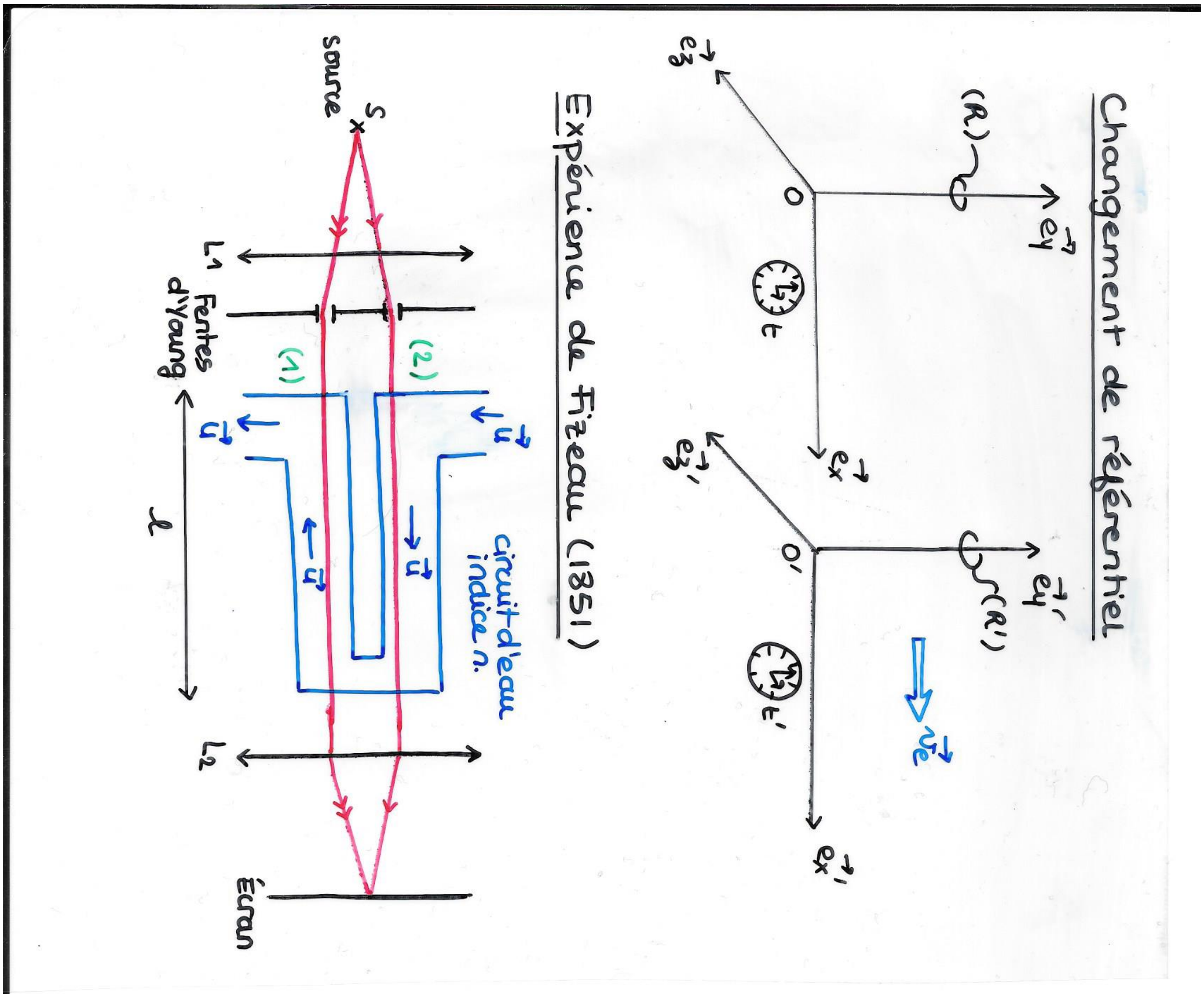
Ces zones sont séparés par le cône de lumière, c'est à dire les évènements tels que $\Delta s^2 = 0$.

Conclusion

La relativité restreinte émerge à partir de problèmes de la physique non explicables par l'électromagnétisme de Maxwell et la mécanique Newtonienne. On a pu noter la perte du caractère absolu du temps, ce qui nous a mené à des phénomènes contre-intuitifs et totalement nouveaux, qui ont pu être vérifiés expérimentalement. On n'a vu ici que l'aspect cinématique, mais on pourra se pencher sur la dynamique relativiste. En effet, il sera necessaire d'établir de nouvelles équations dynamiques équivalentes par exemple au principe fondamental de la dynamique en mécanique classique. Nous verrons aussi que ceci passera par l'usage d'un nouveau formalisme qui utilise des quadrivecteurs.


Invariance de l'intervalle.
ct
cône de lumière
FUTUR
PASSÉ
AILLEURS
O
x
y


Expérience de Frisch et Smith (1963)
muons produits dans la haute atmosphère,
de vitesse : 0,9950 c < v < 0,9954 c.
h = 1907 m.
(R)
(R')
v
(1)
(2)
désintégration.
(1) et (2) : compteurs de muons.



Changement de référentiel
(R)
(R')
O
O'
t
t'
Expérience de Fizeau (1851)
S
source
L1
Fentes d'Young
(1)
(2)
circuit d'eau
indice n.
L2
Écran