LP06 – Cinématique relativiste

30 janvier 2017

Eric Brilllaux & Benjamin Crinquand

Le principe de relativité exige que tous ces mollusques puissent être employés comme corps de référence pour la formulation des lois générales de la nature.
Albert Einstein

Niveau : L2

Commentaires du jury

- **2016** : Les notions d'événement et d'invariant sont essentiels dans cette leçon.
- **2015** : Les effets relativistes peuvent se manifester même des vitesses petites devant c.
- **2014** : La rigueur est dem mise dans la définition des notions (celle de référentiel par exemple).
- **2013** : Il est important de noter que la réciprocité des phénomènes de dilatation des durées et de contraction des longueurs.
- **2012** : La dilatation des durées et la contraction des longueurs sont à discuter au cours de la leçon.
- **2011** : La composition des vitesses est à discuter.

Bibliographie

- ✍ *Mécanique I*, **Bertin Farout Renaud** ⟶ Les explications sont concises, claires et le cheminement adopté est adequat pour une leçon ;
- ✍ *Introduction à la relativité*, **Langlois** ⟶ Une référence ou la physique avec les mains laisse un peu plus de place aux calculs que la précédente, mais certains passage sont intéressants ;
- ✍ *Relativité restreinte, de l'astrophysique aux particules*, **Eric Gourgoulhon** ⟶ Il y manque un peu de formalisme mathématique, mais bon...

Prérequis

➢ Lois de Newton

➢ Équations de Maxwell (prononcer "ékations")

➢ Effet Doppler classique

Expériences

Table des matières

Introduction

Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, la mécanique Newtonienne était au coeur de la physique. Le principe de relativité galiléenne impliquait en particulier que la

1 Les fondements de la relativité restreinte

1.1 Limite de la physique classique

✍ Langlois, 1.1 ✍ Gourgoulhon, 5.2

La théorie de la mécanique newtonienne, fondée dans la seconde partie du $XVII^e$ siècle, a été confirmée à de maintes reprises. Elle se base sur l'existence d'un temps t absolu, indépendant de tout référentiel d'observation, et les lois de changement de référentiels inertiels sont basées sur les transformations de Galilée.

Toutefois, une autre théorie vit le jour au milieu du XIX^e siècle, à savoir la théorie élecromagnétique de Maxwell. Les équations de Maxwell font apparaître une constante fondamentale c, qui correspond à la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. Or aucun référentiel n'est naturellement specifié pour écrire les lois de Maxwell, alors que la cinématique galiléenne affirme que la vitesse de propagation de la lumière dépend du référentiel d'étude. Les physiciens ont donc supposé l'existence d'un milieu, appelé éther, dans lequel la lumière se propagerait. Cependant, les expériences ayant pour but de mettre en évidence l'éther ont été confonté à de serieux problèmes, et la célérité de la lumière semblaient être invariante par changement de référentiel galiléen. C'est ce qu'illustre l'expérience de Fizeau, réalisée en 1851 et décrite ci-après.

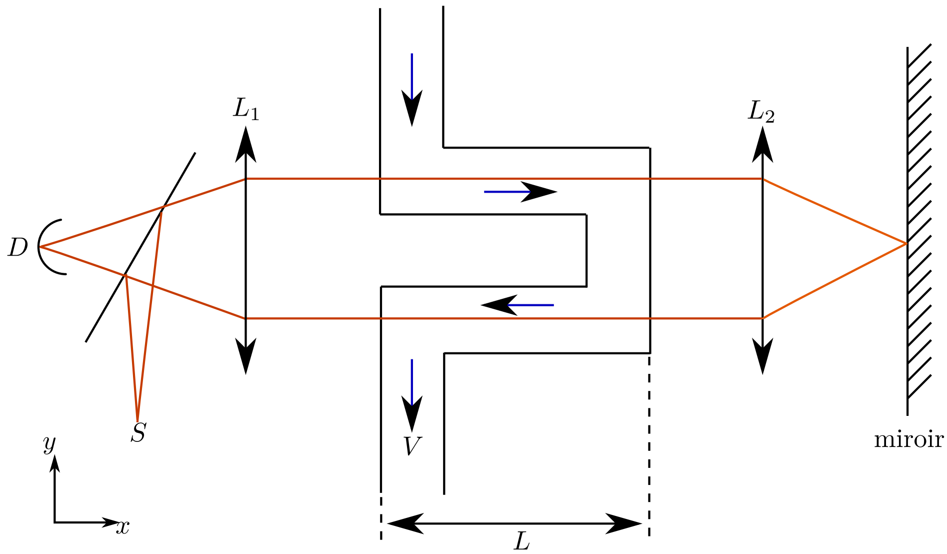

Figure 1 – Principe de l'expérience de Fizeau. L'eau circule à la vitesse V relativement au référentiel du laboratoire. Les faisceuaux sont émis par une source S, séparés par un miroir semi-réfléchissant puis arrivent au détecteur D après un aller-retour à travers les deux bras du circuit hydraulique.

L'expérience de Fizeau consiste à faire interférer deux faisceaux lumineux passant par deux bras d'un circuit d'eau. Dans l'un des bras, l'eau circule à la vitesse $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_x$, tandis que dans l'autre bras, l'eau circule à la vitesse $\boldsymbol{V} = -V\boldsymbol{e}_x$. La lumière se déplace à la célérité c/n dans le référentiel (R_{eau}) et donc à la célérité $c^{\pm} = c/n \pm V$ dans le référentiel du laboratoire (R_{labo}) si l'on suppose juste les transformations de Galilée. On s'attendrait alors à un retard de temps de parcours entre les deux faisceaux :

$$\Delta t = 2L(\frac{1}{c^-} - \frac{1}{c^+}) \approx 4LVn^2/c^2 + \mathcal{O}((V/c)^2) \tag{1}$$

Ce résultat n'est pas en accord avec ce que trouva Fizeau :

$$\Delta t \approx 4LV/c^2(n^2 - 1) + \mathcal{O}((V/c)^2) \tag{2}$$

Par conséquent, soit les transformations de Galilée, et donc les lois de la mécanique Newtonienne, soit les équations de Maxwell, sont fausses.

1.2 Les postulats d'Einstein

✍ BFR chap 13, 3.5

C'est Albert Einstein qui résolut le problème en 1905. Il énonça les postulats de la relativité restreinte, qui sont au nombre de deux.

1. Les lois fondamentales de la physique sont invariantes par changement de référentiel inertiel.
   Corollaire :
   Il s'agit en fait du principe de relativité galiléenne. Ce postulat suppose l'existence de tels référentiels, qui apparaissent alors comme privilégiés dans le mesure où l'écriture des lois de la physique y est particulièrement simple. Il convient de remarquer que ce postulat est vide de sens tant que les lois fondamentales ne sont pas précisées.

2. Les équations de Maxwell sont des lois fondamentales de la physique.
   Corollaires :
   La célérité de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels inertiels, égale à c. De plus, les transformations de Galilée et le Principe Fondamental de la Dynamique sont abandonnés, puisqu'incompatibles avec les lois de l'électromagnétisme.

1.3 Définitions et notions

✍ BFR chap. 13, 1.3, 1.2 et 5.2

L'existence d'une constante fondamentale homogène à une vitesse (c) implique que les grandeurs temps et espace sont bien plus intimement liées que ce qu'on imaginait jusqu'alors. Les coordonnées temps ct et espace $\boldsymbol{x}$ seront donc traitées de façon équivalente.

La donnée d'un vecteur à 4 composantes (ct, $\boldsymbol{x}$) est appelé *événement*. L'espace physique est donc assimilé à $\mathbb{R}^4$. De plus, on appelle *référentiel* (ou *observateur*) *inertiel* une origine O de l'espace associée à un système d'axe ($\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$) de $\mathbb{R}^3$, munie d'une horloge qui donne le temps t et inertiel au sens du postulat 1.
Soient deux observateurs inertiels O et O' de repères locaux respectifs ($\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$) et ($\boldsymbol{e'_x}$, $\boldsymbol{e'_y}$, $\boldsymbol{e'_z}$), comme illustré sur la figure (2). Soit de plus un événement M de $\mathbb{R}^4$. M est un vecteur dont les 4 composantes peuvent être exprimées dans le référentiel (R) (celles-ci sont notées (ct, $\boldsymbol{x}$)) mais aussi dans (R') (celles-là sont notées (ct', $\boldsymbol{x'}$)). On notera de la façon suivante les coordonnées de M dans (R) et (R') respectivement :

$$M_{/R} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{/R'} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Maintenant que les outils de base de la cinématique dans l'espace-temps ont été définis, il semple nécessaire de pouvoir relier les propriétés d'un événement dans deux référentiels inertiels différents.

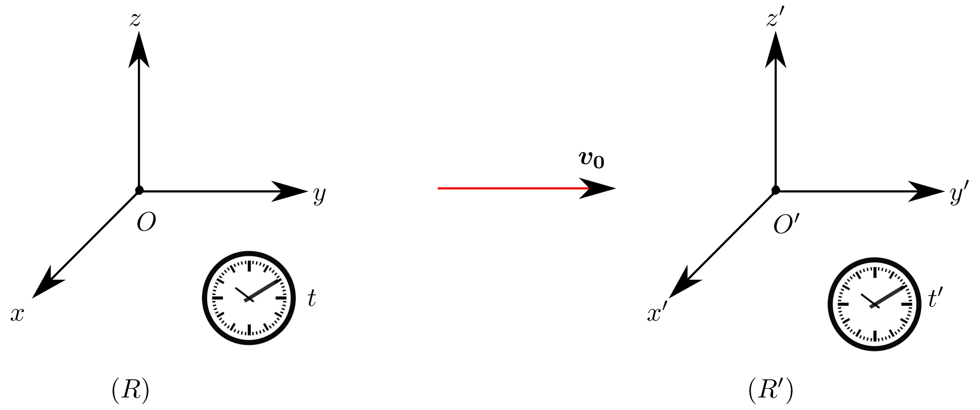

Figure 2 – Deux référentiels inertiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. On note $\boldsymbol{v_0}$ la vitesse de O' par rapport à O. Si M est un événement quelconque, ses coordonnées peuvent être exprimées dans (R) ou dans (R').

1.4 Invariant et transformations relativiste

✍ BFR, chap. 13, 5.2, 4.1

Soient deux événements M_1 et M_2 dont les coordonnées respectives dans un référentiel inertiel (R) sont $(ct_1,\, \boldsymbol{x_1})$ et $(ct_2,\, \boldsymbol{x_2})$. En cinématique galiléenne, la quantité bien connue $(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2$, appelée carré de la distance spatiale, joue un rôle important puisqu'elle est invariante sous les rotations spatiales. À présent que les rôles du temps et de l'espace sont dotés d'une importance similaire, il est essentiel de prendre en compte la variable t dans la recherche d'un invariant en relativité. Il en découle la définition suivante.

Définition : On appelle *carré relativiste* de $M_2 - M_1$ la quantité scalaire :

$$\boxed{\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2} \tag{3}$$

Il est essentiel de remarquer que les variables temps et espace, bien qu'elles soient affectées d'une importance semblable, ne sont pas symétriques. En effet, il existe un signe relatif entre $c^2(t_2 - t_1)^2$ et$(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2$ dans la définition (3) du carré relativiste. Pourquoi avoir introduit ce signe ? Pour le comprendre, on peut se rappeler que l'élaboration de la relativité a été motivée par le fait que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous les transformations de Galilée. Or ces lois sont supposées invariantes par changement de référentiels inertiels (postulat 2). Ceci implique que si dans (R), le champ électrique dans le vide $\boldsymbol{E}$ vérifie l'équation de D'Alembert :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{4}$$

qui est une conséquence des équations de Maxwell, alors le champ $\boldsymbol{E'}$ dans (R') satisfait la même équation exprimée dans les coordonnées de (R'), à savoir :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E'}}{\partial t'^2} - \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E'}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E'}}{\partial z'^2}\right) = 0 \tag{5}$$

On voit que la combinaison des composantes temporelle et spatiales apparaît naturellement dans l'équation d'onde sous la forme d'une différence $c^2t^2 - \boldsymbol{x}^2$, d'où l'expression de Δs^2. La propriété suivante, qui sera admise, devient également plus aisée à comprendre suite à la justification précédente.

Propriété (admise) : Le carré de la différence entre deux événements est un *invariant relativiste*, *i.e.* si (R) et (R') sont deux référentiels inertiels, M_1 et M_2 deux événements, Δs^2 et $\Delta s'^2$ les carrés de $M_2 - M_1$ exprimés dans (R) et (R') respectivement, alors :

$$\boxed{\Delta s^2 = \Delta s'^2} \tag{6}$$

Par convention, on préfére manipuler, non pas le carré lui-même mais une quantité homogène à un temps, appelée *temps propre* et notée τ. Si les deux événements M_1 et M_2 sont infiniment proches, le carré est une grandeur infinitésimale : $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$. On définit alors le temps propre infinitésimal par la relation (7).

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2} \tag{7}$$

Cette définition n'a de sens que si $c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$ est positif. Tout intervalle de temps vérifiant cette condition est appelé intervalle de *genre temps*. Il sera vu plus loin que cette condition est en fait une traduction de la causalité entre deux événements.

Un problème majeur demeure : nous n'avons toujours pas trouver les "bonnes" transformations à appliquer aux composantes d'un événement pour exprimer un changement de référentiels inertiels. Ces transformations doivent laisser les lois de la physique invariantes, et par conséquent elles doivent laisser le temps propre invariant. Cette condition forte permet de montrer, ce que nous ne ferons pas ici, que le passage d'un référentiel inertiel (R) à un autre (R'), en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\boldsymbol{v_0} = v_0\boldsymbol{e}_x$ par rapport à (R) se fait par ce qu'on appelle une *transformation de Lorentz spéciale*, ou *boost de Lorentz*.

Définition : Un *boost de Lorentz* est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, qui lie les vecteurs colonnes représantant les composantes d'un même événement M dans les référentiels (R) et (R') par une matrice de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{8}$$

où

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} \tag{9}$$

est le facteur de Lorentz, et où $\beta = v_0/c$.

Ces transformations appellent plusieurs remarques.

- Les variables temps et espace se transforment de façon symétrique.
- On retrouve la loi de transformation de galilée lorsque $v_0 \ll c$. En effet, prenons l'exemple d'un avion de chasse se déplaçant à Mach 1 ($v_0 = 345\,\mathrm{m\cdot s}$). Il vient alors $\beta^2 \sim 1.2{\cdot}10^{-12}$ et donc $\gamma \approx 1$ à une très bonne approximmation. Ainsi, $x' \approx x - vt$. De plus, $t' \approx t - v_0 x/c^2$. Pour une distance typique $x = v_0 t$, le second terme est un ordre 2 en β, ce qui justifie la relation approchée $t' = t$ valable en cinématique galiléenne.

2 Conséquences cinématiques

2.1 Perte de simultanéité absolue

✍ BFR, 3.7

Définition : On dit que deux événements M_1 et M_2 sont *simultanés* dans (R) inertiel si leur coordonnées temporelles dans (R) sont identiques. Par exemple, les deux événements :

$$M_{1/R} = \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{2/R} = \begin{pmatrix} ct \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont simultanés dans (R).
Exprimons à présent les coordonnées de M_1 et M_2 dans (R') en tirant profit des transformations de Lorentz spéciales. Il vient :

$$M_{1/R'} = \begin{pmatrix} ct'_1 = \gamma(ct - v_0 x_1/c) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - v_0 t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{2/R'} = \begin{pmatrix} ct'_2 = \gamma(ct - v_0 x_2/c) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - v_0 t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire simplement :

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma v_0/c\,(x_1 - x_2) \tag{10}$$

Par suite, si $x_1 \neq x_2$, $t'_2 - t'_1 \neq 0$ et donc M_1 et M_2 ne sont pas simultanés dans (R'). Ainsi la notion de simultanéité est **relative**, car elle dépend du référentiel inertiel dans lequel elle est exprimée. Dès lors que deux événements ont des positions spatiales différentes, il existe toujours un référentiel dans lequel M_1 est antérieur à M_2 et un autre dans lequel M_1 est postérieur à M_2.

Une conclusion trop hâtive serait d'affirmer que la causalité entre les événements M_1 et M_2 est également relative. Ceci est faux parce que la relation de cause à effet entre M_1 et M_2 n'a de sens que si elle est appréciée dans le référentiel attaché à l'un des événements. En effet si (R_1) est le référentiel inertiel dans lequel M_1 a pour composantes $(0,0,0,0)$, les composantes temporelle et spatiales de M_2 dans (R_1), notées $(ct,\, \boldsymbol{x})$, sont uniques. Supposons que le carré de $M_2 - M_1$ est positif. Alors M_2 et M_1 peuvent être liés causalement, car la lumière parcours la distance $|\boldsymbol{x}|$ en un temps inférieur à t. Si M_1 et M_2 sont effectivement liés par une relation de cause à effet, alors si $t > 0$, M_1 est nécessairement la cause, et si $t < 0$, M_1 est nécessairement l'effet, et ceci indépendamment de tout référentiel d'observation.
Si au contraire le carré de $M_2 - M_1$ est négatif, alors aucune information ne peut parvenir de M_1 vers M_2 et réciproquement. En effet, l'expression des transformations de Lorentz montre que nécessairement, $\beta < c$ et donc aucune information ne peut se propager entre M_1 et M_2. En conclusion, **la causalité est préservée** par le fait que l'information ne peut pas se déplacer plus vite que la lumière.

2.2 Dilatation des durées

✍ BFR 14.2

Soit un observateur inertiel (R) muni d'une horloge qui émet dans tout l'espace un signal régulier tous les Δt_0. Notons M_1 et M_2 les événements correspondants à l'émission de deux signaux successifs. Puisque l'horloge est placée à l'origine du repère, les composantes de $M_2 - M_1$ dans (R) sont :

$$(M_2 - M_1)_{/R} = \begin{pmatrix} c\Delta t_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si comme précédemment, (R') est en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\boldsymbol{v_0} = v_0\boldsymbol{e}_x$, l'observateur placé en O' reçoit les signaux avec un intervalle de temps $\Delta t'$ donné par :

$$\boxed{\Delta t' = \gamma \Delta t_0} \tag{11}$$

Par conséquent, si l'horloge bat la seconde, Δt_0 représente la durée propre dans (R), c'est-à-dire l'écoulement du temps tel qu'il est perçu par l'observateur en O, tandis que $\Delta t'$ est l'écoulement du temps dans (R) tel qu'il est perçu par l'observateur en O'. Or $\gamma > 1$ et donc on a toujours $\Delta t' > \Delta t_0$. Ainsi, le temps est **dilaté** : O' voit l'observateur en O "vivre" plus lentement que lui d'un facteur γ.

✍ Gourgoulhon, chap. 4, 3.1

Confirmation expérimentale : La vérification expérimentale de la dilatation des durées la plus frappante date de 1963 (Frisch et Smith). Elle consista à déterminer le temps de vie des muons émis par la haute atmosphère. La durée de vie moyenne des muons étant de $\tau_0 = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s (soit une distance moyenne de parcours majorée par $c\tau_0 = 660$ m) on s'attendrait en physique non relativiste à ce que le flux de muons détecté au niveau de la mer soit au moins 18 fois plus faible qu'à une altitude de 1910 m. Ceci n'est pas vérifiée parce que les muons sont ultra-relativistes et donc dans le référentiel du laboratoire, le muon a un temps de vie moyen bien plus long en vertu de la relation (11). Après avoir sélectionné les muons dont la vitesse est comprise entre $0.9950c$ et $0.9954c$, Frisch et Smith ont mesuré les flux de muons aux deux altitudes mentionnées ci-dessus, et en ont déduit une durée de vie dans le référentiel terrestre de $\tau = (8.8 \pm 0.8)\tau_0$, en accord avec le facteur de Lorentz théorique $\gamma = 8 \pm 2$.

2.3 Composition des vitesses

✍ Langlois

En physique galiléenne, la vitesse est une grandeur additive sous changement de référentiel inertiel. Or il a été vu que cette loi de composition est impossible en relativité restreinte puisque la célérité de la lumière est invariante. Le but de cette section est donc de dériver la loi de composition des vitesse en relativité.

Considérons un point matériel P en mouvement dans l'espace. on note $(ct, \boldsymbol{x})$ les coordonnées de la trajectoire de ce point dans le référentiel (R) et $(ct', \boldsymbol{x'})$ celles dans (R'). On note de même $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v'}$ les vitesses respectives de P dans (R) et dans (R'). La composante selon x (direction de boost) de la vitesse est affectée d'un indice $\parallel$, tandis que la composante orthogonale est notée avec un $\perp$.
Écrivons les transformations de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} ct' = \gamma(ct - v_0 x/c) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{pmatrix} \tag{12}$$

La première équation donne par différentiation :

$$c\,\mathrm{d}t' = \gamma(c\,\mathrm{d}t - v_0\,\mathrm{d}x/c) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma(1 - v_0\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t/c^2)} \tag{13}$$

tandis que la deuxième implique :

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \gamma(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}) \tag{14}$$

d'où puisque $v_\parallel = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ et $v'_\parallel = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$:

$$\boxed{v'_\parallel = \frac{v_\parallel - v_0}{1 - v_0 v_\parallel/c^2}} \tag{15}$$

On peut faire de même pour la partie orthogonale de la vitesse, et on trouve :

$$\boxed{\boldsymbol{v'}_\perp = \frac{\boldsymbol{v}_\perp}{\gamma(1 - v_0 v_\parallel/c^2)}} \tag{16}$$

Ces résultats appellent de nombreuses remarques.

- Contrairement à la transformation galiléenne, la partie orthogonale de la vitesses est également affectée.
- L'invariance de c est bien respectée, parce que $v_\parallel = c$ implique $v_\parallel = (c - v_0)/(1 - v_0/c) = c$ et $\boldsymbol{v}_\perp = \mathbf{0}$.
- La limite $v_\parallel, v_0 \ll c$ redonne bien la transformation de galilée à l'ordre 1.

Maintenant que la loi de composition des vitesses a été démontrée, il est possible d'expliquer les résultats de l'expérience de Fizeau. En effet, si (R) est le référentiel du laboratoire et (R') celui de l'eau (on raisonne alternativement dans chacun des bras), alors le faisceau lumineux a une vitesse $v_\parallel = c/n$ dans (R') puisque c'est le milieu diélectrique qui, en réemettant des ondes électromagnétiques, participe à la propogation du faisceau. Par suite, si $v_0 = V$, il vient :

$$c_\parallel^+ = \frac{c/n + V}{1 + V/nc} \tag{17}$$

pour le faisceau se propageant dans le sens de l'eau, et :

$$c_\parallel^- = \frac{c/n - V}{1 - V/nc} \tag{18}$$

pour celui se propageant en sens inverse. La différence de temps de parcours dans (R) entre les deux faisceaux contra-propageant vaut donc :

$$\boxed{\Delta t = 2L(\frac{1}{c_\parallel^-} - \frac{1}{c_\parallel^+}) \approx \frac{4VL}{c^2}(n^2 - 1) + \mathcal{O}((V/c)^2)} \tag{19}$$

en total accord avec la formule empirique mise en évidence par Fizeau. Encore une fois, il s'agit d'une victoire éclatante pour la relativité.

2.4 Effet Doppler relativiste

Afin d'achever cette présentation sommaire des conséquences de la relativité, l'effet Doppler relativiste est présenté.

Considérons l'émission par O' d'un signal lumineux à intervalle régulier $\Delta t'_{em}$. O' se déplace à la vitesse $\boldsymbol{v_0} = v_0 \boldsymbol{e_x}$ dans le référentiel (R) d'un récepteur, noté O. Le premier signal parcours la distance r_1 et est émis par O' à $t = 0$ (il s'agit bien du temps t mesuré par le récepteur O), tandis qu'un second signal, ayant parcouru la distance r_2, atteint O en $t = \Delta t_{rec}$. On a $\Delta t_{rec} \neq \Delta t_{em}$ en général puisque les distances parcourues dans (R) par les deux signaux sont différentes. On note $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire dans la direction $O'(t = 0)O$. On effectue l'hypothèse suivante.

Hypothèse : La vitesse de déplacement de $0'$ est petite devant c, soit :

$$\boxed{r_1 \gg \Delta t_{em} v_0} \tag{20}$$

Par un simple argument géométrique, on voit que la relation entre intervalles de temps de réception et d'émssion dans (R) s'écrit :

$$\Delta t_{rec} = \Delta t_{em} + (r_2 - r_1)/c \tag{21}$$

Or $r_1 \gg \Delta t_{em} v_0$ et donc $r_2 - r_1 \approx \Delta t_{em} \boldsymbol{v_0} \cdot \boldsymbol{n}$. De plus, la dilatation des durées permet d'écrire que l'intervalle de temps propre d'émission vaut $\Delta t'_{em} = \Delta t_{em}/\gamma$, et donc :

$$\Delta t_{rec} = \gamma(1 + \boldsymbol{v_0} \cdot \boldsymbol{n}/c)\Delta t'_{em} \tag{22}$$

En faisant apparaître les fréquences d'émission et de réception, il vient in fine :

$$\boxed{f_{rec} = \frac{f'_{em}}{\gamma(1 + \boldsymbol{v_0} \cdot \boldsymbol{n}/c)}} \tag{23}$$

Il s'agit de la formule de l'effet **Doppler relativiste**.

Cas particuliers :

- Si $\boldsymbol{n}$ est parallèle à $\boldsymbol{v_0}$, alors :

$$f_{rec} = \sqrt{\frac{1 - v_0/c}{1 + v_0/c}} f'_{em} \tag{24}$$

  Dans la limite non relativiste,$v_0/c \ll 1$ et donc $f_{rec} \approx (1 - v_0/c) f'_{em}$, qui est bien la formule de l'effet Doppler classique.

- Si $\boldsymbol{n}$ est orthogonal à $\boldsymbol{v_0}$, alors :

$$f_{rec} = \frac{f'_{em}}{\gamma} \tag{25}$$

  Il s'agit ici d'un effet d'ordre 2, purement relativiste, qui est dû uniquement à la dilatation des durées.

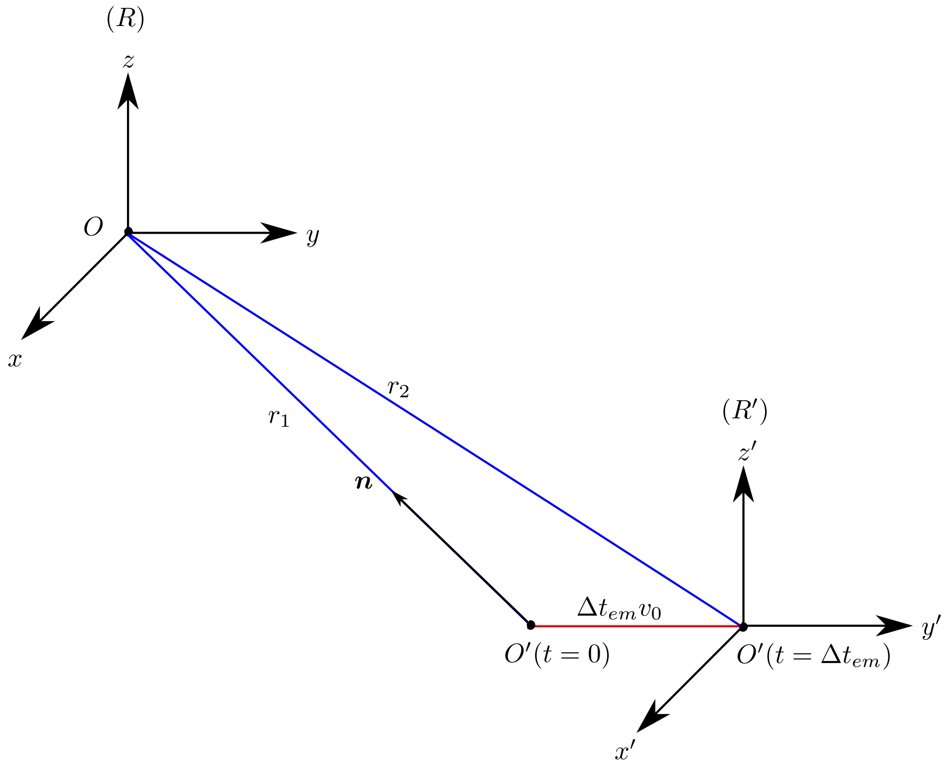

Figure 3 – Le récepteur O' se déplace à la vitesse $\boldsymbol{v_0} = v_0 \boldsymbol{e}_x$ par rapport à O. Entre les deux instants $t = 0$ et $t = \Delta t_{rec}$, O' parcours la distance $\Delta t_{em} v_0$ dans (R), comme illustré sur la figure.

Conclusion

La théorie de la relativité restreinte a confirmée les lois de Maxwell tout en montrant que la cinématique galiléenne n'est qu'une limite à faible vitesse des lois fondamentales de la physique.

La relativité prévoit de nombreux phénomènes contre-intuitifs qui ont pourtant été démontré expérimentalement de façon éclatante. Il s'agit aujourd'hui d'un cadre théorique de base en physique fondamentale.

Bien que la cinématique ait été discutée, nous n'avons pas encore parlé des lois de la dynamique, puisque les lois de Newton doivent être modifiées. Ceci fera l'objet d'une prochaine leçon.

Commentaires, questions, espace pour temporiser...